高等学校教学参考书

微分几何讲义

吴大任 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

wēi fēn jǐ hé jiǎng yì

微分几何讲义

吴大任 编

人民教育出版社

本版基本上与1959年第一版，1965年第二版相同，内容是三维空间微分几何学. 第一章简单叙述了本书所需用的有关矢函数的知识；第二章到第四章是曲线理论；第五章初步介绍可展曲面，作为曲线理论与曲面理论的桥梁；第六章到第八章是曲面理论；附录I-V的内容是正文某些内容的补充.

本书可作为综合大学，高等师范院校数学专业微分几何课程的教学参考书，也可作为高等工业院校有关专业的参考书.

高等学校教学参考书
微分几何讲义
吴大任 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 11.5 字数 282,000
1959年12月第1版 1979年2月第3版
1981年6月第12次印刷
印数 115,501—129,500
书号 13012·0120 定价 0.85 元

序

本书原是 1957 年编者在南开大学讲授微分几何课程时所编讲义，出版前略有增订．内容大体依据 1956 年高等教育部审定的综合大学数学专业四年制用微分几何教学大纲，在增订时曾经考虑到五年制的要求．带有 * 号的各节一般是补充的，次要的或较繁难的内容和证明，阅读时都可以略去，不影响或基本不影响以后的学习．

考虑到目前微分几何课程在教学计划里的安排，本书所用的数学知识和工具限于解析几何(包括矢量运算)，数学分析和微分方程里的一般基础知识和工具，没有用到复变函数，变分法和偏微分方程等．

本书企图以较小的篇幅阐述三维欧氏空间里曲线和曲面的理论．

第一章除 § 6 和 § 7 外，完全是复习矢代数和介绍有关矢函数的微分和积分等最简单的事实．熟悉这一章的内容，是阅读以后各章所必须的；已经熟悉矢代数和矢函数的微积分方法的读者，可以只读 § 6 和 § 7．

第二至第四章构成空间曲线论，其中第四章兼讨论了平面曲线．在那里，平面曲线既作为空间曲线的特款，又有其特殊的处理方法．

第五至第八章构成曲面论，其中以第五章可展曲面初论作为曲线论和曲面论的桥梁，称为“初论”是因为还有许多关于可展曲面的事实散见以下各章．第六章和第八章后半论述曲面的内在性质．第七章全章以法曲率为基础，可以称为曲面的曲率理论．第

八章前半主要是导出基本公式和基本方程，并证明基本定理．在第八章，采用了正交参数曲线网．

显然，在曲面论里，这样的安排就不免有逻辑结构不够严密，理论系统不够完整的缺点；例如曲面的内在性质被割裂，而且在引进某些内在性质的时候用到了非内在性质，又如第八章里的一些公式缺乏普遍性，因而缩小了应用范围等．但是，考虑到本书的初等性质，从教学效果出发，编者认为这样的安排有其现实的意义．

除第一章外，在各章末都附有或长或短的“结束语”，概括本章的主要内容，指出它们彼此间的联系，有时也指出本章与其他章的联系．这是编者的一种尝试，希望它们对于读者有所帮助．在阅读全章之前先看看结束语也可能有好处．

在大多数节后附有习题，它们应当看成是本书的有机组成部分．因为只有通过适当的练习，才能较具体地因而也更深刻地掌握理论，学会运用它们去解决实际问题．少数习题还是正文内容的补充．它们都不繁难，适应一般学生水平，个别的附有提示．习题一般是按其所需要的数学工具安排的；因此，有些习题按其性质或内容，是和以后某些章节相联系的，它们的分量也不代表各阶段应做练习的分量．

本书所用数学专门名词，基本上依照中国科学院编译出版委员会名词室编订的“数学名词”(1956)，只有个别的更动．人名译名基本上根据高等教育出版社所编的“著译者参考资料”里的译名表，但已经普遍采用的不再更动．

本书因系讲义性质，编写时曾大量采用已有各书的内容和方法；这些书名，就不再一一列举．至于书中的谬误和缺点，一定很多，真诚地希望读者指正，欢迎和出版社或和编者本人联系．

吴大任

1959年建国十周年前夕于南开大学

再版说明

和第一版比较，再版的主要变动是增加了附录.

再版正文和第一版基本相同；在这里，只有三处较大变动值得一提. 第一是把本书所需用的关于一阶线性微分方程组存在定理的证明从正文中抽出，略加修改，辑成一个附录(附录Ⅴ)；这样，可以节省一般读者的时间，而希望了解这些定理证明的读者，也可以无需检阅其他参考书. 第二是把第五章里关于单参数曲面族的部分抽出，也作为一个附录(附录Ⅰ)，而在第五章里只讨论单参数平面族；这样可能更适合多数读者的需要. 第三是在第八章§13里增添了关于闭曲面总曲率的内容；其目的是为了显示曲面的局部性质和整体性质的一种联系，以及本学科和拓扑学的一种联系.

再版一共增加了五个附录；除上面已经提到的两个外，其余三个都是正文的补充. 它们表明，引进新的数学工具，某些原有内容就可以处理得比较完善，还可以扩充或深化本学科的内容，并提出新的命题.

附录Ⅱ论述了关于小积曲面的若干主要事实，附带补证了关于等角变换的某些结果. 由于只假定读者具有复变函数论的最基本知识，不假定读者对于复空间的几何有任何了解，也由于企图较严格地处理复曲面和实曲面的关系，这个附录写得较长.

由于在第八章里采用了曲面上的正交参数曲线网，其中某些公式就缺乏普遍性. 为了弥补这个缺陷，在附录Ⅲ里引进了张量记法来论述曲面理论. 阅读这个附录还可能有助于学习黎曼几何学.

附录Ⅳ论证了小积曲面和短程线的极小性质. 虽然采用了

变分法的方法，但没有采用变分法的专门术语和符号，不假定读者对于变分法有任何了解.

总之，除了附录Ⅱ里假定读者对于复变函数论有初步了解外，再版正文和附录都不假定读者已掌握更多的数学工具. 除了附录Ⅳ采用了附录Ⅲ里所引进的张量记法之外，各个附录是彼此独立的. 没有把附录的内容编入正文，是为了不增加正文篇幅，保持本书的初等性质，保持使用上较大的灵活性，以适应不同读者和不同学校的需要.

作为一本教材，本书应如何使用的问题，在第一版序中已有说明. 编者认为，进行教学的根本依据，应当是教学大纲而不是教材；前者规定课程的基本内容而后者则总是比较系统，丰富，以便于教师发挥自己的主观能动性，根据情况，进行剪裁组织，以至于加工，改造，也便于因材施教. 例如在讲授曲面论时，是否从头或从一定地方起引用张量记法，教师完全可以根据条件自行抉择；如果引用，附录Ⅲ就提供了必要的加工素材. 不过，一般说来，附录的材料都不必进行讲授. 除了带*号各节和附录以外，如果仍感内容过多，还可以删去许多其他章节. 个人意见，下列章节可能体现本课程一个最低限度的要求：

第一章，§§3—8；

第二章，§§1—5(删去弧长公式的推导)；

第三章，§§1—4, 6；

第四章，§4；

第五章，§§1—5；

第六章，§§1—5；

第七章，§§1—5, 7, 8, 11—14(删去11.3)；

第八章，§§1—3, 5, 6.

但只讲这些部分，内容又可能过于贫乏. 因此，在每一次具体教学

过程中，一般地还需要根据情况，从其余部分中，作恰当的选择，补充进去．至于因精简了一些章节所引起的不衔接问题，并不严重，有一定经验的教师，都不难处理．

本书第一版印行后，陆续发现了不少错误和不够周密的地方，在若干次重印和这次再版前都有所订正．但限于编者的业务水平和工作时间，遗留下的错误一定很多，还可能有不少新的错误，恳切希望读者指正．

编　者

1964 年建国十五周年前夕

重 印 说 明

这次重印，除文字上的修订和印刷错误的改正外，主要是个别定理证明或逻辑顺序以及公式推导的改善，并小有补充．此外，还把曲率和挠率的记号依次改为 κ，τ，以便和当前国际上的习惯用法比较一致；与此同时，相对曲率，法曲率，主曲率，短程曲率以及短程挠率的记号也作了相应的改变．

编　者

1978 年 8 月

目　录

第一章 矢函数

§1. 矢代数复习

在本书里，除非特别声明，所遇到的数量总是实数，所用的坐标系总是直角坐标系. 此外还规定：在平面里，从坐标系的正 x 轴到正 y 轴的角是 $+\frac{\pi}{2}$；在三维空间里，坐标系是右旋系(或称右手系).

我们假定读者对于三维空间里矢量(或称向量)的概念已经熟悉，知道如何在直角坐标系里利用矢量的分量来表示矢量，知道有关矢量的各种代数运算的定义与规律，也知道如何利用分量来实施这些运算. 本节的目的是对于这里面最主要的一些事实作简单的复习，并略有补充；在复习的时候，我们不计较这些事实的逻辑顺序.

在本书里，粗体字母总表示矢量.

设 x, y, z 为一个矢量 $\boldsymbol{r}$ 的分量，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为沿着三个坐标轴正向的幺矢①，则矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x, y, z\},$$

它的长是

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

零矢

$$\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\{0, 0, 0\}.$$

---

① 幺(yāo)矢即其长为 1 的矢量(或称单位矢量).

若 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$, 则$\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ 是和 $\boldsymbol{r}$ 正向相同的幺矢. 这个幺矢的分量等于 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦; 设它们为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, 则

$$\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}),$$

而

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

若 λ 为纯量(或称数量), $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, 则 λ 与 $\boldsymbol{r}$ 之积

$$\lambda\boldsymbol{r}=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}+\lambda z\boldsymbol{k}.$$

若 $\boldsymbol{r}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}\ (i=1,2)$ 为两个矢量, 则它们的和

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}.$$

矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 平行的一个充要(即充分和必要)条件是它们线性相关, 即存在着不同时为零的纯量 λ_1, λ_2, 使 $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$.

若 θ 为矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 之间的角, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 则它们的数积

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

因此, $\boldsymbol{r}_1\perp\boldsymbol{r}_2$ 的充要条件是它们的数积 $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2=0$①. 若 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$, 上式化为

$$\boldsymbol{r}^2=x^2+y^2+z^2=|\boldsymbol{r}|^2.$$

故

$$\sqrt{\boldsymbol{r}^2}=|\boldsymbol{r}|.$$

若 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 同时垂直的一个幺矢, 而且当 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 不平行时, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{e}$ 按这个次序构成右旋的三个矢, 则矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 的矢积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2&=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\theta\,\boldsymbol{e}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此, $\boldsymbol{r}_1\parallel\boldsymbol{r}_2$ 的另一个充要条件是它们的矢积 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$②.

---

① 在这里, 零矢作为和任何方向垂直的矢量.

② 在这里, 零矢作为和任何方向平行的矢量.

以上几种运算满足一些简单的规律. 若 λ, μ 表示纯量, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 表示矢量, 这些规律包括:

1) 结合律:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{r})=(\lambda\mu)\boldsymbol{r},$$

$$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3),$$

$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2),$$

$$(\lambda\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}_2=\lambda(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2);$$

2) 交换律:

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1,$$

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1;$$

3) 分配律:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r},$$

$$\lambda(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)=\lambda\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3,$$

$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3.$$

此外, 矢积还满足

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1.$$

关于矢量的数积和矢积, 以下的**拉格朗日(Lagrange)恒等式**成立:

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3). \quad (1)$$

若把各矢量都用分量表示, 这个恒等式不难验证. 特殊地,

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^2=\boldsymbol{r}_1^2\boldsymbol{r}_2^2-(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)^2. \quad (2)$$

以矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 的分量为行的**行列式**

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3). \quad (3)$$

它的绝对值表示以 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ 为棱的平行六面体的体积. 矢量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ “共面”(即平行于同一个平面)的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=0;$$