本构关系理论及应用的新进展

——第二届材料本构关系短期讲座及学术讨论会专题报告集锦

重庆大学工程力学研究所
材料本构理论及应用研究室

1987 年 6 月 重庆

前　　言

材料本构关系的研究，对于在更高的层次和更符合材料物性的基础上，发展“固体力学”，“材料的力学”，“岩土力学”等学科及其相关分支和交缘领域，具有十分重要的意义。它为正确描述材料在复杂条件下的响应特征，澄清某些似是而非的传统模型和解决至今仍难以分析的某些力学问题提供了新的基础和希望。实践已经证明一些耗时很长（或耗资巨大）的非线性理论分析（或数值计算），常常由于作为其基础的物性方程与材料的实际特性相差太远，而失去了其应有的意义。有见识的应力分析工作者已经深切感到材料本构关系的研究远远落后于计算机和计算力学的状况是十分不合理的，这也许是一些著名的计算力学家，如Oden，Zienkiewicz和Atluri等也卷入到当前国际上这股持续不衰和意义深远的研究本构关系的热潮中来的原因。另一方面从事本构关系的工作者也已感到，本构理论的研究应与算法的发展从全局上密切地联系起来。本构与算法研究之间信息的相互反馈和配合，对于寻求恰当的算法及在复杂边初值条件下检验本构方程的正确性和预言能力都是有好处的。这种穿透狭窄力学分支的壁垒，从大系统的角度进行研究的思想正是导致我们长期寻求不用屈服面进行弹塑性场分析的方法论的基础。这方面的两个较大的进展，一是无屈服面内时本构方程自动加卸载特性的证明和三维响应的分析，另一是无屈服面大变形内时本构方程及其算法的研究。前者在研究循环加载（特别是裂纹前缘区应力场）下的响应特性是不容低估的，后者有多方面的应用，其中也包括宏观与细观相结合的损伤力学的研究，这与另一项关于塑性—蠕变相耦合的内时分析工作一样，刚刚完成将在大会报告但来不及编入本专集中。

强调本构关系及其应用的研究向诸如淬火、焊接、铸造那些热—力—金相组织耦合十分复杂和重要的工程问题进军，并重视物理机制

及细观力学与宏观表象相结合的分析是本专集中包含有关这些领域的两篇报告的原因，相信王志刚博士和马鸣图博士在这些方面的工作将会给人以启迪。专集中收入的中国科学院韩式方副研究员关于流变学的报告，对于我们从连续介质力学总学科的概貌上来把握固体与流体本构关系研究的共性与个性，无疑将会是大有裨益的。

在一个快速发展的信息时代中，还有什么比获得最新信息更迫切的呢？还有什么比信息上的互相支援更加重要的呢？本着这样的信念，将自去年以来我们在固体力学前沿领域及交缘领域中生长点信息的研究，摆在本专集的第一部分。写作该部分时笔者力图强调那些隐含在所涉及的问题中的思想和内在矛盾，而避开大量数学公式的引用和文献的详尽罗列。换句话说笔者企图强调的是从连续介质力学总学科的高度上来介绍新的学术思想和方法论，而不企图取代文献综述式的论文应予完成的任务。

本专集是根据各位讲演者在四川省力学学会固体力学学科委员会和重庆大学工程力学研究所于1987年6月8日—14日在重庆联合召开的第二届材料本构关系短期讲座和学术讨论会上的讲稿编辑而成的，其中包含了不少最新研究成果，有些是尚未正式发表的。在本构关系这一国际前沿领域处于激烈竞争的背景下，作者们无私地奉献这些宝贵的成果给与会者与读者，是希望那些在国际上已取得领先地位的领域内，有更多的有志者卷入以便利用我们已取得的某种优势，在我国老一辈力学家的指导与帮助下，进一步在“国际上争一日之短长”以提高中华力学工作者的地位，扩大我们在国际上的影响。若果能如此，则我们在重庆城二千年大祭的日子里，在相隔不到一年的时间内两次在美丽山城的相聚，其意义就不会是稍纵即逝的。

范镜泓

1987年5月30日

固体力学前沿领域及交缘领域生长点信息的研究

范镜泓　高芝晖

（重庆大学工程力学系）

目　　录

金属和合金中的Bauchinger效应　　马鸣图

本构理论在工程流变学中的应用　　韩式方

细观力学的最新发展及展望

近年来细观力学的研究引起了人们的注意。研究的目的之一是寻求宏观现象的细观物量基础，以建立细观与宏观相结合的符合材料真实响应特性的非线性本构关系；其进一步目标是寻求材料的结构、组织、成分与性能的关系，以便为材料改性及新材料的设计提供一定的理论基础，后者显然要卷入物理、力学、应用数学和材料学等多学科的综合努力。

尽管多晶体细观塑性力学的研究取得了进展，但Drucker（1984）对它的批评[1]，都促使人们对它的意义作出新的评价。新的更着重于动力学特性的细观力学分析被提出和发展[2]，具有较大的活力。而多组分介质细观力学的进展，则展现了其广阔应用的潜力。

（一） 多晶体细观塑性力学

单晶体塑性力学的研究已获得了重要的进展，美国通用电气公司已成功地将其应用于航空发动机单晶材料制成的叶片上，成倍地提高了其疲劳强度。现在的问题是如何估价自1938年Taylor以来用单晶的应力应变关系寻求多晶材料宏观响应特性的一系列努力。自从Eshelby求得了椭球体嵌入一无穷大的弹性介质中有关约束系数等的解答之后[3]、Kröner, Budiansky和Wu提出了考虑晶体间相互作用的第一个自从容模型—KBW模型[4]，接着Hill建立了更严格的增量自相容关系[5]。Hershey和Hill等讨论了非均匀滑移场与应力场的情况；Hutchinson对自相容方法也做出了重要贡献，其结果对板的弹塑性屈曲有意义，Weng应用自相容方法研究了金属的蠕变特性、蠕变松弛，循环扭转应变对多晶体拉伸蠕变之影响，塑性——蠕变的耦合的细观力学分析。Lin考虑到各个晶体由椭球体组成的假设不符合实际，提出了由64个晶体组成的立方块作为基元模拟多晶体的性能[6]，Tokyda等将其应用于复杂路径情况，得到了当从拉伸应变转向扭转的应变路径后，拉伸应力松弛等Ohashi试验给出的结果。关于晶体塑性理论的有关情况可详见Asaro的论文“晶体与多晶体的细观力学”[7]。

现在揭露的事实是，由晶体塑性理论计算的“位错密度远远小于对经受塑性变形的结构金属或合金观察到的值”。Drucker以铝为例，谈到铝单晶的滑移大约小于G/10000的剪应力，而使结构铝合金产生塑性应变则约需G/100的剪应力，即相差100倍左右。对此Drucker给出了下述评论（1984，[1]）：“对结构铝合金塑性变形要求的剪应力大大高于组成的单晶体的剪应力的这一事实，表明该方法[注：指基于单晶分解剪应力——剪应变关系去求多晶体塑性本构关系的方法]不象有描述宏观现象某些突出特性的能力”。究其原因Drucker认为在结构合金中存在着单晶中一般不出现的局部高位错区，后者由位错林和位错网组成。他认为“正是高位错区对高剪应力的响应特性，而不是单晶的较弱的应力响应决定着重要的和有兴趣的宏观特性，相对较弱的晶体位错区简直是被带着运动的”。进而Drucker对由单晶计算结构金属与合金的方法提出了一系列带基本性的问题[1]。

人们本来期望由单晶计算多晶特性的计算上的复杂性能由计算机的发展而得到较好地解决但现在涉及的则是基本模型过于基本简单，难以定量地反映多晶体属性的问题，这就使问题决复杂了。

（二） 非弹性细观力学的新发展

另一方面Aifantis认为，晶体塑性理论的方法用的是现象学的分解剪应力——剪应变关系，强调的是几何特性及相容条件等方面，但对引起位错的机制特别是对位错的力、流、源(汇)等动力学方面却缺乏深入的研究，而这些是可以应用连续介质力学的基本定律加以分析的〔1〕。为此他提出将研究的介质看成是“正常状态”（normal state）和“激励状态”（excited state）的迭加，并得到了相应于位错激励状态的有效质量与动量的守恒方程〔2〕：

$$\partial_t \rho_k + div\, \mathbf{j}_k = \widehat{C}_k \qquad (a)$$

$$div \mathbf{T}_k^D = \widehat{\mathbf{f}}_k \qquad (b)$$

式中 $\mathbf{T}_k^D$——位错状态自身作用造成的对称应力

$\widehat{\mathbf{f}}_k$——晶格点阵对位错的作用力

ρ——位错状态的有效质量密度

$\mathbf{j}_k$——流；$\widehat{C}_k$——源或汇项，用来描述位错的产生、湮没等；而下标k则表示位错的类等。Aifantis和其它人（Perzyna，Rice）近年来认为通常的内变量演化规律应该用完整的守恒律代替（或推出），即除与率相关的项以外还应包括描述基元体内位错流通量的散度项（即$div\, \mathbf{j}_k$）组成（见方程a）。利用各向同性函数的表征定理和Cayley-Hamilton定理，确证了有明确物理内涵的细观本构关系以代替唯象学的细观分解剪应力——剪应变关系。具体地说$\mathbf{T}^D$，$\widehat{\mathbf{f}}$和$\widehat{\mathbf{C}}$应是位错密度、类平均自由路程长、滑移面及其垂直面上位错流及相应剪应力之显式函数。从细观到宏观的转换是用Lagange乘子以熵产极大化为目标来求得的（寻求极值时用与宏观应力方向相连的宏观倾向张量以代替与滑移相连的多晶体倾向张量）。整个理论系统不复杂，但却得到了一些十分有意义的结果：

1. 经典塑性理论、粘塑性理论的主要结果以及Hart等从内变量理论出发求得的本构关系，可在某些条件下由该理论系统推出，且这些宏观理论的现象学系数，如Prantl-Reuss定律中的λ可用细观量给予表征，因而赋与了明确的物理意义。

2. 材料本构关系中的非凸性，如应变软化和汽——液转换中的Van der Waals方程等都可用新的细观理论加以描述。过去认为非凸的软化应力——应变曲线或应力——应变率曲线在物理上是缺乏根据的，或者把它们归结为几何上的非连续性，或者认为它们与稳定性不唯一性的要求不相容。理论分析表明只要承认由于位错通量$idv\mathbf{j}$等将引起非均匀的位错滑移，这一问题就能得到机理上的描述。它在宏观本构方程中引入的结果将是增加计及应变（或位错密度）等的高阶梯度项。由此可给予应变局部化引起的持续剪切带(PSB)及有限剪切带宽度以非线性的数学描述。上述非凸性的分析（其中还联系到Maxwell规则(MR)在旋节区（Spinodal region）的成立）将要求经典不可逆热力学的能量方程中增加一项与造成密度、应变、应变率和内变量的高阶梯度所作的功相关的额外的内能项。

3. 为解释 Nagtaegaal和de Jong关于简单单调剪切大塑性变形所出现的不合理剪应力波动现象，Dafalias, Loret和Onat 分别引入了塑性自旋度（详见本专集“塑性大变形理论矛盾的焦点及启示”一节），它们是根据 Mandel和Kratochvil 等现象学的工作而发展的。在这里关于塑性自旋度宏观本构关系的结果，都不难用新的细观力学理论推导出来。

* * *

关于复合复相材料及岩土类材料等多组分细观力学的进展情况，涉及到大量的材料与信息，由于篇幅限制，我们拟在大会报告中予以介绍。

参 考 文 献

〔1〕 D. C. Drucher. Material Response and Continuum Relations; Or From Microscales to Macroscales, Journal of Engineerig Materials and Technology, Vol. 106(1984), 286—289

〔2〕 E. C. Aifantis, Towavds a Mechanics of Micromechanics, Second International Conference of Constitutive Laws for Engineering Materials. January, 1987. Tucson, USA.

〔3〕 J. D. Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inlustration and Related Prolems Rhys. stat. Sol., Vol. 68 1981, P.121.

〔4〕 Budiansky, B., and Wu. T. T., “Theoretical Prediction of Plastic Strains of Polycrystals”, Proceedings, *4th* U. S. National Congress of Applied Mechanics, 1962, P. 1175—1185.

〔5〕 R., Hill, Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals, Journal of the Mechanics and Physics of solids, Vol. 13. 1965. 89—101.

〔6〕 T. H. Lin, Analysis of Elastic and Plastic strains of a Face-Centered Cubic Crystal, J, Mech, Phys. Solds, Vol . 5, 143—159.

〔7〕 R. J. Asaro, Micromechanics of crystals and Polycrystals. Advances in Applied Mechanics, Vol. 23. Academic press, 1983 PP 1—115²

塑性大变形理论矛盾的焦点及启示（概要）

早在1975年E. H. Lee就曾指出〔1〕："假如人们要去研究有限变形下的弹塑性理论，那就必须面对这人问题，即塑性理论并未进入已对有限变形发展了的连续介质力学的网络之中。如果人们注意Noll与Truesd ll的书，他们简单地认为塑性理论并没有很好地建立起来，认为它不满足旋转不变性的要求，因此在该学派的一系列书和论文中，对该理论不予讨论，简直无视了它的存在"。在大变形的理论网络中简单的应力应变关系的概念必须加以扩充以包含旋转的效应在内，这出现了一些列重要的特点，例如总应变不能再表成弹性应变分量与塑性应变分量之和；对此Lee提出了用卸掉应力后的中间构形来进行研究的概念，若记该中间构形为P则现时构形相对于初始构形的变形梯度F，可看成是该中间构形P相对于初始构形的塑性变形梯度$\underset{\sim}{F}^p$与从中间构形至现时构形的弹性变形梯度$\underset{\sim}{F}^e$之矩阵积

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}^e \underset{\sim}{F}^p \qquad (A)$$

为了考虑大变形时的转动效应，人们引入了与材料主轴共旋的Jaumann应力率〔II〕，这些使大变形的研究深入了一步。

意想不到的是1981年斯坦福大学举行的有限塑性变形理论讨论会上，Nagtegaal和de Jong公布了下述使人迷惑不解的计算结果，即在简单剪切大变形下单调增加的剪切应变导致了上下波动的不符合实际的剪应力响应〔III〕。计算采用的是Mises屈服条件，Prager Ziegler随动强化规则和Jaumann应力率。具体地说，他们将原来适用于小应变的Prager规则

$$\dot{\alpha}_{ij} = C(\overline{\varepsilon^p})D^p_{ij} \qquad (B)$$

推广（式中D^p——塑性应变率；α_{ij}——屈服面中心的座标或称背应力，"·"记物质导数；而C记随动强化系数），即引入与瞬时构形共旋的Jaumann导数$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$以代替物质导数$\dot{\alpha}_{ij}$，于是本构关系变为：

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij} = C(\overline{\varepsilon^p})D^p_{ij} \qquad (C)$$

而$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$与$\dot{\alpha}_{ij}$是通过即时构形的涡旋张量$W_{ij}$来加以联系的，即

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} - W_{ik}\alpha_{kj} + \alpha_{jk}W_{ik} \qquad (D)$$

为了解释这一奇怪的现象，Nagtegaal, de Jong, Lee Dafalias, Loret, onet, Atluri和

Lehmann 等进行了研究和热烈的讨论。一种认为这是由于所采用的本构方程（例如 Prager-Ziegler 强化规则）与材料的本构特性不吻合而造成的，因此应加以修正，例如 Lehmann 等。另一种则认为是由于采用的Jaumann应力率不恰当而造成的，为此Dafalias，Lort和Onat 分别独立地引入了塑性自旋率（Plastic Spin）的概念，从而避免了剪应力的波动现象；其它人采用极分解的旋转矩阵 **R**，以及左 Cauchy-Green 应变张量对角化时的旋转矩阵$\mathbf{R}_E$等来代替(D)中的涡旋张量W_{ij}也对应力波动现象进行了抑制。

一个饶有兴趣的问题是，什么是上述剪应力波动现象的物理背景。让我们再来观察单调加载时大变形的剪切实验，若剪应变率为$\dot{\gamma}$，则容易求得涡旋张量为$\dot{\gamma}/2$，即该剪切平面内附着于连续介质上的线旋转了，这是从连续介质的观点来看问题。但若从材料本身来看问题，情况就不是这样，事实上在简单剪切变形中材料只会出现错动（即层与层之间的相对滑移），而并无材料结构的转动，这个事实迫使人们承认连续介质的转动与材料结构的转动并不是一回事，这一认识上的深化使人们找到了剪应力波动现象的关健，即必须将材料的涡旋率 $\boldsymbol{\omega}$ 与连续介质的涡旋率**W**区别开来，其间的差别就是塑性自旋率$\mathbf{W}^p$或一般称之的相对自旋率$\mathbf{W}^R$，后者一般来说是与表征材料结构的内变量及应力状态紧密相关的，或者说依赖于于材料的本构关系。这就说明了无论从选择正确的共旋率出发或从修改材料的本构关系出发都有可能抑制剪应力波动现象的原因。

在大变形弹塑性理论研究中的一个重要问题是参考构形的选择问题，前面的讨论隐含着选用现时构形作为参考系是难以建立较严密的大变形塑性理论的，例如要找出相对自旋率$\mathbf{W}^R$，则单靠现时构形是难以实现的。很自然地采用E. H. Lee 建议的卸载后的中间构形作为参考构形是有吸引力的。事实上如果从无应力的中间构形出发，则新的现时构形的变形状态将由两部分组成，一是在中间构形上该瞬时的塑性变形率，另一是附加的由中间构形至现时构形的弹性变形率，由于它们是作用在同一无应力构形上的，因此它们是可加的，这给分析带来了很大的方便。不过这里也存在一系列的问题。首先卸载后的中间构形并不是唯一的，其间可差一刚体转动。其次当卸载后的残余应力点不包含在屈服面内的情况时，就不可能出现纯粹的弹性卸载，因而找不到一个无应力的中间参考构形使得该瞬时的弹性变形能相对它而加以量度。第三从中间构形至现时构形固然可定义塑性自旋率，但其间的函数关系也是较复杂的。

Atluri和Im 在用塑性理论研究大变形时[3]，采用的是无应力的中间构形作为参考构形，为了规定中间构形的倾向采用了Mandel 提出的与中间构形相连的指向矢量概念。为了表示塑性自旋率W^p，他们采用了Loret和Dafalias的办法，即用Wang（1970）给出的表征定理以建立W^p的本构方程，当取级数的首项时有一个表征自旋度的常数m_1必须由附加的扭转实验加以确定。正如本文笔者之一在 Phillps 纪念讨论会上该文报告后批评时所指出的，这种要同时由拉伸试验及薄壁约束扭转试验决定材料常数将大大增加工作量，其实验结果与理论的对比局限于拉伸与扭转的情况，因而尚不足以显示其精确性。

参考构形的另一种选择是初始构形，由于整个弹塑性变形过程都映射回初始构形上来分析，其客观性原理能较容易地加以满足，也避开了各种共旋率及附加的本构关系带来的困扰，因而与之有关的大变形理论可建立在较坚实的基础上。其缺点是如处理不当则要贮存整个过程的信息，且由于从现时构形映射至初始构形时要卷入运动学的各量，这可能对直接显示变

形的物理过程带来困难。范与彭在初始构形的基础上,发展了符合客观性原理的内时弹塑性大变形本构方程[4],该方程的形式符合范提出的耗散型材料本构形式不变性定律的要求,发展的算法避开了大量存贮过程信息的累赘,材料常数只需通过拉伸实验加以确定,加载过程应力变形的状况能清楚加以显示,并在压缩实验与颈缩实验中获得了与理论计算较为吻合的结果。该工作在Phillips纪念讨论会上报告时获得了较高的评价[5]。尽管如此由本文揭示的西方科学家目前在大变形塑性理论方面的种种努力及概念上的发展是值得我们认真加以注视和分析的。

参 考 文 献

〔1〕 E. H. Lee, Speech in General Discussion of Workshop on Ineleastic Constitutive Equctions For Metals. April 1975 Rensseluer Polytechnic Institute.

〔2〕 范镜泓、高芝晖，非线性连续介质力学基础，第六章，重庆大学出版社，1987。

〔3〕 S. Im and S. N. Atluri. Finite Deformation Plasticity: Constitutive Modeling and Computational Implementation. Presented in Memorial Symposium of L. A. Phillps on "Plasticity. Foundations And Future Directions", University of Florida. Jan. 28—30, 1987.

〔4〕 Fan Jinghong and Peng Xianghe, An Endochronic Constitutive Equation for Large Deformation Plasticity With, Experimental Verification. Submitted to Internetiunol Joumal of Plastiçty.

〔5〕 Fan Jinghong, Recent Developments of Endochronic Plesticity in spatially Varying Strain Fields, Presented in Memorial Symposum of L. A. Phillips, University of Florida. Jan 28—30, 1987.

Lehmann和Kestin塑性热力学观点的探析

Lehmann 和 Kestin 这两位国际知名学者，虽然最近已分别从西德鲁尔大学和美国布朗大学退休，但学术上其影响仍是深远的，特别是去年九月他们在国际理论与应用力学联合会（IUTAM）为纪念杰出的法国力学家J. Mandel举行的“固体中的热力学耦合”专题讨论会上发表的论文更是他们学术上新的高度的标志[Ⅰ][Ⅱ]。认真对他们的学术思想进行探析、并对我们已进行的工作进行反顾和对比，这也许是很有意义的。

Lehmann在将含内变量的不可逆热力学用于非等温、热——力耦合、大变形的非弹性变形分析上作了大量工作。他是在经典不可逆热力学的框架上来研究问题的，并考虑与区分下述四种过程：

1．严格的可逆过程，即由热力学状态方程控制的可逆变形过程，可看成由一系列平衡状态所组成；

2．不可逆的耗散过程，即由一系列非平衡态及动力松弛规律来表征的过程；

3．一系列约束平衡态表现的耗散过程，例如塑性变形。其特点为细观不可逆过程的松弛时间很短，以致宏观上表现为一系列的平衡态。

4．细观上而非宏观上由状态方程控制的非耗散过程，它由一系列约束平衡态组成。出现在外部功与随机内部可逆过程在细观上干涉且导致内部状态相应改变时。

上述第一、二、三种分别对应于宏观弹性，粘塑性与塑性的情况， 而第四种在Lehmann 的理论体系中占有较重要的地位需要专门加以说明。这种过程对应着局部的微结构变化的情况，例如晶格缺陷（位错等）对应的微结构和微应力场。它有下述特点：（1）这种微结构的变化是弹性的；（2）它贮存着一定的弹性能，不过很小，大约只占Helmholtz 自由能的10％以下；在近常研究宏观响应时可不予考虑；（2）由于这种弹性能是贮存在无规则的微结构变形中的，因而在通常的宏观弹性卸载时，它不能释放出来；（3）在一定的情况下这种能量可以作为有用功释放出来，由此可以解释一些通常经典塑性理论中难以解释的效应。例如Lehamann指出的在后续屈服面不包含应力坐标原点的情况下由卸载至反向加载时， 经典塑性理论将预言违反热力学第二定律的情况。而对这种宏观塑性功为负的情况却仍能造成塑性应变的恰当解释，正是在微结构中贮存的弹性能释解出来作了有用功。

尽管Lehmann 的上述关于第四类过程的观念是正确的，但在其理论体系的构造上却显得较为繁冗和不够清晰。他把内变量与微结构的非耗散弹性过程也加以联系，因而内变量的变化既对应耗散过程也对应于非耗散过程，而为了描述不可逆熵产，则还必须引入另外一个难以确定的不可逆耗散 $T\dot{\eta}$，这使得问题复杂化了。在[Ⅲ][Ⅳ]中，我们把不可逆热力学过

程定义为跨远ε_I子空间不断耗散能量的过程，把内变量作为宏观描述内部组织变化引起的耗散过程的量，并由演化方程去确定的量，这样理论系统较简明（在Lehmann的理论体系中不仅需要内变量的演化方程还需要非弹性应变的演化方程），但也能描述由于微结构贮存的弹性能这类过程。事实上如文〔Ⅲ〕中图2本专集第二部分图所示，当宏观应力卸去后，由于各基元的弹性结构不同，它们不会都恢复，而会贮存少量的弹性能。从该模型还可考虑，如果内变量不只表征阻尼器的位移，还要表征部分弹簧的变形，则造成的困难是不难想象的。

Lehmann为了解决经典塑性力学的另外一些困难引入了总体过程与局部过程的概念，它们分别对应于不同的机制。由于组织的不均匀与晶粒的各向异性，塑性变形首先在个别晶粒中发生，这就是局部过程，它相应于点阵缺陷的发生、分解、再分布，在这一局部过程中须要的功很小，且主要是非耗散的。当晶粒中位错增殖并在晶界塞积使应力达到某一定值后，可使相邻晶体中的位错源开动，以使位错运动从一个晶粒传播到另一晶粒，而塑性变形就由局部过程扩散到整体过程，这时滑移在物体的大区域中进行，它主要是耗散的。Lehmann认为这是两类不同的机制，因而应引入两类不同的屈服面。并指出在非弹性变形的开始，卸载后再加载引起新的塑性变形的开始及载荷路线发生转折处，局部过程起主要作用，例如在循环加载与分叉问题中。在先作用拉伸应力使之屈服再改为剪应力的转折点，具有光滑曲面的经典塑性理论不能预言塑性变形产生，但用局部过程的屈服面却能解释产生塑性变形的现象，这表明它在解释有时很重要的二次效应方面是有意义的。一个饶有兴趣的问题是Lehmann引入局部屈服过程的思想与内时理论有着什么样的联系与区别。诚如本专集第二部分§2.2表明内时理论在不引入宏观与细观屈服面的前提下能较好地解释经典塑性理论难以解的一些效应（例如在上述由拉应力至剪应力的转折处，将产生高阶的塑性应变增量，而不是纯粹的弹性变形，以及Oheshi观察的在应变空间中由拉应变转向剪应变后拉应力的松弛现象），实际上Lehmann引入的局部过程的屈服面表征着实验的事实与较严密的塑性理论的发展都要求承认在很小的应力或其改变下都能引起塑性变形，这正是内时理论的一个基本出发点。内时理论不用屈服面概念作为塑性理论发展的前提，因而可以避开两套屈服面引入的种种困难，但又能避开经典塑性理论的矛盾。至于在塑性变形发展过程中不同阶段特性的变化，诚如我们在推导新型弹塑性内时本构方程中指出的，它可用不同内变量分阶段起主要作用的观念来加以描述〔Ⅳ〕。

Lehmann在研究大变形时所采用的描述方法是值得一提的。它用的是随体座标系，即座标系轴嵌在物体中跟随物体一起变化而保持各质点的座标值不变，并采用Hencky应变张量，这种方法有一系列优点：（1）从一开始就避开了E. H. Lee的$\mathbf{F}^e\mathbf{F}^p$分解刚体旋转带来的种种困难，这是采用随体座标系并直接对应变张量进行分解而不是对梯度分解带来的优越性，（2）由于采用Hencky应变，则其大变形分解时的体量部分仍能表征体积的变化，且加于的欧拉应力与Hencky应变间对大变形弹性仍保持线性关系，这是用Green应变张量难以加以描述的。Lehmann为了避开在本部分第二节中介绍的简单大变形剪切时的剪应力波动现象，采用了在非弹性应变演化方程中增加了一对垂直性法则修正的附加项，这不是严密的理论分析的结果，事实上它的随体系及对应变张量的直解分开，并不能将连续介质观念上的自旋度与真实材料结构上的自旋度的概念引入到的理论体系中去。

最后要指出的是Lehmann引入的热力学耦合的变温本构方程从形式上看比较复杂，不过涉及内变量及应力变化率的二阶偏导数项通常较小，可以忽略，但Lehmann的理论系统中卷入了很多的材料函数和常数，使它在应用上受到了较大的限制。

*　　　*　　　*

Kestin 在处理不可逆热力学过程时采用的是伴随平衡态。认为内变量 ξ 演化过程一般是耗散过程，其松弛时间可表示为 $\tau_\xi = \xi/\dot{\xi}$，而外部变形过程的松弛时间为 $\tau_W = \varepsilon/\dot{\varepsilon}$，两种松弛时间的相互关系反映了外部作用与内部过程的相互作用，从而区分不同的过程。它并提出了由分析位错发展塑性变形分析的方法，当位错密度通过 Frank-Read 源开动快速增长并产生宏观塑性变形时，即达屈服应力。在Helmholtz自由能表达式中除应变能一项外，Kestin考虑了位错线的能量对自由能的贡献。这一附加项对自由能的贡献虽然是微小的，但它却影响自由能二阶导数的符号，即影响平衡的稳定性。在画出总应变为不同值时自由能与内变量（塑性变形）的关系曲线后，Kestin解释了σ—ε曲线屈服阶段中失稳跳跃现象。将Kestin描述不可逆过程的图象与我们在文〔Ⅲ〕中图1提出的在ε_{Tq}空间或ε_{TqD}空间对不可逆过程及其状态的描述对比也是有意义的。由于篇幅限制，我们拟在报告中对Kestin的工作进行讨论。

参　考　文　献

〔Ⅰ〕Th. Lehmann, Thermo-mechanical Coupling in Large Deformetions Particularly in Bifurcation Problems, Proceedig of IUTAM Symposium on Thermomechanicel Coupling in Solids (Paris, Sep. 1—5, 1986), Elsevier Science Publishing Co, Inc. 1987.

〔Ⅱ〕Joseph Kestin, Metal Plesticity as A Problem in Thormodynamics, Proceoding of IUTAM (Pavis, Sep. 1—5, 1986), Elsevier Science Publishiny Co, Inc, 1987.

〔Ⅲ〕Fan Jinghong, On A Thetmomechanical Constitutive Theory And Its Application To CDM, Fatigue, Fracture And Composites, Proceeding of IUTAM Symposium on Thermomechanical Coupling in Solids (Paris, Sep. 1—5, 1986) Elsevier Science Publishing Co, Inc. 1987.

〔Ⅳ〕范镜泓，内蕴时间塑性理论的新进展，力学进展1985年第3、4期

岩土本构关系研究的新进展

岩土本构关系研究的进展是令人鼓舞的，它孕育着迅速发展的势头，已经并正吸引着越来越多的人从事这一领域的研究。长期来岩土力学的发展得助于金属弹塑性理论的帮助，现在似乎有逆转的势头，即搞金属本构关系的人从搞岩土的人那里学习方法论并洞察那些对金属很重要但未能深入分析与观察的问题，这是今年一月在美国Tucson市举行的第二届国际材料本构关系会议上Cheboche等人的体会，也是我们值得注意的趋势，这再次说明了穿透狭窄力学分支的壁垒。重视交缘领域研究的重要性。

Desai 等提出的描述地质材料和间断（点接缝、界面）的分层模型在方法论上取得了较大的成功〔1〕，其基本思想是从一组基本模型的解出发，运用物理机制的分析和数学处理来逐级处理各种复杂的层次。他们选具有各向同性强化的关联流动的材料作为基本模型，记为δ_0其屈服势记为F。塑性非关联流者记为δ_1，其塑性势为$Q=\overline{F}=F+h$。对有软化的损伤模型则记为δ_{1+r}即在δ_1之基础上，再加上损伤之影响（r为损伤表征参数）。对有空隙水压力p的情况则记为δ_{1+p}，对一般的各向异性非关联的情况则记为δ_2，其塑性势$Q=F+\overline{h}$。其中F取为下列显式：

$$F=J_{2D}-\left(-\frac{\alpha}{\alpha_0}J_1^n+\gamma J_1^2\right)(1-\beta s_r)^m=0$$

式中$S_r=J_{3D}^{1/3}\Big/J_{2D}^{1/2}$，$J_{1D}$，$J_{2D}$，$J_{3D}$分别是偏应力张量$S_{ij}$的第一、二、三不变量，$\gamma$和$\beta$与峰值处包络有关，（$\gamma$表峰值包络斜率，$\beta$定义峰值屈服面处之形状）$n$表征从压缩相到膨胀相的改变；$\alpha$是强化函数。我们首先介绍有应变软化的模型，即$\delta_{i+r}$的处理方法。体积$V$的平均响应被分成两部分，一是连续介质$V_t$，二是损伤介质$V_0$，即将软化响应处理为完好介质响应与损伤部分响应的组合，对完好介质部分可直接使用δ_i模型($i=1$、2、3)，而损伤部分则认为它只能承受水压应力而不能承受剪应力，根据一些物理假设，损伤参数r由下式定义：

$$r=r_u-r_u\,e^{-KJ_D^R}$$

其中γ_u是残余状态的损伤参数。现已证明对于从基本模型δ_0出发的应变软化模型δ_{0+r}，在下列条件下对率无关模型得到唯一解：

$$\frac{U}{\sqrt{2}}\tau/G<1$$

其中U记损伤率和内参数的增量比。该应变软化模型已用来研究导数剪切带出现的分义（该剪切带是损伤参数r的函数）。

再来讨论空隙水压应力的情况，即δ_{2+p}。为了将孔隙流体压力包含在本构方程之内，将有效应力张量用下式表达：

$$\overline{\sigma}_{ij}=(\sigma^{T}_{ij}-p\delta_{ij})-a_{ij}$$

式中p是饱和孔隙材料中的孔隙水压力，σ^{T}_{ij}是总应力张量，而a_{ij}是塑性势Q在有效应力空间中的位置。F和Q将由上式通过有效应力的不变量进行修正，由此即可得出考虑孔隙水压力的增量型本构方程。对于模型δ_2的常数是针对排水条件写出的；对非排水情况，则应增加两个常数，一是实际水液的体积模量K_f和空隙度n。

对于间断处（接缝与界面）的研究也是有启发性的。假设间断面处只有法应力σ_n与剪应力，则可给出间断处和固体有关物理量的下列对照表，并由此可得到间断处的屈服函数F_j和塑性势如下：

$$F_j=\tau^2+\alpha_j\sigma^{n}_{n}-\gamma_j\sigma^2_n=0$$

$$Q_j=F_j+h$$

表1　固体与间断体的相似量

固体	间断体（接缝）
J_1	σ_n
J_{2D}	$\sigma^2_n/3+\tau^2$
$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_V$	V（相对滑移位移）
$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{\varepsilon_{KK}}{3}\delta_{ij}$	u（相对剪切位移）
$\xi=\int(d\varepsilon^p_{ij}d\varepsilon^p_{ij})^{1/2}$	$\int[(dV^p)^2+(du^p)^2]^{1/2}$
$\xi_V=\frac{1}{\sqrt{3}}\int d\xi^p_{KK}$	$\int dV^p$
$\xi_D=\int(de^p_{ij}de^p_{ij})^{1/2}$	$\int du^p$
$W_p=\int\sigma_{ij}d\varepsilon^p_{ij}$	$\int(\sigma_n dV^p+\tau du^p)$（总塑性功）
$W^p_D=\int S_{ij}de^p_{ij}$	$\int\tau du^p$　（偏移塑性功）
$W^p_V=\frac{1}{9}\int\sigma_{ii}d\varepsilon^p_{ii}$	$\int\sigma_n dV^p$　（水压塑性功）

用分层法要求进行的实验以决定常数不多，它已对δ_0，δ_1，δ_{0+r}，δ_2和δ_{2+p}编了有限元程序，已用于解决二维与三维的静力与动力问题：粘土地基、砂土地基、粘土侧向承载短结构、砂土锚、砂土一结构的动态干涉；多孔材料的动力学。

*　　　*　　　*

Lade对金属塑性理论与具有摩摩的材料（Frictional Material）如土壤、岩石、混凝