XIANDAI KONGZHI LILUN

现代控制理论

贾 立 邵定国 沈天飞 编著

上海大学出版社

现代控制理论

贾 立 邵定国 沈天飞 编著

上海大学出版社
·上 海·

内 容 提 要

"现代控制理论"课程是自动化、电气工程及自动化专业的重要专业课。现代控制理论系统研究状态空间模型的建立，以及系统的分析和综合。本书主要讲述线性控制系统的时域理论与方法，并从动态系统的建模、分析与综合三个方面系统地介绍现代控制理论的基本概念和方法。全书共六章，内容包括：动态系统的输入/输出模型、状态空间模型；线性系统的定量分析法和线性系统的定性分析法（包括稳定性、能控性和能观测性）；线性系统的综合和控制方法（包括稳定化法、极点配置法、跟踪问题及观测器的理论和方法）；MATLAB 仿真实验等。

本书可作为高等工科院校自动控制及相近专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供广大科研工作者、工程技术人员以及高等院校教师参考或自学。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/贾立，邵定国，沈天飞编著. —上海：上海大学出版社，2013.3

ISBN 978-7-5671-0569-0

Ⅰ.①现… Ⅱ.①贾… ②邵… ③沈… Ⅲ.①现代控制理论 Ⅳ.①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 291592 号

责任编辑 王悦生 封面设计 柯国富

现代控制理论

贾 立 邵定国 沈天飞 编著

上海大学出版社出版发行

（上海市上大路 99 号 邮政编码 200444）

（http://www.shangdapress.com 发行热线 021—66135112）

出版人：郭纯生

*

南京展望文化发展有限公司排版

江苏省句容市排印厂印刷 各地新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 11 字数 247,500

2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

印数：1～2100

ISBN 978-7-5671-0569-0/O·065 定价：25.00 元

前言

“现代控制理论”课程是自动化、电气工程及自动化专业的重要专业课。现代控制理论系统研究状态空间模型的建立，以及系统的分析和综合。课程与工程实际问题有着紧密的联系，广泛应用于机械、电力电气、化工、通信网络、生物医药和航空航天等一系列对国民经济和国防安全有重大影响的领域。本书主要讲述线性控制系统的时域理论与方法，并从动态系统的建模、分析与综合三个方面系统地介绍现代控制理论的基本概念和方法。

本书注重基本概念、基本原理和基本方法。以“实际问题、命题归纳、解决思路、具体方法、仿真研究、实例应用、存在的问题”这样一条主线，采用从简单到复杂、从特殊到一般的演绎方法来介绍内容，力求通俗易懂，避免繁琐的数学推导。在教材中把抽象的理论和工程实际紧密结合起来，力求使学生感到学习现代控制理论非常有用、非常接近当今世界科学研究的最前沿。并且，在本书中广泛使用 MATLAB 系统仿真软件，对每章节的内容配备 MATLAB 仿真实例和 MATLAB 仿真习题，方便、有效地通过计算机仿真来验证系统分析和设计的效果，加深学生对概念、性质、算法的理解，并能够加以应用。本书结构清楚、层次分明、重点突出，注重基本概念、基本原理和基本方法，在内容上以基本的分析和设计问题为主。

本书可作为高等工科院校自动控制及相近专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供广大科研工作者、工程技术人员以及高等院校教师参考或自学。

本书是在编著者结合长期从事自动控制理论教学和科研工作的经验上完成的，共六章，第一、四、六章由贾立编著，第二、三章由邵定国编著，第五章由沈天飞编著。本书的出版得到了上海大学重点教材项目的资助，在此谨表谢意。感谢研究生杨甜、袁凯、李训龙、秦翠翠为本书的编写所付出的辛勤劳动。感谢上海大学出版社为本书的出版所做的工作，没有他们耐心细致的工作，本书的出版不可能如此顺利。

由于编者学识有限，书中的有些观点和提法，难免有不妥之处。恳请广大同行、读者给予批评指正。

编　者

2013 年 2 月 18 日

目　录

第一章　绪　　论　1

1.1　控制科学的发展 …… 1
1.2　现代控制理论概述 …… 1
1.3　本书的内容安排 …… 3

第二章　系统状态空间描述　5

2.1　状态和状态空间 …… 5
　2.1.1　系统描述 …… 5
　2.1.2　定义 …… 6
2.2　线性定常连续系统的状态空间表达式 …… 8
　2.2.1　由物理学模型方程直接建立状态空间表达式 …… 8
　2.2.2　由系统微分方程建立状态空间表达式 …… 13
　2.2.3　由传递函数建立状态空间表达式 …… 21
2.3　传递函数矩阵 …… 28
2.4　应用 MATLAB 的系统状态空间表达式建立 …… 30
　2.4.1　传递函数的输入 …… 30
　2.4.2　状态空间模型的输入 …… 31
　2.4.3　模型的转换 …… 32
　2.4.4　求传递函数矩阵 …… 34
习题 …… 35

第三章　线性系统的运动分析　37

3.1　线性定常系统齐次方程的解 …… 38

3.2 状态转移矩阵 …… 39
3.2.1 状态转移矩阵的性质 …… 40
3.2.2 状态转移矩阵的计算 …… 44
3.3 非齐次状态方程的解 …… 55
3.3.1 积分法 …… 55
3.3.2 拉普拉斯变换法 …… 56
3.4 应用MATLAB的系统运动分析 …… 58
3.4.1 单位阶跃响应 …… 58
3.4.2 脉冲响应 …… 59
3.4.3 任意输入信号响应 …… 60
3.4.4 线性齐次状态方程的解 …… 61
3.4.5 线性非齐次状态方程的解 …… 62
习题 …… 63

第四章 系统的能控性和能观性分析 65
4.1 能控性及其判据 …… 65
4.1.1 能控性的定义 …… 65
4.1.2 线性定常系统的能控性判据 …… 66
4.1.3 规范型系统的能控性判据 …… 72
4.1.4 线性定常系统的输出能控性 …… 75
4.2 能观性及其判据 …… 76
4.2.1 能观性的定义 …… 76
4.2.2 线性定常系统的能观性判据 …… 77
4.2.3 规范型系统的能观性判据 …… 79
4.3 对偶性原理 …… 80
4.4 线性定常系统的线性变换 …… 82
4.4.1 能控规范型 …… 82
4.4.2 能观规范型 …… 85
4.4.3 对角线型 …… 86
4.4.4 约当型 …… 86
4.4.5 非奇异线性变换的不变特性 …… 89
4.5 线性定常系统的结构分解 …… 90

4.5.1 能控性分解 …… 90
4.5.2 能观性分解 …… 92
4.5.3 系统结构的规范分解 …… 93
4.6 基于传递函数的能控性和能观性判断 …… 98
4.7 应用 MATLAB 的系统能控性、能观性分析 …… 98
习题 …… 103

第五章 控制系统的稳定性分析 105

5.1 外部稳定性和内部稳定性 …… 106
5.1.1 外部稳定性 …… 106
5.1.2 内部稳定性 …… 108
5.1.3 内部稳定性和外部稳定性的关系 …… 109
5.2 李雅普诺夫稳定性的基本概念 …… 110
5.2.1 平衡状态 …… 110
5.2.2 李雅普诺夫稳定性的定义 …… 112
5.3 李雅普诺夫第一法 …… 114
5.4 李雅普诺夫第二法 …… 117
5.4.1 能量函数 …… 117
5.4.2 李雅普诺夫第二法的主要定理 …… 120
5.5 李氏直接法在线性定常连续系统中的应用 …… 126
5.6 李氏直接法在非线性连续系统中的应用 …… 129
5.6.1 克拉索夫斯基方法 …… 130
5.6.2 变量梯度法 …… 132
5.7 应用 MATLAB 的系统稳定性分析 …… 135
习题 …… 137

第六章 线性反馈系统的综合 138

6.1 线性反馈系统的基本结构及其特性 …… 138
6.1.1 状态反馈系统 …… 138
6.1.2 输出反馈系统 …… 139
6.1.3 反馈对系统性能的影响 …… 140

6.2 极点配置问题 …… 145
6.2.1 极点配置的条件 …… 146
6.2.2 极点配置状态反馈控制器的设计算法 …… 147
6.3 状态观测器 …… 149
6.3.1 全维状态观测器的设计 …… 150
6.3.2 含有状态观测器的状态反馈控制系统 …… 154
6.4 降维观测器 …… 157
6.5 应用MATLAB的线性反馈系统综合 …… 160
习题 …… 167

参考文献 168

第一章　绪　论

1.1　控制科学的发展

在现代科学技术的众多领域中，自动控制技术起着越来越重要的作用。自动控制是指在没有人直接参与的情况下，利用外加的控制装置或控制器，使被控对象的某个工作状态或参数自动地按照预定的规律运行。控制科学是20世纪最重要的科学理论和成就之一，在科技进步中起到了举足轻重的作用，为解决科技发展的许多挑战性问题提供了前瞻性的思想方法论。

经过长期的发展，自动控制理论主要分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。经典控制理论的数学基础是拉普拉斯(Laplace)变换，基本的数学模型为传递函数，研究对象是单输入、单输出的系统，特别是线性定常系统，其特点是以输入输出特性(主要是传递函数)为系统数学模型，采用频率响应法分析系统性能和设计控制装置。与经典控制理论相比，现代控制理论能处理的控制问题要广泛得多，包括线性系统和非线性系统，定常系统和时变系统，单变量系统和多变量系统，对控制系统的分析和设计主要是通过对系统的状态变量的描述来进行的，即状态空间法。状态空间法本质上是一种时域的方法，它不仅描述了系统的外部特性，而且描述和揭示了系统内部状态和性能，更适合于在数字计算机上进行。

目前，自动控制理论还在继续发展，正向以控制论、信息论、仿生学为基础的智能控制理论深入。

1.2　现代控制理论概述

20世纪60年代初期，在航空航天技术的推动下，并且随着现代应用数学新成果的推出和电子计算机的应用，自动控制理论跨入了一个新阶段：现代控制理论。美国学者贝尔曼于1954年创立了动态规划，并在1956年应用于控制过程中，解决了空间技术中出现的复杂控制问题，并开拓了最优控制理论。1958年苏联科学家庞特里亚金提出了极大

值原理的综合控制系统新方法。1960 年，美国学者卡尔曼(R. E. Kalman)把状态空间法系统地引入控制理论中，提出了能控性和能观性的概念，对揭示和认识控制系统的许多重要特性具有关键的作用，已成为控制理论的两个最基本的概念。随着这些重要成果的提出，到 20 世纪 60 年代初期，一套以状态空间法、极大值原理、动态规划、卡尔曼滤波为基础的分析和设计控制系统的新的原理和方法已经确立，标志着现代控制理论的形成。

与经典控制理论相比，现代控制理论在系统数学模型描述形式、研究对象、采用的数学工具、分析设计方法等方面具有自己特色，如表 1-1 所示。

表 1-1　经典控制理论和现代控制理论对比

	经典控制理论	现代控制理论
适用系统	单输入单输出系统、线性系统、定常系统	多输入多输出系统、线性/非线性系统、定常/时变系统
描述方法	传递函数、微分方程	状态方程
数学工具	拉普拉斯变换、傅里叶变换、Z 变换	线性代数、微分方程
设计方法	频域方法、图解法为主，试凑法	时域方法、解析法、最佳设计

(1) 从研究的对象来看，经典控制理论主要是针对单输入单输出系统，特别是线性定常系统；而现代控制理论可同时适用于单输入单输出系统和多输入多输出系统、线性系统和非线性系统、定常系统和时变系统，大大扩充了处理问题的领域。

(2) 从描述系统的数学模型来看，经典控制理论常采用只描述系统输入与输出关系的传递函数，即外部输入输出描述，不能描述系统内部状态的信息；而现代控制理论在输入输出的基础上引入了状态变量和状态空间的概念来描述系统的内部状况，是对系统完整的描述，能够充分揭示系统的全部运动状态。

(3) 从数学基础和设计方法来看，经典控制理论的数学基础是拉普拉斯变换、傅里叶变换和 Z 变换，主要的分析和综合方法是频率响应法和根轨迹法，其实质是试凑法，不能达到某种意义下的最优性能，是一种复频域方法；而现代控制理论以线性代数和微分方程为数学基础，采用状态空间分析方法，在进行设计时有更大的自由度，可以进行最优控制系统设计，是一种时域方法。

现代控制理论所包含的学科内容十分广泛，主要有线性系统理论、非线性系统理论、最优控制理论和随机控制理论等。

(1) 线性系统理论。线性系统理论是系统与控制理论中最为成熟和最为基础的一个组成分支，主要研究线性系统中状态的控制和观测问题，其基本的分析和综合方法是状态空间法。根据所采用的数学工具和系统描述的不同，线性系统理论可分为四个学派：线性系统的状态空间法、线性系统的几何理论、线性系统的代数理论和多变量频域法。

(2) 非线性系统理论。非线性系统理论的研究对象是非线性现象，它反映出非线性系统运动本质的一类现象，如频率对振幅的依赖性、多值响应和跳跃谐振、分谐波振荡、自激振荡、频率插足、异步抑制、分岔和混沌等，这些不能采用线性系统的理论来解释。非线性系统的一个最重要的特性是不能采用叠加原理来进行分析，这就决定了在研究上

的复杂性。从20世纪70年代中期以来，由微分几何理论得出的某些方法为分析某些类型的非线性系统提供了有力的理论工具，但至今还没有一种通用的方法可用来处理所有类型的非线性系统。

(3) 最优控制理论。最优控制理论所研究的问题可以概括为：对一个受控的动力学系统或运动过程，从一类允许的控制方案中找出一个最优的控制方案，使系统的运动在由某个初始状态转移到指定的目标状态的同时，其性能指标值为最优。最优控制理论是研究和解决从一切可能的控制方案中寻找最优解的一门学科，用于综合最优控制系统的主要方法有极大值原理和动态规划。

(4) 随机控制理论。随机控制理论的目标是解决随机控制系统的分析和综合问题。维纳滤波理论和卡尔曼-布什滤波理论是随机控制理论的基础之一。随机控制理论的一个主要组成部分是随机最优控制，这类随机控制问题的求解有赖于动态规划的概念和方法。

1.3 本书的内容安排

本书共六章，内容包括：系统状态空间模型(包括系统的状态响应、输出响应、模型转换)；线性系统的定量分析法和线性系统的定性分析法(包括稳定性、能控性和能观性)；线性系统的综合和控制方法(包括极点配置法、状态反馈、状态观测器的理论和方法)；MATLAB仿真实验等，内容结构如图1-1所示。

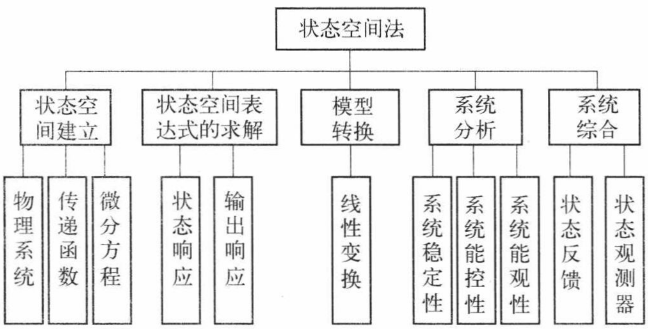

图1-1 本书内容安排

具体安排如下：

第二章：系统状态空间描述，主要介绍系统的状态空间的概念，通过从物理学直接方法、微分方程、传递函数转换的方法建立系统的状态空间，并介绍了应用MATLAB相关函数建立状态空间；

第三章：线性系统的运动分析，主要介绍系统的定量分析，即对系统运动的精确分析，是从状态空间描述出发，研究由输入激励作用和初始状态条件下的状态响应或输出响应，为分析系统的运行形态、轨迹和性能行为提供基础，并介绍了应用MATLAB相关函数进行线性系统的运动分析；

第四章：系统的能控性和能观性分析，主要介绍能控性与能观性的定义，给出相应的判据，并介绍了应用 MATLAB 相关函数判别系统的能控性与能观性；

第五章：系统的稳定性分析，主要介绍内部稳定性、外部稳定性等系统稳定性理论的一些基本概念、定义和判别方法，然后详细介绍李雅普诺夫关于稳定性的定义、李雅普诺夫第二法及其在各类系统中的应用；

第六章：线性反馈系统的综合，主要介绍线性系统的综合和控制方法，包括极点配置法、跟踪问题及观测器的理论和方法，并介绍应用 MATLAB 相关函数设计系统。

第二章 系统状态空间描述

系统的状态空间描述是现代控制理论的基础，状态空间概念的引入揭开了现代控制理论的序幕。本章介绍了系统状态空间的概念，通过从物理学直接方法、微分方程、传递函数转换的方法建立系统的状态空间，并介绍了应用 MATLAB 相关函数建立状态空间。本章的内容将是随后几章学习的基础。

2.1 状态和状态空间

2.1.1 系统描述

对于控制系统的研究不外乎分析和综合两方面的工作，分析即是已知被控对象系统模型参数、输入条件，求输出响应；综合是已知输入、输出要求，设计系统的控制方案、结构、参数等。两者皆离不开系统被控对象的数学模型，对数学模型的描述方法不同导致了不同的控制方案和控制结果。

系统的描述如图 2-1 所示，有三类变量，其中 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 为 p 维输入变量，$y_1, y_2, \cdots, y_q$ 为 q 维输出变量，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 维系统内部变量。不失一般性，输入、输出和内部变量可以不同维。

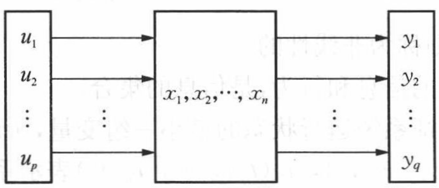

图 2-1 被控过程

1. 系统的外部描述

外部描述也称为输入输出描述，把系统对象在此看作一个“黑箱”，只考虑了输入和输出的动态因果关系，内部结构和信息可能无法知道，但是对于外部的输入输出变量，总

是可以量测的。在经典控制理论中，反映系统外部描述的方法有单变量高阶线性常系数微分方程和传递函数。

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u \tag{2-1}$$

其中 $y^{(i)}\triangleq\dfrac{\mathrm{d}^iy}{\mathrm{d}t^i}(i=1,2,\cdots,n)$，$u^{(j)}\triangleq\dfrac{\mathrm{d}^ju}{\mathrm{d}t^j}(j=1,2,\cdots,n-1)$。

如果在初始条件为零的情况下对上述微分方程取拉普拉斯变换，即可得到系统的传递函数：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\quad (s\text{ 为复变量}) \tag{2-2}$$

此外，由于传递函数描述是建立在零初始条件的前提下的，故不能包含系统的全部信息。在分析设计多变量和时变系统中，经典控制理论会遇到很大的困难。

2. 系统的内部描述

内部描述是基于系统内部结构和信息的一种描述方法，在输入输出的基础上引入了状态变量和状态空间的概念来描述系统的内部状况，是对系统完整的描述。内部描述包括两个数学方程，第一个方程是描述系统输入对内部状态变量的因果关系，对连续时间系统表现为一阶微分方程，对离散时间系统表现为一阶差分方程，称为状态方程；另一个方程描述了系统输入和内部状态变量对系统输出的因果关系，表现为一阶代数方程，称为输出方程。它可研究单输入单输出系统(single-input single-output，SISO)，也可研究多输入多输出系统(multi-input multi-output，MIMO)。

2.1.2 定义

输入和输出 又称系统的激励和量测。

线性 一个零初始条件的系统，当且仅当对任何输入 u_1 和 u_2 及任意常数 α，均满足

$$H(u_1+u_2)=Hu_1+Hu_2\quad(\text{可加性}) \tag{2-3}$$

$$H(\alpha u_1)=\alpha H(u_1)\quad(\text{齐次性}) \tag{2-4}$$

则该称系统为线性的，否则称为非线性的。

状态 表征系统运动的信息和行为，是信息的集合。

状态变量 指完全表征系统运行状态的最小一组变量，所谓完全表征是指：

(1) 在初始时刻 $t=t_0$，$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，$\cdots$，$x_n(t_0)$表示系统在该时刻的状态；

(2) 当 $t\geqslant t_0$ 时的输入 $u(t)$给定，且上述初始状态确定时，状态变量能完全确定系统在 $t\geqslant t_0$ 时的行为和信息。

最小性体现在状态变量 $x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，$\cdots$，$x_n(t_0)$是完全表征系统行为的最少个数的状态变量，减少变量个数将破坏表征系统行为的完整性，增加变量个数是完全表征系统行为所不需要的。

状态向量　一个系统如有 n 个独立的状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$，把它们用作分量构成的向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 称为状态向量，即

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix} \tag{2-5}$$

状态向量不是唯一的，由于系统中表征状态的变量数大于 n 个，当中仅有 n 个是线性无关的，选取不同的状态变量就导致状态向量之间的不唯一性。任意选取两组状态向量，它们之间必存在着线性非奇异变换的关系。

状态空间　以状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间，状态向量即状态空间的一个点。当系统给定了初始状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$，意味着在状态空间中有了一个初始点，当随着时间的进展，$\boldsymbol{x}(t)$ 在状态空间描绘出一条轨迹，称为状态轨迹。

状态方程　把系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 与输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 之间的关系用一组一阶微分方程组来描述，称为状态方程。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2-6}$$

输出方程　把系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 与状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$、输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 之间的关系用一个代数方程描述，称为输出方程。

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2-7}$$

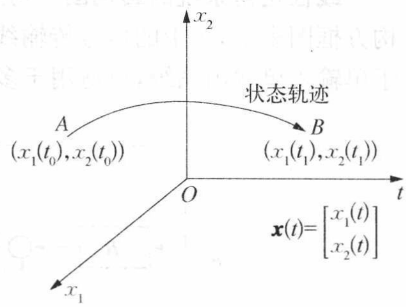

图 2-2　状态空间和状态轨迹

状态空间表达式　状态方程和输出方程构成了对一个系统动态行为的完整描述，称为系统的状态空间表达式。

线性系统的状态空间表达式　如果系统的状态方程(2-6)和输出方程(2-7)中的所有组成元都是变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ 和 $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_p(t)$ 的线性函数，则称该系统为线性系统。线性系统的状态空间表达式可表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)\end{cases} \tag{2-8}$$

不失一般性，假设状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维，输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 为 p 维，输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 为 q 维。

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\\vdots & & \vdots\\a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix}b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t)\\\vdots & & \vdots\\b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t)\end{bmatrix}_{n\times p}$$

$$C(t)=\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}_{q\times n},\ D(t)=\begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}_{q\times p}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$描述了系统内部状态变量之间的关系，称为系统矩阵、状态矩阵或系数矩阵；$\boldsymbol{B}(t)$描述了输入与状态变量之间的关系，称为控制矩阵或输入矩阵；$\boldsymbol{C}(t)$描述了输出如何反映状态变量的关系，称为观测矩阵或输出矩阵；$\boldsymbol{D}(t)$描述了输入对输出的直接关系，称为前馈矩阵或输入输出矩阵。

线性定常系统的状态空间表达式　如果线性系统的状态空间表达式(2-8)中，矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$的各个元素都是与时间 t 无关的常数，则称该系统为线性时不变系统或线性定常系统。通常用如下状态空间表达式来表示：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{2-9}$$

线性定常系统的结构图　与经典控制理论类似，状态空间描述可用图 2-3 所示的结构方框图表示，图中的信号传输线一般代表列向量，方框中的字母代表矩阵。不仅适用于单输入单输出系统，也适用于多输入多输出系统。

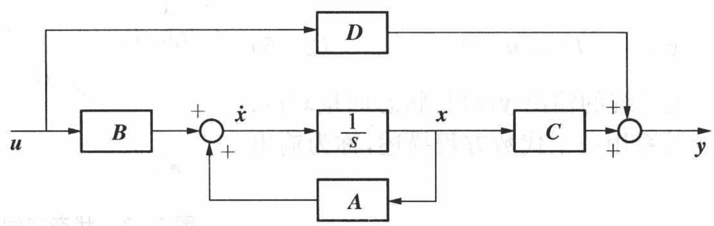

图 2-3　线性定常系统结构图

2.2　线性定常连续系统的状态空间表达式

状态空间描述是现代控制理论的基础，它使得控制系统的研究从以传递函数为基础的频域法又回到时域法。对一个系统的控制和研究首先要建立状态空间描述，状态空间表达式的建立可通过从物理学模型直接建立、根据系统微分方程建立和根据系统传递函数建立。

2.2.1　由物理学模型方程直接建立状态空间表达式

1. 电路系统状态空间描述示例

例 2.1　求如图 2-4 所示的 RLC 回路的状态空间表达式。

解　分析：此电路是经典二阶系统，有两个储能元件，应该选取两个状态变量。而有

明确物理意义的常用变量有：电阻的电压与电流、电容的电压与电荷、电感的电流与磁通，可见描述物理概念的变量要比状态变量的个数要多。根据独立性要求，电阻的电压与电流、电容的电压与电荷、电感的电流与磁通这三组变量不能同时选作为系统的状态。

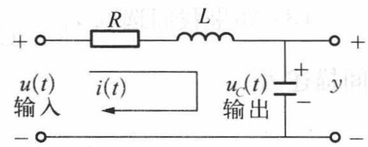

图 2-4　RLC 电路

我们首先以 $i(t)$ 作为中间变量，由 KVL 定理可得

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u(t) \\ u_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\mathrm{d}t \end{cases}$$

(1) 选取电感电流 i 和电容电压 u_C 为状态变量，即 $x_1 = i$，$x_2 = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\mathrm{d}t$，则上述方程(2-6)可化成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 \\ y = x_2 = u_C(t) \end{cases}$$

写成矩阵-向量的形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

这两个方程构成了系统的状态空间描述。其中，第一个方程描述了电路的状态变量和输入量之间的关系，称为该电路的状态方程，这是一个矩阵微分方程；如果将电容上的电压作为电路的输出量，则第二个方程是联系输出量和状态变量关系的方程，称为该电路的输出方程或观测方程，这是一个矩阵代数方程。

(2) 由于系统描述的变量有很多，我们可以选取不同的状态向量。如选取 $x_1 = i$，$x_2 = \displaystyle\int i\mathrm{d}t$ 为系统状态变量，则此系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$