数学分析

（下 册）

刘正荣 杨启贵
刘深泉 洪 毅 编

科学出版社

数 学 分 析

（下册）

刘正荣　杨启贵
刘深泉　洪　毅　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册包含数列极限及其性质、一元函数及其性质、导数与微分、微分学中的基本定理及导数的应用、不定积分、定积分、广义积分等内容. 下册包含数项级数、函数项级数、多元函数的极限与连续、多元函数的导数与微分、向量值函数的微分、含参变量的积分与广义积分、重积分、曲线积分与曲面积分等内容. 本书参考了近期高中数学教学改革的内容, 遵循简洁、易学与系统性相结合的原则, 对传统教材的内容做了一些调整, 使之更便于教学.

本书可作为普通高等院校数学类专业的教材, 也可作为工科院校以及经管类院校中对数学要求较高的专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析: 全 2 册/刘正荣等编. —北京: 科学出版社, 2012
ISBN 978-7-03-035387-0

Ⅰ. ① 数… Ⅱ. ① 刘… Ⅲ. ① 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 189962 号

责任编辑: 姚莉丽 王胡权 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2012 年 8 月第一次印刷 印张: 35 1/2
字数: 693 000

定价: 64.00 元(上、下册)

目　　录

第8章　数项级数

无穷级数的理论具有悠久的历史, 许多有趣的数学问题都与它有关. 无穷级数分为数项级数与函数项级数两大类, 它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算等方面的一种强有力的工具, 因此无穷级数理论是本课程的重要组成部分. 本章主要介绍数项级数的一些基本概念 (级数和、收敛与发散等), 级数的基本性质, 各种数项级数收敛或发散的判别法以及级数的一些代数运算性质, 为后面函数项级数打下基础.

8.1　数项级数的基本概念及其收敛性

8.1.1　数项级数的基本概念与性质

设有数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots,$$

称和式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为一个**数项级数**(简称**级数**), 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 u_n 称为级数的**通项**或**一般项**.

这里的级数仅仅是一种形式上的相加, 无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算, 那么这种相加是否具有 "和数" 呢? 这个 "和数" 的确切意义又是什么呢? 为了回答这个问题, 令

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

称 s_n 为级数的前 n 项部分和或简称为部分和, 而数列 $\{s_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 称为**级数的部分和数列**.

定义 8.1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列收敛于有限数 S, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并称它的和为 S, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 没有和.

由定义 8.1 知, 研究级数的敛散性问题实质上就是研究其部分和数列是否存在极限的问题, 因此可以利用学过的数列极限的知识来研究级数.

例 8.1　设 $a \neq 0$, 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性.

解　当 $q=1$ 时, 前 n 项和 $s_n = na \to \infty (n \to \infty)$, 此时级数发散.

当 $q=-1$ 时, 部分和数列

$$s_1 = a, s_2 = 0, s_3 = a, \cdots, s_{2n-1} = a, s_{2n} = 0, \cdots,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在, 此时级数也发散.

当 $|q| \neq 1$ 时,

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

若 $|q| < 1$, 因为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

所以, 级数收敛, 且其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

若 $|q| > 1$, 由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \infty,$$

因此级数发散.

综合所述, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 当 $|q| < 1$ 时收敛, 当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

例 8.2　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解　对于任意正整数 n, 该级数的前 n 项和

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=1-\frac{1}{n+1},
\end{aligned}
$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

例 8.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ 的敛散性.

解 前 n 项和

$$
\begin{aligned}
s_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln k-\ln(k+1)]\\
&=(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)]\\
&=-\ln(n+1).
\end{aligned}
$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=-\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=-\infty$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ 发散.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 和为 S, 则称

$$r_n=S-s_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

为级数的余和 (又称余和数列), 显然 $r_n\to 0(n\to\infty)$.

由数列极限的性质易推导出级数的一些简单性质. 下面给出**级数的基本性质**.

定理 8.1 (级数线性性质) 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

证 设 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, $\bar{s}_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$, 由题设有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=$

S, $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{s}_n = \bar{S}$($S$, $\bar{S}$ 为有限数), 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 的部分和为 σ_n, 则

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) + \cdots + (\alpha u_n + \beta v_n)\\ &= \alpha(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + \beta(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)\\ &= \alpha s_n + \beta \bar{s}_n \to \alpha S + \beta \bar{S} \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且其和为 $\alpha S + \beta \bar{S} = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

特别地, 在定理 8.1 中, 当 $\beta = 0$ 时, 对于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

易知, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则当 $\alpha \neq 0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ 也发散.

定理 8.2　任意改变级数有限项的数值, 不会改变级数的敛散性.

证　设原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 任意改变其有限项的数值后所得的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 因改变数值的只是有限多项, 所以存在 N, 当 $n > N$ 后 $u_n = v_n$, 记 $\omega_n = u_n - v_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_N - u_N) + 0 + 0 + \cdots,$$

显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 是收敛的. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n - (u_n - v_n)] = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - w_n).$$

根据定理 8.1 知, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛; 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

定理 8.2 表明, 对一个级数去掉或添加有限项 (即把它们变为 0), 不影响此级数的敛散性.

定理 8.3 (收敛级数结合律)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对其项任意加括号后所成级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n$ 仍收敛, 且和数不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$, 加括号后所成级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) + \cdots$$

的部分和数列为 $\{A_n\}$, 则有

$$\begin{aligned} A_n &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) \\ &\quad + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) \\ &= s_{i_n}, \end{aligned}$$

因此, $\{A_n\}$ 是 $\{s_n\}$ 的子列, 所以由 $\{s_n\}$ 收敛, 可得 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 定理得证.

注 8.1 一个级数的项加括号后所得的级数收敛时, 不能保证原来的级数也收敛, 如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的, 但对每两项之间加上括号有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = (1-1) + (1-1) + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = 0 + \cdots + 0 = 0,$$

因而此时所得级数收敛. 进一步, 若按如下方式加括号, 有

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

的不同结果. 因此对一个发散的级数, 若按不同的方式加括号, 所得到的级数可能收敛到不同的数.

例 8.4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{7^n}$ 的和.

解 根据几何级数的收敛性结果得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^n}{7^n} &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \\ &= \frac{16}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n - \frac{6}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \\ &= \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{62}{15}. \end{aligned}$$

8.1.2 Cauchy 收敛原理

对于很多级数, 很难由定义出发直接计算出级数的部分和, 因而难以判断其敛散性. 能否直接根据数项级数本身来探讨它的收敛性? 根据级数部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛的充分必要条件的数列 Cauchy 收敛原理, 结合数项级数收敛的定义可得判别级数收敛的充要条件.

定理 8.4 (级数的 Cauchy 收敛原理)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $m > n > N$ 时, 成立

$$|s_m - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon.$$

这一条件也可叙述为: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 对一切正整数 p 成立

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

特别地, 取 $n, n+1 \geqslant N$ 时, 有如下的重要结论.

推论 8.1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则一般项 u_n 趋向于 0, 即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

由推论 8.1 知, 当考虑一个级数是否收敛时, 应首先考虑, 当 $n \to \infty$ 时, 一般项 u_n 是否趋于 0, 若不趋于 0, 即可断言级数发散. 如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 发散, 因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

但值得注意, 推论 8.1 的逆命题不成立, 如例 8.3 中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ 发散, 但是有

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

例 8.5　证明数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ 发散.

证　由于

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1,$$

因此根据推论 8.1 知, 该级数发散.

例 8.6　用 Cauchy 收敛原理证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

证 因为 $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}>0$, 所以对任何自然数 p 有

$$
\begin{aligned}
&|s_{n+p}-s_n| \\
=&\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| \\
=&\begin{cases}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\frac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数}, \\ \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right), & p\text{ 为偶数},\end{cases} \\
=&\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}.
\end{aligned}
$$

进一步, 当 p 是奇数时,

$$
\begin{aligned}
|s_{n+p}-s_n|&=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) \\
&<\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

当 p 是偶数时,

$$
\begin{aligned}
|s_{n+p}-s_n|=&\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \\
&-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p} \\
<&\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

对 $\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时总成立

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理, 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

根据 Cauchy 收敛原理逆否命题也可以证明级数的发散性, 此时逆否命题的陈述为, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散的充分必要条件是: $\exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall N, \exists n>N, \exists$ 正整数 p, 使得

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 8.7　用 Cauchy 收敛原理证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证　对任意正整数 n,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\underbrace{\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}}_{\text{共 } p \text{ 项}}=\frac{p}{n+p},$$

因此存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$, 对 $\forall N$, 取 $n=N+1>N$, 取 $p=n$, 就有

$$|s_{n+p}-s_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\geqslant\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

注 8.2　Cauchy 收敛原理从理论上来看是十分完美的, 然而在具体的问题中直接利用它来判断级数的收敛性却相当困难, 因此还需建立一系列新的判别准则. 后面几节将进一步解决此问题.

习　题　8.1

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n-1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{7^{2n}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}$.

2. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2n-1}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n-1)x$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.

3. 利用 Cauchy 收敛原理判别下列级数的敛散性:

(1) $a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n+\cdots$, 其中 $|q|<1, |a_n|\leqslant A(n=0,1,2,\cdots)$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\sin nx\ |r|<1$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx\ |r|<1$.

5*. 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$(即每一项 $u_n\geqslant 0$), 证明若对其项加括号后所组成的级数收敛, 则它本身也收敛.

8.2 上极限与下极限

8.2.1 数列的上极限与下极限

为了进一步建立级数敛散判别法, 先介绍一个原属于极限论范围的内容, 即数列的上极限和下极限, 它们是极限概念的拓广, 为研究数列和级数敛散性开拓新的思路.

在极限续论中知, 有界数列必有收敛子列 (列紧性定理). 一个有界数列的所有收敛子列中, 极限值最大者与极限值最小者尤为重要, 它们在一定程度上反映了该数列振荡变化趋势的规律, 分别称为数列的**上极限和下极限**. 如数列 $x_n=1+(-1)^n:0,2,0,2,\cdots$, 其上极限为 2, 下极限为 0; 而数列 $x_n=(-1)^n$ 的上极限是 1, 下极限是 -1. 数列上、下极限这个描述性的定义, 虽然直观, 但不够严密, 我们将采用下面的方式定义数列的上、下极限.

设数列 $\{u_n\}$ 有界, 去掉前 k 项后的数列 $\{u_n\}(n>k):u_{k+1},u_{k+2},\cdots,u_k,\cdots$ 仍为有界数列, 由确界原理知, 数列 $\{u_n\}(n>k)$ 有上、下确界, 令

$$\alpha_k=\inf_{n>k}\{u_k\}=\inf\{u_{k+1},u_{k+2},\cdots\},$$

$$\beta_k=\sup_{n>k}\{u_k\}=\sup\{u_{k+1},u_{k+2},\cdots\},$$

则

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\alpha_k\leqslant\cdots\leqslant\beta_k\leqslant\cdots\beta_2\leqslant\beta_1,$$

即数列 $\{\alpha_k\}$ 单调增加有上界; 数列 $\{\beta_k\}$ 单调减少有下界. 于是, 当 $k\to+\infty$ 时, $\{\alpha_k\}$ 与 $\{\beta_k\}$ 均有极限.