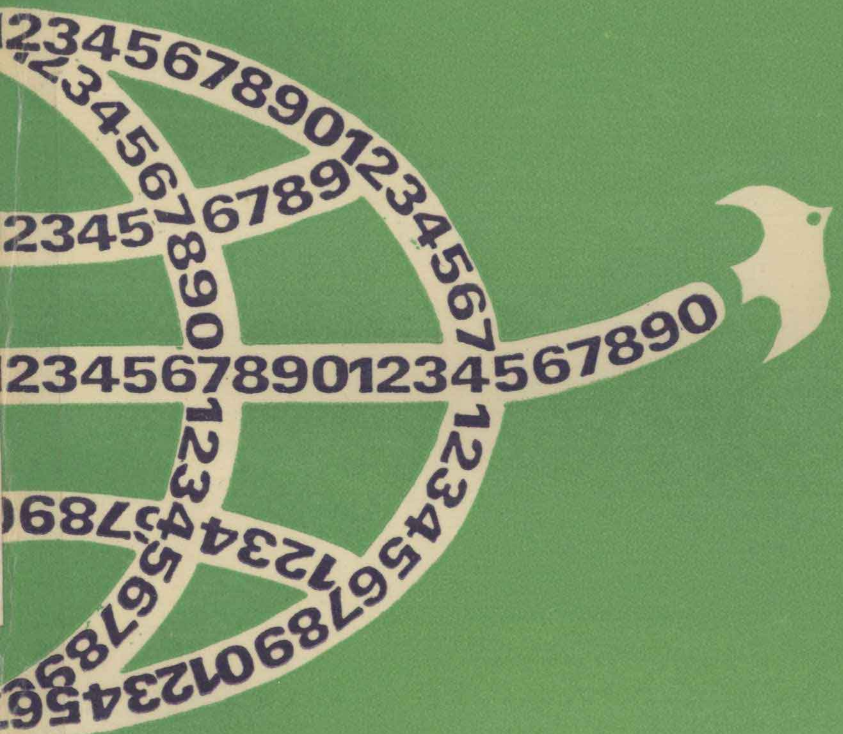
# 中学数学奥林匹克学与练

肖果能等编译



湖南科学技术出版社

# 中学数学奥林匹克学与练

肖果能　郭赫山
周继军　郑绍辉　编译
钟五一

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

**中学数学奥林匹克学与练**

肖果能等编译

责任编辑：陈一心

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路 3 号）

湖南省新华书店经销

湖南省岳阳印刷厂印刷

（印装质量问题请直接与本厂联系）

*

1993 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：5.125　字数：114，000

印数：1—4，000

ISBN　7—5357—0555—3

O·66　定价：3.80 元

地科：119—42

# 前　言

我国首次派出6名中学生参加1986年国际数学奥林匹克竞赛，便大获成功，以三个一等奖、一个二等奖、一个三等奖的成绩名列第四。此后，则是捷报频传。1988年第29届国际数学奥林匹克竞赛，我国代表队又进一步，跃居总分第二，夺得两枚金牌。1989年第30届国际数学奥林匹克竞赛，我国代表队更上一层楼，夺得总分第一。今年，我国代表队又夺得冠军宝座。中国数学代表队的连续胜利，为祖国赢得了荣誉，为中华民族赢得了荣誉，极大地鼓舞了全国人民尤其是全国广大的中学生，空前地激发了他们学习数学，参加数学竞赛的兴趣和热情。这些年来，报名参加各级数学竞赛的同学越来越多，与之相应，全国也涌现出一大批优秀的数学竞赛教练员。依靠大家的共同努力，我国中学奥林匹克数学竞赛的水平将会越来越高。

诚然，胜利是来之不易的，但是，要继续保持名列前茅的地位则更不容易。为此，我们应不断地学习和探索新方法、新技巧，提高参赛的素质。“知己知彼，百战不殆”，为了解国际数学竞赛的形势，掌握其命题的深度及热点，帮助大家搞好赛前训练，提高广大中学生的数学学习水平，我们将国外关于数学竞赛的若干问题的精华编译成册，供大家参考学习。预祝我国中学生在新一轮国际数学奥林匹克竞赛中取得更大的胜利。

编译不当之处，诚望批评指正。

**编　者**

1992年11月18日

# 目　录

# 第一章　非常规问题

**1—1**　安德列把一个用硬纸板做成的凸多面体，沿着它的每条棱剪开成若干块，然后把这若干块硬纸板寄给科里亚．科里亚用这些硬纸板又粘合成一个多面体．能否产生这种情况：科里亚粘合成的多面体和安德列所剪的多面体不是一个样？

**1—2**　能否把 203 这个数表成若干个自然数的和的形式，使得这些自然数的积也等于 203？

**1—3**　是否存在这样的整数，a）删去它的第一个数字，它就缩小了 57 倍；б）删去它的第一个数字，它就缩小了 58 倍？

**1—4**　是否存在这样的递增等比数列，它的前 10 项是整数，以后各项都不是整数？

**1—5**　是否有这样的两个三角形，第一个三角形的三条边长都比 1cm 小，第二个三角形的三条边长都比 100m 大，而第二个三角形的面积反而小于第一个三角形的面积？

**1—6**　下列情况能否出现？

a）一个三角形三条边上的高都小于 1cm，而它的面积却大于 $100\text{cm}^2$．

б）一个三角形三条边上的高都大于 2cm，而它的面积却小于 $1\text{cm}^2$．

**1—7**　一个三角形叠在一个凸四边形上，问重叠的部分能产生什么样的多边形？（画出适当的图形来表示产生的这些多边形，同时还要证明什么样的边数的多边形不能产生．）

**1—8** 在有格子的纸上，给 25 个格子涂色，a)能否做到使涂了色的每一个格子都和偶数个涂了色的格子相邻？ б)使每一个涂了色的格子都和奇数个涂了色的格子相邻？(两个格子之间公用一条边，这两个格子叫相邻的格子).

**1—9** 是否有这样的封闭折线，它与组成它的每条线段都相交？ a)折线由 6 条线段组成；б)折线由 7 条线段组成.

**1—10** 平面上是否存在六个点及连结这些点的不相交线段：a)使得每一个点恰与另外的三个点有线段相连. б)使得每一个点恰与另外的四个点有线段相连.

**1—11** 能否由三根轴和一些线，做成一个稳定的空间结构，使得这三根轴不相连，而只用固定在三根轴的端点的线来连结？

**1—12** 下列命题正确吗？ a)从 100 个不同的整数里，总可以选出 15 个整数，使得其中任意两个整数的差，能被 7 整除；б)从 100 个不同的整数里，总可以选出 16 个整数，使得其中任意两个整数的差，能被 7 整除.

**1—13** 下列命题正确吗？

a)任意书写不同的五个数排成一行，总可以在其中找到三个数，它们是递增的，或者是递减的；

б)任意书写不同的九个数排成一行，总可以在其中找到四个数，它们是递增的，或者是递减的.

**1—14** a)能否造出一张 $100\times100$ 的正方形数表，使得每列中各数的和是正数，而每行中各数的和是负数？

б)能否写出一行 25 个数，使得任意三个相邻的数之和为正数，而全体数之和为负数？

**1—15** 若 $n_1, n_2, \cdots\cdots n_9$ 是不同的奇自然数，下列二式能否等于 1？

a) $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\cdots\frac{1}{n_6}$； б) $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n_9}$.

**1—16** 某一个班有 28 个学生，共坐 14 张双人课桌. 每一个月老师就把学生的座位更换一次，规定每两个同学只能同坐一次. 老师按这种方法更换，最多能更换多少次？

**1—17** 一只苍蝇停在正十二面体模型的顶点上，决定沿着十二面体的棱绕行一圈，在它旅途中每个顶点都经过一次，而且都只能经过一次，最后又回到原来的顶点，接着，它又想用同样的方式遍访各面都是菱形的十二面体的所有顶点，如图 1. 试问，它能否实现第二次旅行？

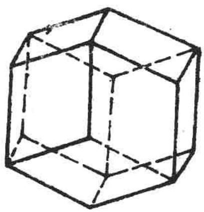


图 1

**1—18** 小轴是汽油发动机的一个组成部分. 用一块钻有一排 15 个孔的钢板来测量小轴的直径，板上第一个孔的直径为 10 毫米，每下一个孔的直径比前一个大 0.04 毫米. 把小轴往孔中插，如果小轴插不进去，那么小轴的直径比孔的直径大，如果能插进去，那么它的直径就比孔口直径小. 因此，小轴直径的误差应小于 0.04 毫米(若小轴的直径小于 10 毫米或大于 10.56 毫米，则不送往下一道工序，其余的才送). 在检测时，要求检测员对每根轴使用相同的试插次数(指往不同的孔的插数). 那么，试插几次即能测出每根轴的直径？顺序如何安排？

**1—19** $A$、$B$、$C$ 三城市中的任何一个城市的居民，只能认

识别的两城市中的每个城市的居民不多于一人，已知：

1）$A$ 城市的居民人数等于 6000；

2）$B$ 城市的居民中，能认识 $C$ 城市居民的人数不多于 2000；

3）$B$、$C$ 两城市中的居民，各有半数以上的人不认识 $A$ 城市中的居民.

证明：$A$、$B$、$C$ 城市的居民中，不认识另一城市居民的人数不小于 1978.

## 问题的讨论和解答

**问题 1—1** 答案：可能. 图 2 就是一个各面棱长相同的不同多面体的例子.

各面棱长分别表示为 $a$、$b$、$c$、$d$，可取 $a=9$，$b=10$，$c=11$，$d=12$.

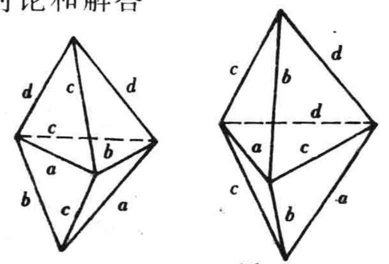



图 2

图中的多面体是由两个三棱锥组成. 具有这些棱长的三棱锥的存在性是明显的，但严格证明并不容易.

▽ 本题是由相同的面和相同的棱长构成两个不同的多面体的典型例子.

如果安德列将所有的棱长编号且在各个面上写上与这个面相邻的棱的号码，则科里亚会粘出一个完全一样的凸多面体. 这里有一条“柯西定理”. ——如果一个多面体的各个面与另一个多面体的各个面分别全等，那么这两个多面体全等.

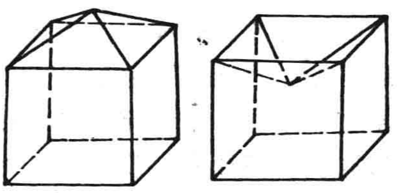


图 3

对于两个非凸多面体来说，柯西定理就会变得不正确了，请看图 3 中的例子.

**问题 1—2** 答案：可能.

$$203=7+29+\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{167}=7\cdot 29\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots\cdots\cdot 1}_{167}$$

▽ 现提出一般的问题是：什么样的自然数能同时表示成若干个自然数的和及这些自然数的积的形式.

这个问题的答案是：全体合数，进而，一个数能够唯一地这样表示，如果它恰是两个质数的乘积，问题 1—2 中的数 203 就是这样的数.

这个问题很有趣，与此有关连的是以下的问题：对于什么样的自然数 $k$，方程

$x_1+x_2+\cdots+x_k=x_1\cdot x_2\cdots x_k$ 在整数范围内有非零解？答案是：

当 $k=1$ 时，$x_1=1$，当 $k=2$ 时，$x_1=x_2=2$.

当 $k>2$ 时，$x_1=x_2=\cdots=x_{k-2}=1, x_{k-1}=2, x_k=k$.

**问题 1—3** a)答案：存在. 例如，数 7125. б)答案：不存在. 要求的数的第一个数码记作 $x$，去掉第一个数码剩下的数码记作 $y$. 设这个要求的数为$(k+1)$位数，则这个数可写成 $10^kx+y$，依题意有

$10^kx+y=58y$，由此得出 $10^kx=57y$.

因为 57 能被 19 整除，这就是说 $57y$ 能被 19 整除. 但是 $x$ 只能为 1 到 9 中的任意一个数码，因此 $10^kx$ 不能被 19 所整除，故命题得证.

▽ 类似于此题的讨论，能得出更带一般性的问题：对于怎样的自然数 $n$，存在着这样的整数 $a$，使得去掉这个整数 $a$ 的第一个数码后这个留下的数就比 $a$ 缩小了 $n$ 倍？这样的整数 $a$ 存

在，当且仅当方程 $10^k x=(n-1)y$ 在整数范围内有解，这里的 $x$ 是从 1 到 9 的数码中的一个. 如果 $(n-1)$ 能分解成 $2^m \cdot 5^l \cdot x$ 的形式，$x$ 是 1 到 9 的数码中的一个，这样的解就存在. 于是，问题 1—3 的 a)：$n=57$，$\therefore n-1=56=7\cdot 2^3$，$x=7$，$y=125$.

**问题 1—4** 答案：存在. 例如首项为 $2^9$，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列就是一个.

**问题 1—5** 答案：可能. 比如第一个三角形是等边三角形，边长是 $\frac{1}{2}$cm，那么它的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{16}\text{cm}^2$；而第二个三角形是等腰三角形，其底边长是 200m，而底边上的高长是 $10^{-7}$m，那么它的面积是 $200\times10^{-7}\times\frac{1}{2}=10^{-5}\cdot(\text{m}^2)=\frac{1}{10}(\text{cm}^2)$. 显见 $\frac{\sqrt{3}}{16}>\frac{1}{10}$.

**问题 1—6** a)答案：可能. 比如一个等腰三角形，其底边边长为 800cm，底边上的高为 0.3cm，那么这个等腰三角形的面积为 $\frac{800\times0.3}{2}>100$. 我们还要问，这时其余的两条边上的高是否一定小于 1cm 呢？我们绘出图 4 来说明. $\triangle ABC$ 中 $AB=BC$，$AC=800$cm，$BD=0.3$cm，$AH$ 为腰 $BC$ 上的高. 引 $DK\perp BC$ 于 $K$，显见 $DK<BD$，因为 $D$ 是 $AC$ 中点，$DK\parallel AH$，$\therefore AH=2DK$，因为 $DK<BD=0.3$cm，$\therefore AH<0.6$cm，这就说明了这个等腰三角形的三条边上的高都小于 1cm.

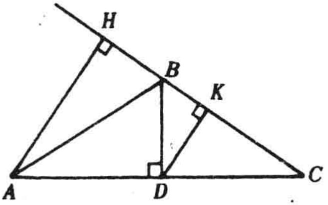


图 4

б)答案：不可能. 在直角三角形中，斜边都大于直角边，既然这个三角形的每条边上的高都等于 2cm，那么这个三角形的每

条边长都大于 2cm，其面积肯定大于$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\text{cm}^2$.

**问题 1—7** 答案：从 3 到 7 边形都可产生. 可以看出，三角形和凸四边形相叠所成的图形一定是凸多边形. 这个凸多边形的不同的边仍旧是三角形和四边形的不同的边的一部分，因而这个凸多边形的边数不可能超过 7 边.

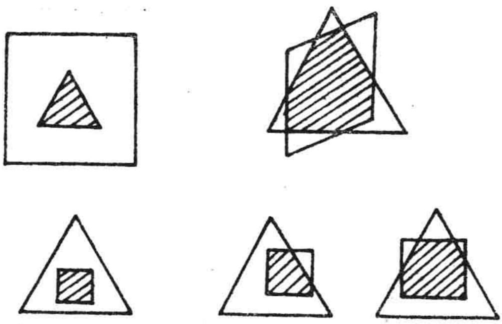


图 5

▽ 与此题一样，一个凸 $n$ 边形和一个凸 $m$ 边形重叠后形成的凸 $k$ 边形，一定有 $k\leqslant n+m$.

**问题 1—8** a）答案：可能. 如图 6 中的涂色，就是一典型例子.

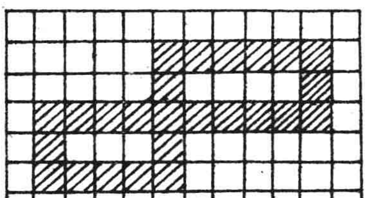


图 6

▽ 一般地来说，对于任意的 $n\geqslant 15$，能使涂了色的 $n$ 个格子的每个格子相邻的格子数是偶数. 在 $n<15$ 时，$n$ 必须是偶数方能按上述法则涂色. б）答案：不可能. 假设我们已按要求给 25 个格子涂色，试找出涂了色的格子的公共边的数目并从中引出矛盾，为此，只需数出这些格子中与相邻格子的公共边的数目并求其和，然后以 2 除之（因为每条公共边重复计算了两次）. 每个格子有奇数个相邻的格

子.而格子共有 25 个,25 个奇数之和为奇数,故此和不被 2 整除,得出矛盾!

▽ 通过本题的讨论,说明了这样一个事实:对于任意的奇数 $n$ 来说,$n$ 个格子要涂上颜色,使得与其中每个格子相邻的格子为奇数个是不可能的;如果 $n$ 是偶数,要使相邻格子有奇数个是能做到的.

**问题 1—9** a)答案:存在.图 7 就是由六条线段组成的折线,它与组成折线的每条线段都相交一次.

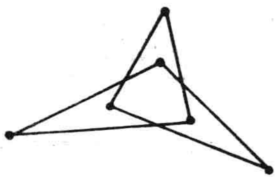


图 7

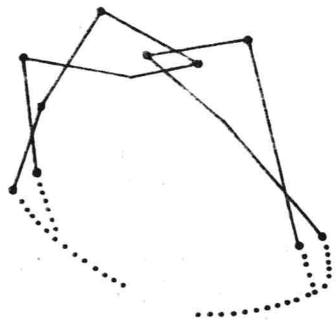


图 8

对于任意的偶数 $n\geqslant 8$,由 $n$ 条线段组成的封闭曲线亦能与其组成的线段都相交一次,图 8 就直观地表明了这种情况.б)答案:不存在.为什么不存在呢?道理很简单,封闭折线要与组成它的每一条线段都相交,每一个交点就得有两条线段.因此组成它的线段数必须是偶数,而 7 是奇数,因此不存在.

▽ 本题的讨论,表明了一般性的问题:不存在由奇数条线段组成的封闭曲线与组成它的线段都相交一次.

**问题 1—10** a)答案:可能.例如图 9.

▽ 这道题,很像著名的问题"小房和水井"的问题:如图 10,三座并排的小房子对面有三口水井,能否在地面上绘出九条

这样的路线，使得每座房子到三口水井的九条路线彼此不交叉？在这里房屋和水井看成六个顶点，9条路看成线段.

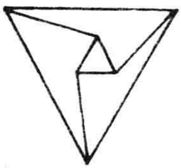


图 9

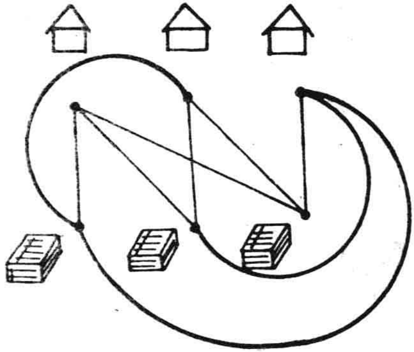


图 10

可是，"小房和水井"问题中的路绘不出来. 关于这种类型的问题的严格证明，需要用到欧拉定理：如果一个连通的平面图有 $n$ 个顶点，$m$ 条边，$f$ 个面，那么有 $n+f-m=2$. 有关这方面的知识，在拓扑学中都有专门的定理可解决. 6)答案：可能. 图 11 就是其中一例.

▽ 图 11 就是一个金属的八面体的框架(图 12)压扁到一个平面上的图形.

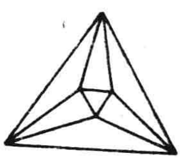


图 11

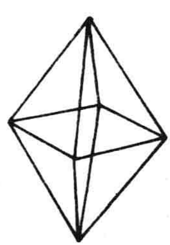


图 12

**问题 1—11** 答案：可能. 图 13 就是由三根铅笔九根线构成的稳定的空间结构.

▽　如果所有的线长都相等，且其长度等于 $l$，而三根轴长均等于 $d$，对于如图13所绘出的这个结构来说，必有 $d=l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\approx 1.47l$. 在我们所绘出的这个结构中，轴的端点构成两个等边三角形，这两个等边三角形所在的平面互相平行垂直，而这三条轴不相交. 用数学的方法来证明这个结构的存在(即必要条件是 $d=l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$)是很困难的. 这个结构是六十年代建筑大师 Б・富利尔所发现，其后出现了这种模式的许多种结构，作者在写这本书的时候，提出了下面的问题：用一些轴和没有伸缩的线做成一个坚实的空间结构，使得轴与轴不相交，而轴的每个端点恰与两线相连. 这个结构被建筑大师 B・高列依曲可：斯赫玛所做成，绘成图 14.

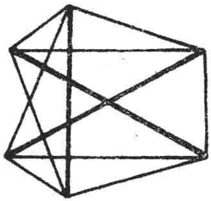


图 13

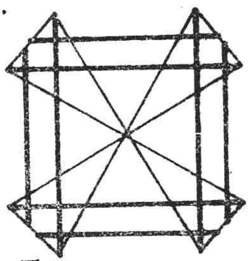


图 14

**问题 1—12**　a)答案：正确. 两个数的差被 7 除时，余数只有以下情况：余 0，1，2，3，4，5，6. 假设不可能从 100 个整数里选出 15 个整数，使得它们任意两数的差能被 7 整除. 那就意味着除以 7 余 0 的数不超过 14 个，除以 7 余 1 的数不超过 14，除以 7 分别余 2，3，4，5，6 的数亦不超过 14. 这样一来，所有的数就不

超过 $14\cdot 7=98<100$，这与题设相矛盾，因此假设不成立，从而结论成立.

▽ 这个讨论，是抽屉原则运用之典型例子. 抽屉原则：若把 $mn+1$ 个物体放入 $n$ 个抽屉之中，那么至少有一个抽屉含有 $(m+1)$ 个或者更多个物体.

б)答案：不正确. 只用枚举法可证. 从 1 到 100 共计 100 个自然数中，7，14，…98 除以 7 余 0，共有 14 个数；除以 7 余数为 1 或 2 的数分别有 15 个，除以 7 余 3，4，5，6 的数分别有 14 个数，故从 1 到 100 的自然数中，任意两个整数的差能被 7 整除的数不是 16 个数.

**问题 1—13** a)答案：正确. 假设所书写的五个数中，最大的数是 $a$，最小的数是 $b$. 假设在 $a,b$ 之间有某数，命题显然成立. 假如 $a,b$ 并排在一起，那么 $a,b$ 的左边或者右边总有两个数，它们或者与 $a$，或者与 $b$ 组成递增的或递减的数列.

**致教师** 关于这一点，有一般的定理，定理是这样叙述的：由 $(mn+1)$ 个元素组成的一个有穷序列，总可以找到由 $(m+1)$ 个元素组成的子序列，或者由 $(n+1)$ 个元素组成的子序列. 它们或者是递增的，或者是递减的.

按照定理，$5=2\cdot 2+1$（即 $m=n=2$），那么子序列就由 $m+1=3$ 个元素组成，可能是递增的，可以是递减的.

б)答案：不正确. 在此，我们仅举一反例就足够了.

如果我们取 9 个数 3，2，1，6，5，4，9，8，7，而且把它写成三个递减的三组：321，654，987. 那么在这 9 个数中，无论如何也不能找到一列四个数是递增的或者是递减的.

**问题 1—14** a)答案：不可能. 如果每行格子内的数的和是正数，那么组成这个表的全部数的和就应该是正数，如果每列格子内的数的和是负的，那么组成这个表的全部数字的和就应该

是负的．因此这样的表格造不出来．6）答案：可能．例如：$-9,5,5;-9,5,5;-9,5,5;\cdots$在这里，有 16 个数是 5，9 个数是（$-9$），显然，任意相邻的三个数的和是 1，而全部的 25 个数的和是 $-1$．

▽ 本题推广到一般问题是：$n$ 个数写成一行，其中任意相邻的 $k$ 个数的和是正的，全体 $n$ 个数的和能否是负的？答案是这样的：如果 $n$ 能被 $k$ 整除，命题就不成立；如果 $n$ 不能被 $k$ 整除，那么命题是成立的．例如问题 1—14 6）中的 $n=25$，$k=3$，25 不能被 3 整除，故这 25 个数的和可以为$-1$．这个问题的结论是很有趣的，类似于此，还有这样的事实存在：在某一年里，任意连续的 5 个月中某人的经费支出超过收入，然而在整个一年里，这人的收入却又超过支出．

$m$ 个数写成一行，称其中相邻的$q$个数的和为 $q$-和（$q\leqslant m$）．人们发现，如果对于自然数 $m,n$ 和 $k$，不等式 $m\leqslant n+k-d-1$（其中 $d=(n,k_1)$成立，则可以写出一行 $m$ 个数，使其所有的 $n$-和取同一种符号，而所有的 $k$-和取另一种符号，并且这些和可以取预先任意指定的值．

事实上，我们列出有（$k+n-d-1$）个未知数、$k+n-2d$ 个线性方程的方程组：

$$
\begin{aligned}
&x_1+\cdots+x_n &&=a_1,\\
&\quad x_2+\cdots+x_{n+1} &&=a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&\quad x_{k-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &&=a_{k-d},\\
&x_1+\cdots+x_k &&=b_1,\\
&\quad x_2+\cdots+x_{k+1} &&=b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\\
&\quad x_{n-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &&=b_{n-d}.
\end{aligned}
$$