

高精度算法 与小波多分辨分析

GAOJINGDU SUANFA
YU XIAOBO
DUOFENBIAN FENXI

王保国 朱俊强 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

013023841

0241
307

高精度算法与小波 多分辨分析

王保国 朱俊强 著



国防工业出版社

· 北京 ·



北航

C1630752

0241
307

内 容 简 介

本书是关于高精度、高分辨率、高效算法以及小波多分辨分析方面的一部专著。全书分2篇8章,主要讨论:高精度、高分辨率差分离散算法;有限体积和RKDG有限元高分辨率与高精度方法;可压缩湍流的RANS与DES分析法;高分辨率算法在高超声速再入飞行问题中的应用;小波多分辨奇异分析方法;基于小波尺度函数的WSK-SV算法;小波神经网络以及智能优化算法;基于Nash-Pareto策略的多目标优化算法及其拓展。该书的主要特点是:重概念、重原理、重方法、重实用,强调在系统的框架下去发展数值优化设计与高精度算法;全书始终坚持少而精的基本原则。

本书可作为流体力学专业硕士生与博士生的学位基础课程教材,也可作为航空、航天、动力能源与工程热物理以及数学力学等领域研究与设计人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高精度算法与小波多分辨分析 / 王保国, 朱俊强著. —北京:
国防工业出版社, 2013.3

ISBN 978-7-118-08592-1

I. ①高... II. ①王... ②朱... III. ①数值计算 ②小波
理论 IV. ①O241 ②O174.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第031579号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷责任有限公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 13¼ 字数 250 千字

2013年3月第1版第1次印刷 印数 1—3000册 定价 48.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

随着人类航空、航天事业的不断飞速发展,20 世纪 60 年代诞生了计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)这门新兴学科。一些文献中,常将 CFD 研究的内容用 Machine、Mesh、Method、Mechanism、Mapping 与 Application 概括,并简称为 5 个 M 与 1 个 A。可以把 5 个 M 比作人的 5 个手指,它们握在一起便形成了拳头,就可以去解决各种各样的流动问题。这种概括是恰当的。事实上,CFD 在过去 50 年的发展历程中,5 个 M 在不断地壮大,1 个 A 在不断地拓广与延伸。

计算流体力学的发展非常迅速,它所涉及的问题十分广泛。但数值方法,尤其是高精度、高分辨率算法始终是 CFD 研究的重要内容,本书的选材正是紧扣了这个方向。全书分 2 篇 8 章:第 1 篇为高精度、高分辨率算法及其应用,包括 4 章。前 3 章主要涵盖了高精度差分方法、高效高分辨率有限体积法、高精度 RK-DG 有限元法以及可压缩湍流的 RANS 与 DES 分析法等内容,其中 3.8 节为 RANS 计算与 DES 区域分析法相结合的高效算法及其应用,给出了 6 个典型算例的 63 个计算工况,这 6 个典型算例包括:①美国第一代载人飞船 Mercury;②美国第二代载人飞船 Gemini;③两种高升阻比的 Waverider(乘波体);④新型通用航空航天器 CAV;⑤具有丰富风洞实验数据(来流马赫数从 0.50 变化到 2.86)的 NASA Langley 巡航导弹;⑥人类第一枚访问火星的 Fire-II 探测器,计算的来流马赫数为 16,来流速度为 4950m/s。显然,如此贴近工程实际的算例,深化了人们对采用 RANS 计算与 DES 区域分析法去解决实际问题的认识。第 4 章为两个飞行速度更高、需要细致考虑热力学非平衡与化学反应非平衡时的典型外流算例:一个选取了 Apollo 飞船返回舱再入地球大气层的 6 个工况,其中飞行马赫数从 22.63 变化到 15.52;另一个选取了 Huygens 探测器进入土卫六大气层的 6 个工况,其飞行马赫数从 24.47 变化到 17.29。因为这两个算例的流场属于热力学非平衡与化学非平衡状态,考虑到非平衡态本身的复杂性,在计算时仅采用了高分辨率算法而没有引入高于二阶精度的模块(即三阶及三阶以上计算精度的模块在上述两个算例中没有使用)。这里应当指出,如此复杂的 12 个

工况计算目前是很难在其他书中看到的。第2篇为小波多分辨分析以及 Nash - Pareto 优化策略,包括4章。第5章为小波多分辨分析方法及其应用,该章着重介绍了二维与三维张量积小波的多分辨分析;另外,为度量流场物理参数的奇异性,本章引进了多维空间中的 Hölder 指数。显然,这些内容十分新颖。此外,第5章还选用了7个内流与翼型绕流方面国际上的著名算例,其中包括叶轮机机械中 NASA Rotor37 跨声速轴流压气机转子三维流场的计算与 NASA Rotor 67 跨声速风扇转子三维流场的计算算例。在上述7个典型算例中,流场中的奇异区域采用了五阶 WENO 格式,而流场中的光滑区域采用了四阶中心差分格式。毫无疑问,这些复杂的著名算例充分展示了这类新算法的高效与实用性。第6章为基于小波尺度函数的 WSK - SV 算法及其应用,这种算法将小波的尺度函数与 SV 算法相结合,提出了一类新型的 WSK - SV 算法,该算法充分利用了 Daubechies 小波函数的紧支集与正交性以及小波的多分辨分析等特点,注意了尺度核函数能够满足 Mercer 条件。第7章为小波神经网络以及智能优化算法,详细给出了一类小波神经网络的一般结构模型以及基本算法;还给出了响应面方法的数学表述以及小波神经网络与响应面方法之间的比较与分析。第8章为基于 Nash - Pareto 策略的多目标优化算法及其拓展,这是目前多目标、多设计变量优化领域中非常重要的一类算法;自2008年我们在《航空动力学报》第23卷第2期上发表这类方法以来备受读者们的关注,为此在这章中分10个小问题进行了较详细的表述并在8.8节中给出了一台航空发动机压气机进行三维叶片数值优化的全过程。此外,书中还特意在8.9节与8.10节概述了钱学森先生创立的系统学思想以及吴仲华先生提出的能量系统与科学用能的策略;概述了科学分析和工程设计中广泛遇到的正、反两大类问题所采用的数值方法与策略。显然,将上述这些新型优化算法纳入与融合(fusion)“系统”的计算与分析框架,是很难在其他计算流体力学专著中看到的。书中特别提倡在上述“系统”的框架下发展相关部件的集成、整合以及优化设计与高精度、高分辨率算法,以便使系统达到“安全、高效、经济、环保”的整体目标,向着节约能源、保护环境、净化人类生存的空间、为子孙后代造福的可持续发展方向迈进。面对书中所涉及的十分丰富的计算方法和典型算例,少而精、重概念、重原理、重方法、重实用始终是全书坚持的基本原则。

两位作者对童秉纲院士、陈懋章院士和陶文铨院士长期以来所给予的大力支持和帮助表示衷心的感谢。向书中参考文献里所列出的作者以及合作团队的

同仁们表示谢意。

本书的第一作者还特别对卞荫贵先生和吴仲华先生表示深深的怀念。感谢卞先生生前对他长达 27 年的培养与指导,感谢吴先生和陈乃兴先生将他领进工程热物理学科和气动热力学数值计算的大门。

由于高精度问题 and 多维小波多分辨分析难度很大,对于这样一个新的领域,许多问题还需要进一步的认识与完善,加之两位作者学识有限,因此对书中的疏漏和不足之处,敬请读者和专家批评与指正。E-mail: hoafamme@sina.cn。

作者

2012 年 10 月 16 日

目 录

第 1 篇 高精度、高分辨率算法及其应用

第 1 章 高精度、高分辨率差分离散算法	3
1.1 TVD 的概念以及 Harten 构造的二阶格式	3
1.2 高精度 ENO 和加权 ENO 格式	5
1.3 紧致格式、强紧致高精度格式以及优化的 WENO 格式	12
1.4 保持色散关系以及格式的优化问题	25
第 2 章 有限体积和 RKDG 有限元高分辨率与高精度方法	40
2.1 有限体积法中黏性项与传热项的计算	40
2.2 有限体积法中的高效率 LU 以及 Gauss-Seidel 算法	44
2.3 非结构网格下有限体积的 Gauss-Seidel 迭代法	48
2.4 非结构网格下有限体积法的双时间步长迭代格式	51
2.5 高精度高分辨率 RKDG 有限元方法	52
第 3 章 可压缩湍流的 RANS 与 DES 分析法	59
3.1 数值解的精度与耗散、色散行为间的关系	60
3.2 物理尺度与网格尺度、激波厚度与湍流结构	61
3.3 基于 Favre 平均的可压缩湍流方程组	62
3.4 可压缩湍流的大涡数值模拟及其控制方程组	64
3.5 RANS 与 LES 组合杂交方法的概述	67
3.6 关于 RANS、DES 以及 LES 方法中 ν_T 的计算	69
3.7 可压缩湍流中的 $k-\omega$ 模型	70
3.8 RANS 计算与 DES 区域分析相结合的高效算法及其应用	72
第 4 章 高分辨率算法在高超声速再入飞行问题中的应用	93
4.1 高温高速流动时的广义 Navier-Stokes 方程	93
4.2 高温高速流场中壁面热平衡边界条件	96
4.3 求解高温高速流场的高分辨率算法以及源程序	96

4.4	Apollo 再入地球大气层 6 种工况时三维流场的计算	96
4.5	Huygens 探测器进入土卫六大气层 6 种工况三维流场的计算	108
4.6	高温高速非平衡连续流场计算的初步分析与结论	119

第 2 篇 小波多分辨分析以及 Nash-Pareto 优化策略

第 5 章	小波多分辨奇异分析方法及其典型算例	123
5.1	在多维空间中 Hölder 指数的计算	123
5.2	二维张量积小波分析	124
5.3	三维张量积小波分析	125
5.4	Hölder 指数计算的具体实施过程	128
5.5	小波多分辨奇异分析的流场计算新方法	128
5.6	用小波多分辨奇异分析法计算二维前台阶绕流问题	130
5.7	用小波多分辨奇异分析法计算二维双马赫反射问题	133
5.8	用小波多分辨奇异分析法计算著名的二维 Riemann 初值问题	135
5.9	用小波多分辨奇异分析法计算跨声速 RAE2822 翼型的二维绕流问题	137
5.10	用小波多分辨奇异分析法计算二维跨声速 VKI - LS59 涡轮叶栅的绕流流动	138
5.11	用小波多分辨奇异分析法计算 NASA Rotor 37 跨声速轴流压气机转子的三维流场	139
5.12	用小波多分辨奇异分析法计算 NASA Rotor 67 跨声速风扇转子的三维流场	146
第 6 章	基于小波尺度函数的 WSK - SV 算法及其应用	150
6.1	SV 算法以及凸二次规划	150
6.2	回归问题的决策函数	151
6.3	Daubechies 小波以及尺度核函数	152
6.4	WSK-SV 算法及其基本结构	155
6.5	WSK-SV 算法的典型算例与分析	155
第 7 章	小波神经网络以及智能优化算法	159
7.1	小波神经网络的一种基本结构模型	159
7.2	小波函数的选择	161
7.3	小波神经网络的能量函数以及网络训练算法	162
7.4	用 WNN 法数值优化三维叶片	163

7.5	用 WNN 法数值优化导弹控制射流元件	165
7.6	响应面方法的数学表述	169
7.7	小波神经网络方法与响应面方法的比较与分析	170
第 8 章	基于 Nash-Pareto 策略的多目标优化算法及其拓展	173
8.1	参数化设计空间以及 Nash 系统分解法	174
8.2	确定权重的一种新方法	176
8.3	改进的 Pareto 遗传算法	177
8.4	Nash-Pareto 策略	179
8.5	Nash-Pareto-RSOW 算法	179
8.6	Nash-Pareto-RS 算法	180
8.7	基于 NSGA 的多目标进化优化方法概述	180
8.8	压气机三维叶片优化的典型算例及其主要步骤	182
8.9	基于系统的多目标优化策略以及科学用能思想的概述	187
8.10	科学分析与工程设计中的正、反问题及其算法概述	190
参考文献		191

第 1 篇 高精度、高分辨率算法及其应用

高精度^[1]、高分辨率算法^[2,3]是计算流体力学的前沿课题之一^[4,5],是多年来人们一直不断发展、不断改进、不断完善的新领域。本篇正是针对这个问题,并结合多年来从事计算流体力学的亲身实践,分四章进行十分简明扼要的讨论,其内容如下:

- (1) 高精度、高分辨率差分离散算法。
- (2) 有限体积与 RKDG 有限元高分辨率与高精度方法。
- (3) 可压缩湍流的 RANS 与 DES 分析法。
- (4) 高分辨率算法在高超声速再入飞行问题中的应用。

第 1 章 高精度、高分辨率差分离散算法

1.1 TVD 的概念以及 Harten 构造的二阶格式

1983 年, Harten A 首次提出了 TVD (Total Variation Diminishing) 的概念, 并构造了相关的限制器算子, 为差分方程的理论及构造开拓了一个崭新的方向。S. Osher、B. van Leer、R. Chakravarthy、B. Engquist、P. L. Roe、H. C. Yee 和 C. W. Shu 等在进一步改进、完善和发展 TVD 方面做了许多工作。这里仅简要讨论一下 Harten 的二阶 TVD 格式, 首先考虑非线性标量模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

这里对它构造 TVD 格式。令这里 TVD 格式的一般形式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{i-\frac{1}{2}}) \quad (1.1.2)$$

或

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-\frac{1}{2}}(u_i^n - u_{i-1}^n) + D_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (1.1.3)$$

式中: $\tilde{f}_{i\pm\frac{1}{2}}$ 为数值通量。对于一般节点模板来讲, 数值通量的形式为

$$\tilde{f}_{i\pm\frac{1}{2}} \equiv \tilde{f}(u_{i-l}, u_{i-l+1}, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}), k, l \geq 0 \quad (1.1.4)$$

并要求 $\tilde{f}$ 满足 Lipschitz 连续条件和相容性条件, 即

$$\tilde{f}(u, u, \dots, u, u, \dots, u) = \tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}(u) = f(u) \quad (1.1.5)$$

通常选取的节点模板都较小, 例如取 $l = 0, k = 1$ 即三节点模板, 这时式(1.1.4)所表达的数值通量 $\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 变为

$$\tilde{f}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{f}(u_i, u_{i+1}) \quad (1.1.6)$$

按照 Harten 提出的总变差概念定义总变差为

$$TV(u^n) \equiv \Delta x \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

所谓 TVD 也即要求满足

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (1.1.7)$$

或

$$\sum_i |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (1.1.8)$$

理论上可以证明,式(1.1.3)为 TVD 的一个充分条件是:对于任意的整数 i , 式(1.1.3)中的系数 C, D 都满足

$$\begin{cases} C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ D_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ 0 \leq C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}} \leq 1 \end{cases} \quad (1.1.9)$$

为了构造二阶精度的 TVD 格式, Harten 将单个守恒律方程式(1.1.1)的一阶 TVD 格式(它是三节点模板的一阶格式):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}), \lambda \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (1.1.10)$$

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) - \frac{1}{\lambda} Q(\lambda \alpha_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^n - u_i^n) \right] \quad (1.1.11)$$

用于修正通量后的单个守恒律方程,即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^M(u)}{\partial x} = 0, f^M(u) \equiv f(u) + \frac{1}{\lambda} g(u) \quad (1.1.12)$$

并且选择适当的修正量 g (它具有某种反扩散项的意义),使得所得到的差分格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^M - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^M) \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^M = \frac{1}{2} \left\{ \left[f(u_i^n) + \frac{1}{\lambda} g(u_i^n) \right] + \left[f(u_{i+1}^n) + \frac{1}{\lambda} g(u_{i+1}^n) \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{\lambda} Q(\lambda \alpha_{i+\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

对于修正通量的守恒律方程式(1.1.12)来讲,式(1.1.13)虽然仍是一阶 TVD 格式,但差分格式(1.1.13)对于原守恒律方程式(1.1.1)却是二阶的 TVD 格式。为此,取修正项 g 具有如下形式:

$$\left\{ \begin{aligned} g_i &\equiv \min \text{mod}(\tilde{g}_{i+\frac{1}{2}}, \tilde{g}_{i-\frac{1}{2}}) \\ \tilde{g}_{i+\frac{1}{2}} &\equiv \frac{1}{2} \left[Q \left(\lambda \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) - \left(\lambda \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] (u_{i+1}^n - u_i^n) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.15)$$

式中: $\alpha_{i+\frac{1}{2}}, \gamma_{i+\frac{1}{2}}, Q(Z), \min \text{mod}(a, b)$ 的定义分别为

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} \equiv \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & u_{i+1}^n - u_i^n \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i^n}, & u_{i+1}^n = u_i^n \end{cases} \quad (1.1.16a)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} \equiv \begin{cases} \frac{g_{i+1} - g_i}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & u_{i+1}^n - u_i^n \neq 0 \\ 0, & u_{i+1}^n = u_i^n \end{cases} \quad (1.1.16b)$$

$$Q(Z) \equiv \begin{cases} |Z|, & |Z| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}(Z^2 + \varepsilon^2), & |Z| < \varepsilon \end{cases} \quad (1.1.17)$$

$$\min \text{mod}(a, b) \equiv \begin{cases} [\text{sgn}(a)] \min(|a|, |b|), & ab > 0 \\ 0, & ab \leq 0 \end{cases} \quad (1.1.18)$$

由于引进了辅助通量 $g_i = g(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$, 因而 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^M$ 已包含 $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$ 这四个节点, 也就是说差分格式式(1.1.13)的节点模板已经扩展为 $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2})$ 这五个节点。这里还应该需要指出的是, 通常高阶精度的 TVD 格式仅仅是在光滑区域中才能达到。事实上, 激波间断附近, 如不进行适当处理则上述格式的精度仍然会降为一阶。对于 TVD 格式, 可以有下面的定理成立: 所有的 TVD 格式, 在函数的极值点附近要降至一阶精度^[2]。

1.2 高精度 ENO 和加权 ENO 格式

文献[6]指出, TVD 格式的精度最多只能达到二阶, 并且一般说来 TVD 格式的精度全场不是一致的, 在个别点(极值点)处精度只有一阶。为了进一步提高格式精度并改善格式在极值点处的性态, 1986 年 Harten 首先提出了无振荡格式(Non - Oscillatory)的概念, 并于 1987 年提出了本质无振荡(Essentially Non - Oscillatory, ENO)格式的方案和方法。于是在守恒律方程的高阶和高分辨率数值方法的设计上找到了一条统一而且有效的途径。这类格式是守恒的, 从实质上讲它是一种高阶精度的广义 Godunov 格式。这种格式全场具有一致的高精度, 并且基本上是 TVD 的, 即

$$TV(u^{(n)}) \leq C \cdot TV(u^{(o)}) \quad (1.2.1)$$

式中: C 是与空间步长 Δx 、时间步长 Δt 无关的常数。

式(1.2.1)表明, ENO 格式是总变差有界的。比较式(1.1.7)与式(1.2.1), 显然 ENO 较 TVD 的确放松了对总变差施加的约束, 但由此却换来了进一步提高格式的精度以及全场具有一致高阶精度的可喜效果。下面首先扼要讨论一维标量方程的有限体积型 ENO 格式, 然后再讨论加权 ENO 格式。

考虑一维标量守恒律方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, & x \in (a, b), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [a, b] \end{cases} \quad (1.2.2)$$

设网格剖分为

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots, x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b \quad (1.2.3)$$

单元 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, 单元中点为 $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$, 步长为 $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, 这里 $i = 1, 2, \cdots, N$; 并且定义

$$\Delta x \equiv \max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i \quad (1.2.4)$$

将式(1.2.2)在单元区间 I_i 上积分并整理为

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x_i} [f(u_{i+\frac{1}{2}}, t) - f(u_{i-\frac{1}{2}}, t)] = 0 \quad (1.2.5)$$

式中

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi, t) d\xi, \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (1.2.6)$$

下面分两个小问题进行讨论。

1. 在选定的模板上构造插值多项式 $p(x)$

这里所谓选定的节点模板, 又可以称为固定模板。取定一个模板, 例如取包括三个单元的模板 $S = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, 构造一个多项式 $p(x)$, 使其满足

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi = \bar{u}_j, \quad j = i-1, i, i+1 \quad (1.2.7a)$$

$$p(x) = \tilde{p}(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2, \zeta = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \quad (1.2.7b)$$

式中

$$\begin{cases} a_0 = \bar{u}_i - \frac{1}{24} \delta^2 \bar{u}_i, a_2 = \frac{1}{2} \delta^2 \bar{u}_i \\ a_1 = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}), \delta^2 \bar{u}_i \equiv \bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1} \end{cases} \quad (1.2.8)$$

令

$$u_{i+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (1.2.9)$$

于是将式(1.2.8)代入式(1.2.7), 得

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} \bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6} \bar{u}_i + \frac{1}{3} \bar{u}_{i+1} \quad (1.2.10a)$$

选择不同的模板, 可得不同系数的组合, 如选 $S = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}$ 时, 则

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \bar{u}_{i-2} - \frac{7}{6} \bar{u}_{i-1} + \frac{11}{6} \bar{u}_i \quad (1.2.10b)$$

如果 $S = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$, 则

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\bar{u}_i + \frac{5}{6}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{u}_{i+2} \quad (1.2.10c)$$

在一般情况下,如果模板包含 $r + g + 1 = k$ 个单元,即

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+g}\}, g \equiv k - r - 1, r = 0, 1, \dots, k - 1 \quad (1.2.11)$$

则这时利用模板 S 可以构造 $(k - 1)$ 次插值多项式(如牛顿多项式或者拉格朗日多项式) $p_i(x)$,它在单元 I_i 区间逼近函数 $u(x)$ 满足

$$p_i(x) = u(x) + O(\Delta x^k), x \in I_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.12)$$

同样地,类似于式(1.2.10),得

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} (C_{ij} \bar{u}_{i-r+j}) \quad (1.2.13)$$

式中:系数 C_{ij} 为

$$C_{ij} = (\Delta x_{i-r+j}) \sum_{m=j+1}^k \left\{ \frac{\sum_{l=1}^k \left[\prod_{\substack{q=0 \\ l \neq m, q \neq m, l}}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}}) \right]}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right\} \quad (1.2.14)$$

式中: $0 \leq i \leq N, -1 \leq r \leq k - 1, 0 \leq j \leq k - 1$ 。显然式(1.2.14)是采用拉格朗日多项式时得到的结果。如果网格是均匀的即 $\Delta x_i = \Delta x$ 时,则式(1.2.14)便退化为

$$C_{ij} = \sum_{m=j+1}^k \left\{ \frac{\sum_{l=0}^k \left[\prod_{\substack{q=0 \\ l \neq m, q \neq m, l}}^k (r - q + 1) \right]}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (m - l)} \right\} \quad (1.2.15)$$

显然令 $k = 3, r = 1$ 时,则由式(1.2.15),得

$$c_{10} = -\frac{1}{6}, c_{11} = \frac{5}{6}, c_{12} = \frac{1}{3}$$

将上式代入式(1.2.13)便得到式(1.2.10a);再如令 $k = 6, r = 5$ 时,则由式(1.2.15)计算出 c_{ij} 值,并且代入式(1.2.13)得

$$u_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\bar{u}_{i-5} + \frac{31}{30}\bar{u}_{i-4} - \frac{163}{60}\bar{u}_{i-3} + \frac{79}{20}\bar{u}_{i-2} - \frac{71}{20}\bar{u}_{i-1} + \frac{49}{20}\bar{u}_i + O(\Delta x^6) \quad (1.2.16)$$

2. 逐次扩展节点模板的优化过程

为了提高格式的分辨率,避免数值结果出现 Gibbs 振荡现象,可利用可调节模板(Adaptive Stencil)代替固定模板,尽量避免在所选择的模板中包含间断,也就是说 ENO 采用了差商极小化的方式去扩展模板节点的优化过程,以便实现“本质无振荡”的效果。要扩张节点模板,始终有两种可能,即由当前基准点向左扩展一

点,或者向右扩展一点。令

$$S_{1L} = \{x_{i-1}, x_i\}, S_{1R} = \{x_i, x_{i+1}\} \quad (1.2.17)$$

相应的阶梯函数值为 $\{(\bar{u})_{i-1}^n, (\bar{u})_i^n\}$, 与 $\{(\bar{u})_i^n, (\bar{u})_{i+1}^n\}$; 图 1.1 给出了 $t^{(n)}$ (简记为 t^n) 时间层上的阶梯函数分布图。这里到底是选择 S_{1L} 作为 S_1 , 还是选择 S_{1R} 作为 S_1 , 需要比较它们的斜率之后才能决定, 即由一阶牛顿差商

$$N_{1L} = \frac{(\bar{u})_i^n - (\bar{u})_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}}, N_{1R} = \frac{(\bar{u})_{i+1}^n - (\bar{u})_i^n}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.2.18)$$

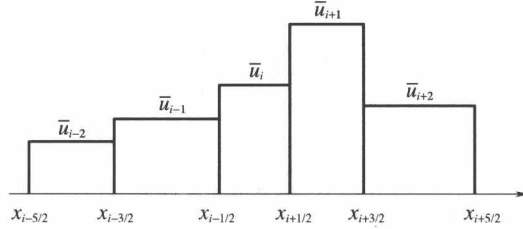


图 1.1 时间层 $t^{(n)}$ 上阶梯函数的分布

取上面两式的绝对值较小者作为扩展后的两节点模板 S_1 ; 也就是说, 如果

$$|N_{1L}| \leq |N_{1R}| \quad (1.2.18a)$$

时则取 S_{1L} 作为 S_1 , 并且

$$u_{i+\frac{1}{2}} = (\bar{u})_i^n + N_{1L}(x - x_i) \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (1.2.18b)$$

否则取 S_{1R} 作为 S_1 , 且

$$u_{i+\frac{1}{2}} = (\bar{u})_i^n + N_{1R}(x - x_{i+1}) \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (1.2.18c)$$

然后在 S_1 模板的基础上用类似的办法去构造 S_2 模板, 即向左增加一个节点记作 S_{2L} 或者向右增加一个节点记作 S_{2R} ; 比较它们的二阶牛顿差商; 如果 $|N_{2L}| \leq |N_{2R}|$, 则选择 S_{2L} 作为 S_2 并且作出二阶的牛顿插值公式, 生成相应的 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 值; 否则选择 S_{2R} 作为 S_2 , 也有类似的过程。一般来讲, 如果上述的过程一直进行下去可得到 $S_{(j-1)}$ 模板。在 $S_{(j-1)}$ 模板的基上, 向左增加一个节点记作 S_{jL} 或者向右增加一个节点记为 S_{jR} , 这时要比较它们的 j 阶牛顿差商, 如果 $|N_{jL}| \leq |N_{jR}|$ 时则取 S_{jL} 作为 S_j , 否则取 S_{jR} 作为 S_j , 并且算出 j 阶的牛顿插值公式, 生成相应的 $u_{i+\frac{1}{2}}$ 值, 进而得到边界点处的近似值:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), u_{i-\frac{1}{2}}^R = p_i(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (1.2.19)$$

因此, 对于所讨论的守恒律方程组的积分形式 (1.2.5), 便可得到如下的守恒格式:

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x_i} \left[\hat{f}(u_{i+\frac{1}{2}}^L, u_{i+\frac{1}{2}}^R) - \hat{f}(u_{i-\frac{1}{2}}^L, u_{i-\frac{1}{2}}^R) \right] = 0 \quad (1.2.20)$$