毛纲源理工类数学辅导系列

高等数学学习指导 硕士研究生备考指南

高等数学
解题方法技巧归纳

（下册·第2版）

毛纲源 编著

△ 专题讲解 涵盖重点难点
△ 通俗易懂 帮助记忆理解
△ 同步学习 深入辅导指点
△ 复习迎考 获益效果明显

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源理工类数学辅导系列

高等数学学习指导　硕士研究生备考指南

高等数学
解题方法技巧归纳
（下册·第2版）

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳(下册·第2版)/毛纲源　编著.
武汉:华中科技大学出版社,2010年4月
ISBN 978-7-5609-2663-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第066623号

高等数学解题方法技巧归纳(下册·第2版)　　毛纲源　编著

策划编辑:王汉江(14458270@qq.com)
责任编辑:王汉江　　　　封面设计:潘　群
责任校对:张　琳　　　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850mm×1168mm　1/16　　印张:16.5　　字数:400 000
版次:2010年4月第2版　　印次:2010年4月第6次印刷
ISBN 978-7-5609-2663-6/O·252　　定价:28.80元

内 容 提 要

本书将高等数学(即微积分)主要内容按问题分类,通过引例,归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧,其中不少是作者多年来积累的教学经验.读者阅读此书,必将增强分析问题、解决问题和应试的能力.

本书实例多、类型广、梯度大.例题主要取材于两部分:一部分是面向21世纪课程新教材《高等数学》(下册 · 第六版)(同济大学数学系编,高等教育出版社出版)中的典型习题;另一部分是历届(包括2009年)全国硕士研究生入学考试数学试题,其中数学试卷一、数学试卷二的考题,绝大部分都已收入.

本书可供本(专)科学生学习高等数学参考;对于自学者和有志攻读硕士学位研究生的青年,本书更是良师益友;对于参加专升本、成人教育、自考的读者,也不失为一本有指导价值的很好的参考书;对于从事高等数学教学的教师,也有一定的参考价值.

第2版前言

几年前，我编写出版了《高等数学解题方法技巧归纳》(下册).出版后，受到广大读者的厚爱，多次重印.对于广大读者的关注和信任，在此表示感谢.根据读者对本书的使用情况及其意见和要求，在第1版的基础上，特作进一步修改.为突出重点和难点，对其内容进行了调整、充实和删改，但保留第1版的特色.

按问题分类，通过引例，剖析各类题目的解题思路，归纳、总结其解题方法和技巧.

例题丰富而又典型、类型广、梯度大，叙述详细，通俗易懂，便于自学.

此外，不少题目还给出一题多解，从多角度详细分析，深入浅出地进行讲解，希望收到化难为易、举一反三的效果.

本书仍以同济大学数学系编写的《高等数学》(下册・第六版)为蓝本编写，不少例题选自该教材中的典型习题.

通过对本书的学习，加强对高等数学基本内容的理解和掌握，提高读者分析问题和解决问题的能力，这是作者最大的心愿.

由于作者水平有限，书中难免有不少缺点和不妥之处，恳请同行、读者批评指正.

毛纲源

北京师范大学珠海分校国际商学部

2010年2月

第 1 版前言

《线性代数解题方法技巧归纳》(第 2 版)与《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》出版后,深受读者欢迎,多次重印,畅销全国.应广大读者要求,现分上、下两册出版《高等数学解题方法技巧归纳》.

高等数学(即微积分)是高校理工科最主要的基础课之一.学生对它掌握得如何,不仅直接关系到后续课程的学习,而且对今后的提高与发展,以及工作中的贡献,都有着深远的影响.为帮助广大学生和自学者学好高等数学,为给他们备考研究生入学考试提供一份复习资料,编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》上、下册.

同前两本书一样,本书将高等数学的主要内容按问题分类,通过引例归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教科书和习题解答,自具特色.

本书注意一题多解,注意分析各种解题方法的特点与联系,分析题中条件与所得结果之间的联系,灵活地将解题方法技巧与所学基本理论联系起来.这样不仅可以培养读者的灵活思维能力,达到举一反三、触类旁通的学习效果,而且在学会解题的同时,也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注意各种重要题型的解法技巧的总结归纳.试题是无限的,而题型是有限的,只有掌握好各类题型的解法技巧,才能以不变应万变,找到解题的切入点和突破口.

此外,还在不少例题后加写“注意”部分,内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法小结及常见错误的剖析、某些例题中结论的推广等.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题和习题中一部分取材于面向 21 世纪课程教材《微积分》(下册)(同济大学应用数学系编,高等教育出版社,2000 年 1 月出版)中的典型习题;另一部分取材于历届的全国攻读硕士研究生入学考试数学试卷一、二的考题.

考研试题既反映了“数学考试大纲”对考生的要求,又蕴涵着在大纲指导下的命题思想.通过考研试题的研讨,使有志攻读硕士学位的学生“平战结合”,了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识上、题型上、方法和技巧上作好应试准备.若把这些考研试题全部理解消化,将为考研成功打下坚实

的基础.

考研试题并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求.多做考题并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力,加深对高等数学基础知识的理解都是大有好处的.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生学位的青年,本书更是良师益友;对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

编写本书时,参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢.

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导班的教学实践,但由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有不足和错误之处,恳请读者不吝指正.

毛纲源

2001年12月于武汉理工大学西院

目　　录

第 8 章　向量代数和空间解析几何

学习一门新知识时，既要注意比较与已掌握的知识的相同点与相近点．更要注意在概念及运算上新的发展，与已掌握的知识的不同之处．

由于数学中在某个集合内规定了某些运算，便形成了某个代数系统．各个代数系统有其自身的运算法则，一定要注意不要把一个代数系统的运算法则随意套用到另一个代数系统中去．

向量运算中常出现的几种错误大半都是由于把实数的运算法则照搬到向量运算中所产生的．

8.1　向量的运算

1. 向量的线性运算及其常用性质

既有方向又有大小的量称为向量，通常用有向线段，如$\overrightarrow{AB}$或用黑体符号如$\boldsymbol{a}$表示，其长度称为向量的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$．模为 0 的向量称为零向量，模为 1 的向量称为单位向量．规定两向量的夹角φ为$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$．

（Ⅰ）向量加法　常用平行四边形法则和三角形法则将两向量相加．多个(两个以上向量)向量相加时，可将向量首尾相接，以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量就是这些向量的和向量．

（Ⅱ）向量减法　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$规定为$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$．

（Ⅲ）数与向量的乘法　$\lambda\boldsymbol{a}$规定为一向量．

(1) 当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向一致，其模为$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反，其模为$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(3) 当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量，即$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．

向量的线性运算满足交换律、结合律、分配律．

解题时，如有必要可先作图，然后从图形中分析观察相关有向线段之间的线性关系，再运用上述线性运算法则求解有关问题．

向量的线性运算还可运用向量的坐标进行计算，为此需理解下述常用概念．

(1) 向量投影　过向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别作 u 轴的垂直平面,其交点坐标分别为 u_1, u_2,则 u_2-u_1 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记为

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=u_2-u_1=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi,$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模,φ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角.且有下述投影定理.

定理 8.1.1 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$.

(2) 向量的方向角、方向余弦　$\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴的夹角分别为 α,β,γ,它们称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

(3) 向量的坐标　记 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量,且记为

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=a_x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=a_y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=a_z.$$

则 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,并记 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,其中 a_x、a_y、a_z 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标(或方向数),也称为 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 轴上的投影,其中

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\quad \cos\alpha=a_x/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos\beta=a_y/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a^2},\quad \cos\gamma=a_z/\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

显然有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,且单位向量

$$\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma);$$

其中 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

(4) 向量线性运算的坐标运算　设

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$

则　$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$,　$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$ (λ 为实数).

例 1[8.1.9]　自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解　如图 8.1.1 所示,P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线,垂足点 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$;P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线,垂足点 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$;P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线,垂足点 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

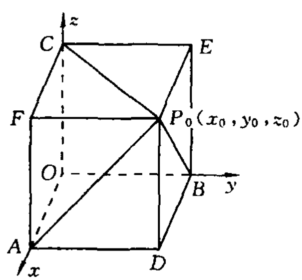

图 8.1.1

例 2[8.1.17]　设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与轴 u 的夹角是 $60°$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解　已知 $|\boldsymbol{r}|=4$,$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\times\cos60°=4\times(1/2)=2$.

例 3[8.1.15]　设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$

的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$，其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-1/2,\quad \cos\beta=-\sqrt{2}/2,\quad \cos\gamma=1/2,$$

方向角分别为 $\alpha=2\pi/3,\beta=3\pi/4,\gamma=\pi/3$.

例 4 分别求出向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模，并分别用单位向量 $\boldsymbol{a}^0$、$\boldsymbol{b}^0$、$\boldsymbol{c}^0$ 表达向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$.

解 因 $\boldsymbol{a}=(1,1,1),\boldsymbol{b}=(2,-3,5),\boldsymbol{c}=(-2,-1,2)$，故

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3},\quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=\sqrt{3}\boldsymbol{a}^0,$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38},\quad \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^0=\sqrt{38}\boldsymbol{b}^0,$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3,\quad \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0=3\boldsymbol{c}^0.$$

例 5 一向量与 x 轴、y 轴成等角，与 z 轴所构成的角是它的 2 倍，试确定该向量的方向.

解 设该向量与 x 轴、y 轴的夹角为 α，则与 z 轴的夹角为 2α. 又由于方向余弦的平方和等于 1，即 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1\Rightarrow 2\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)^2=1$，亦即 $2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)=0$，从而 $\cos\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{2}$（舍去 $\cos\alpha=-1/\sqrt{2}$），由此知 $\alpha=\pi/2$ 或 $\alpha=\pi/4$.

该向量的方向角分别为 $\alpha=\beta=\pi/2,\gamma=\pi$ 或 $\alpha=\beta=\pi/4,\gamma=\pi/2$，故该向量的方向为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(0,0,-1),$$

或
$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0).$$

2. 数量积（点积、内积）的运算规律和常用性质

在实数运算中，两个实数 λ 和 μ 相乘可用三种符号表示，即

$$\lambda\mu=\lambda\cdot\mu=\lambda\times\mu.$$

上述三种乘法记号用于实数是表达同一个乘积概念：两实数的乘积概念. 而用于向量，则表示三种不同的乘积.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 相乘，不能写成 $\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ 或 $\lambda\times\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，不能写成 $\boldsymbol{ab}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 而且数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是对两个向量的定义，三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 是没有定义的，因而写成 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^3$ 是错误的. 虽然有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$，但 $\boldsymbol{a}^3$ 或 $\boldsymbol{a}^4$ 没有定

义,因而没有意义.

数量积的运算规律与实数的运算规律基本一致,所不同的是结合律、消去律不成立.

数量积的结合律不成立,即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

什么是消去律? 设 λ_1、λ_2、λ_3 是三个数,若 $\lambda_1\neq0$,且 $\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_3$,那么两边除以 λ_1(消去 λ_1)得到 $\lambda_2=\lambda_3$,此种运算称为消去律.因由 $\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_3$ 得到 $\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)=0$,消去律成立,就是由 $\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)=0$ 得到 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2-\lambda_3=0$;消去律不成立,就是由 $\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)=0$ 推不出 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2-\lambda_3=0$.

由于数量积没有逆运算,所以数量积的消去律不成立,即由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 一般推不出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.或由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 一般推不出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

数量积的运算规律虽然没有结合律和消去律,但满足下列运算规律.

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 数量积与数量的乘积有结合律

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\quad (\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

(4) 数量积的常用性质有以下几条,应熟记.

① 一个向量与它自己的数量积等于其长度的平方,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos0^\circ=|\boldsymbol{a}|^2.$$

② 若两个向量相互垂直(或其中有一个为零向量),则两向量的数量积等于零.反之亦然,即

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{8.1.1}$$

利用上面两个性质,可以得到

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0.$$

(3) 数量积的几何意义在很多方面有用,务必理解.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度和 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的乘积或 $\boldsymbol{b}$ 的长度和 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的乘积(见图 8.1.2),即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$
$$=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\quad(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}).$$

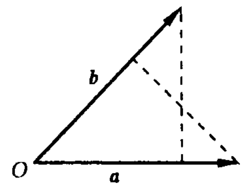

图 8.1.2

因而向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}|=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0$$

$$=b_x\cos\alpha_1+b_y\cos\beta_1+b_z\cos\gamma_1, \tag{8.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1)$.

同法，可求得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}), \tag{8.1.3}$$

因而向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0=a_x\cos\alpha_2+a_y\cos\beta_2+a_z\cos\gamma_2, \tag{8.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{b}^0=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2)$.

例 6[8.2.9(1)]　已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$.

解　
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}&=[(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})]\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\\&\quad-[(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})]\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=8(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-8(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 7　设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，且在向量 $\boldsymbol{c}$ 上投影是 14 的向量 $\boldsymbol{d}$.

解　设 $\boldsymbol{d}=(x,y,z)$. 由 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=0$ 及 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}=0$. 又由题设知 $\boldsymbol{d}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影为 14，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}=14$. 得到

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{c}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}=\sqrt{2^2+1^2+2^2}\times14=42.$$

于是有$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=2x-3y+z=0,\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}=x-2y+3z=0,\\\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=2x+y+2z=42,\end{cases}$　解之得$\begin{cases}x=14,\\y=10,\\z=2,\end{cases}$

即
$$\boldsymbol{d}=(14,10,2).$$

例 8　设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，试问若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否推知 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

解　一般不成立. 事实上，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 可知，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$. 因 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 或$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$.

从几何上看，若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$的图形如图 8.1.3 所示. 由数量积的几何意义知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_1=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\theta_1)\\&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_2=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{c}|\cos\theta_2)\\&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

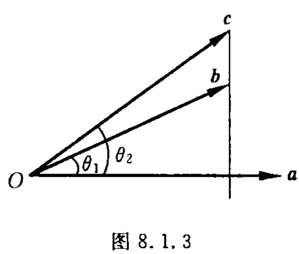

图 8.1.3

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 只能得到 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$ 的结论. 从图形上看，这个结论是显而易见的，

但得不出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 的结论.

3. 向量积(叉积、外积)的运算规律和常用性质

与实数的运算规律相比较,向量积的运算规律不同之处在于交换律、结合律及消去律不成立,即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\quad(\text{向量积交换律不成立});$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\quad(\text{向量积结合律不成立});$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\quad(\text{消去律不成立}).$$

但向量积满足下列运算规律.

(1) 分配律:$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

(2) 向量积与数量的乘积有结合律性质:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

(4) 向量积的其他运算性质和算法归纳如下.

① 向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向是垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系的关系;$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的大小为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$的几何含义表示为以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积. 值得注意的是,切勿把$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$当成向量积本身,它只是向量积的模. 要完整地表达向量积,除模以外,还必须说明向量积的方向.

② 如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线(即平行)向量,则其向量积等于零;反之,如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积等于零,则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是共线(即平行)向量,即

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{b}\text{ 共线},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\longleftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\ (\lambda\text{ 为常数})$$

$$\longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\longleftrightarrow a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z.$$

③ 向量积的计算方法:设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\tag{8.1.5}$$

上式右端是一个三阶行列式,其中第 1 行是 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,第 2 行、第 3 行分别是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x,a_y,a_z;b_x,b_y,b_z. 这样一来,写出 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的三阶行列式的形式是不难的. 问题是写出三阶行列式后,如何更快、更准确地算出这三阶行阶式? 从而求出向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的系数. 不必按一般三

阶行列式按行展开的算法计算. 由式(8.1.5)易看出，实际运算可按如下方法求解.

只需用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在三个坐标轴上的投影为元素，写出下列三个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

其值就分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的系数. 值得注意的是，要以三阶行列式中第 2 列的两个元素 a_y,b_y 作为上述二阶行列式的第 1 列，排好第 1 列，即可按 $y\to z\to x\to y$ 次序依次写出 3 个二阶行列式，其中相邻两个二阶行列式中相邻的两列相同.

按式(8.1.5)计算，可不必考虑余子式的代数符号，而且快而准.

例 9[8.2.1]　设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)$

$$=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$=(5,1,7)=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}\quad(\text{见式(8.1.5)});$$

(2)
$$(-2\boldsymbol{a})\cdot(3\boldsymbol{b})=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18,$$

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14);$$

(3)
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

例 10[8.2.3]　已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$和 $M_3(3,1,3)$，求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1),$$

$$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2).$$

因 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 均与 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$ 垂直，故所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\pm\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|}\quad(\text{注意前面的正、负号不能丢}),$$

$$\text{而}\ \overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right)$$

$$=(6,-4,-4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17},$$

故
$$\boldsymbol{a}=\pm\frac{1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

值得注意的是，向量代数中没有向量除法. 这是因为除法总是作为乘法的逆运算来定义的，而数量积和向量积都没有逆运算，因此不可能有以向量为分母的除法. 虽然当数 $a\neq0$ 时，$\frac{a}{a}=1$ 有意义，但当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}$ 没有意义. 因而当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=1$ 是错误的.

例 11 在以非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻边的平行四边形中垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的高向量 $\boldsymbol{h}$ 为(　　).

(A) $\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}}$　　(B) $\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{a}$　　(C) $\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}$　　(D) $\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$

解 仅(D)入选.(A)中有向量除法，所以没有意义.(C)中 $\boldsymbol{b}$ 为向量，$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}$ 为一数量，不能进行减法运算. 由图 8.1.4 知

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{b}-(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0)\boldsymbol{a}^0$$
$$=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}.$$

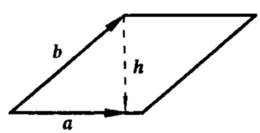

图 8.1.4

4. 三个向量的混合积

前面为了实际的需要，定义了向量的两种乘积，都是只有两个向量参加的运算. 现在要问，由三个向量参加运算，是否也可以定义它们的乘积呢？不难看出，结合数量积和向量积运算，三个向量参加运算，只有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 三种情况出现. 而 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是在 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所决定的平面上的一个向量. 因不常用也不多讨论了. 下面只讨论三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 中两个作向量积，其结果再与另一个向量作数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的情况，称它为三个向量的混合积. 混合积又可简写为 $[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$.