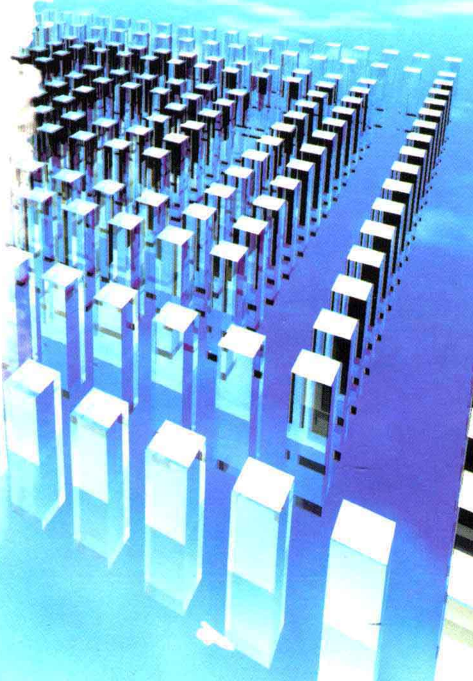
探索未知

数学经典题

北京未来新世纪教育科学发展中心 编



新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社

探索未知

数学经典题

北京未来新世纪教育科学发展中心　编

新疆[redacted]
喀什维吾尔文出版社

图书在版编目(CIP)数据

探索未知/王卫国主编.—乌鲁木齐:新疆青少年出版社;喀什:喀什维吾尔文出版社,2006.8

ISBN 7-5373-1464-0

Ⅰ.探… Ⅱ.王… Ⅲ.自然科学—青少年读物 Ⅳ.N49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 097778 号

探索未知

数学经典题

北京未来新世纪教育科学发展中心 编

新疆青少年出版社
喀什维吾尔文出版社 出版

(乌鲁木齐市胜利路 100 号 邮编:830001)

北京市朝教印刷厂印刷

开本:787mm×1092mm 32 开

印张:300 字数:3600 千

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-3000

ISBN 7-5373-1464-0 总定价:840.00 元(共 100 册)

前　言

在半年之前，本编辑部曾推出过一套科普丛书，叫做《科学目击者》，读者反应良好。然而，区区一部丛书怎能将各种科学新知囊括其中？所未涉及者仍多。编辑部的同仁们也有余兴未尽之意，于是就有了这套《探索未知》丛书。

《科学目击者》和《探索未知》可以说是姊妹关系，也可以说是父子关系。说它们是姊妹，是因为它们在方向设定、内容选择上不分彼此，同是孕育于科学，同为中国基础科普而诞生。说它们是父子，则是从它们的出版过程考虑的。《科学目击者》的出版为我们编辑本套丛书提供了丰富的经验，让我们能够更好的把握读者们的需求与兴趣，得以将一套更为优秀的丛书呈献给读者。从这个层面上讲，《科学目击者》的出版成就了《探索未知》的诞生。

如果说《科学目击者》只是我们的第一个试验品，那么《探索未知》就是第一个正式成品了。它文字精彩，选

题科学，内容上囊括了数学、物理、化学、地理以及生物五个部分的科学知识，涵盖面广，深度适中。对于对科学新知有着浓厚兴趣的读者来说，在这里将找到最为满意的答复。

有了《科学目击者》的成功经验，让我们得以取其优、去其短，一直朝着尽善尽美的目标而努力。但如此繁杂的知识门类，让我们实感知识面的狭窄，实非少数几人所能完成。我们在编稿之时，尽可能地多汲取众多专家学者的意见。然而，百密尚有一疏，纰漏难免，如果给读者您的阅读带来不便，敬请批评指正。

编　者

目　录

灌水问题…………………………………………………… 1
　　问　题…………………………………………………… 1
　　解答方式………………………………………………… 2
海盗分金问题……………………………………………… 7
　　问　题…………………………………………………… 7
　　解答方式………………………………………………… 8
帽子颜色问题 ……………………………………………… 16
　　问　题 ………………………………………………… 16
　　解答方式 ……………………………………………… 17
音乐中的数学 ……………………………………………… 26
　　问　题 ………………………………………………… 26
　　音乐为什么用七个音阶构成 ………………………… 27
称球问题 …………………………………………………… 37
　　问　题 ………………………………………………… 37

记　号 …………………………………………… 41
问题的解答 ………………………………………… 48
一点补充 …………………………………………… 57
过桥问题 ………………………………………… 61
问　题 …………………………………………… 61
一个合理的假设 ……………………………………… 63
一个“很显然”的结论 ………………………………… 67
更多的结论 ………………………………………… 73
过桥的模式 ………………………………………… 85
结　论 …………………………………………… 87

灌水问题

问　题

灌水问题的经典形式是这样的：

“假设有一个池塘，里面有无穷多的水。现有 2 个空水壶，容积分别为 5 升和 6 升。问题是如何只用这 2 个水壶从池塘里取得 3 升的水。”

当然题外是有一些合理的限制的，比如从池塘里灌水的时候，不管壶里是不是已经有水了，壶一定要灌满，不能和另一个壶里的水位比照一下“毛估估”（我们可以假设壶是不透明的，而且形状也不同）；同样的，如果要把水从壶里倒进池塘里，一定要都倒光；如果要把水从一个壶里倒进另一个壶里，也要都倒光，除非在倒的过程中另一个壶已经满了；倒水的时候水没有损失（蒸发溢出什么的）等等。

解答方式

要解决上面这题，你只要用两个壶中的其中一个从池塘里灌水，不断地倒到另一个壶里，当第二个壶满了的时候，把其中的水倒回池塘里，反复几次，就得到答案了。以 5 升壶(A)灌 6 升壶(B)为例：

A	B	
0	0	
5	0	A→B
0	5	
5	5	A→B
4	6	
4	0	A→B
0	4	
5	4	A→B
3	6	

现在我们问，如果是多于 2 只壶的情况怎么办(这样一来就不能用上面的循环倒水法了)？如何在倒水之前就知道靠这些壶是一定能(或一定不能)倒出若干升水来的？试举数例：

(1)两个壶：65 升和 78 升，倒 38 升和 39 升。

(2)三个壶:6 升,10 升和 45 升,倒 31 升。

我们可以看到,在(1)中,$65=5\times13$,$78=6\times13$,而 $39=3\times13$。所以如果把 13 升水看作一个单位的话(原题中的“升”是没有什么重要意义的,你可以把它换成任何容积单位,毫升,加仑——或者“13 升”),这题和最初的题目是一样的。而 38 升呢?显然是不可能的,它不是 13 的倍数,而 65 升和 78 升的壶怎么也只能倒出 13 升的倍数来。也可以这样理解:这相当于在原题中要求用 5 升和 6 升的壶倒出 38/39 升来。

那么(2)呢?你会发现,只用任何其中两个壶是倒不出 31 升水的,理由就是上面所说的,$(6,10)=2$,$(6,45)=3$,$(10,45)=5$,(这里(a,b)是 a 和 b 的最大公约数),而 2,3,5 均不整除 31。可是用三个壶就可以倒出 31 升:用 10 升壶四次,6 升壶一次灌 45 升壶,得到 1 升水,然后灌满 10 升壶三次得 30 升水,加起来为 31 升。

一般地我们有“灌水定理”:

“如果有 n 个壶容积分别为 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$(A_i 均为大于 0 的整数)设 w 为另一大于 0 的整数。则用此 n 个壶可倒出 w 升水的充要条件为:

(1)w 小于等于 $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$;

(2)w 可被$(A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n)$(这 n 个数的最大公约数)整除。”

这两个条件都显然是必要条件，如果(1)不被满足的话，你连放这么多水的地方都没有。(2)的道理和上面两个壶的情况完全一样，因为在任何步骤中，任何壶中永远只有$(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n)$的倍数的水。

现在我们来看一下充分性。在中学里我们学过，如果两个整数 a 和 b 互素的话，那么存在两个整数 u 和 v，使得 $ua+vb=1$。证明的方法很简单：在对 a 和 b 做欧几里德辗转相除时，所有中间的结果，包括最后得到的结果显然都有 $ua+vb$ 的形式（比如第一步，假设 a 小于 b，记 a 除 b 的结果为 s，余数为 t，即 $b=sa+t$，则 $t=(-s)a+b$，即 $u=-s, v=1$）。而两个数互素意味着欧几里德辗转相除法的最后一步的结果是 1，所以 1 也可以记作 $ua+vb$的形式。稍微推广一点，如果$(a,b)=c$，那么存在 u 和 v 使得 $ua+vb=c$（两边都除以 c 就回到原来的命题）。

再推广一点，如果 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 是 n 个整数，$(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n)=s$，那么存在整数 $u_1, u_2, \cdots\cdots, Un$，使得

$$u_1A_1+u_2A_2+\cdots\cdots+UnA_n=s.(*)$$

在代数学上称此结果为“整数环是主理想环”。这也不难证，只要看到

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots, A_n)=((((A_1, A_2), A_3), A_4), \cdots\cdots, A_n).$$

也就是说,可以反复应用上一段中的公式:比如三个数 a,b,c,它们的最大公约数是 d。假设(a,b)=e,那么(e,c)=((a,b),c)=d。现在有 u_1,u_2 使得 $u_1a+u_2b=e$,又有 v_1,v_2 使得 $v1e+v_2c=d$,那么

$$(v_1u_1)a+(v_1u_2)b+(v_2)c=d.$$

好,让我们回头看"灌水定理"。w 是(A_1,A_2,……,A_n)的倍数,根据上节的公式(*),两边乘以这个倍数,我们就有整数 v_1,v_2,……,v_n 使得:

$$v_1A_1+v_2A_2+\cdots\cdots+v_nA_n=w$$

注意到 V_i 是有正有负的。

这就说明,只要分别把 A_1,A_2,……,A_n 壶,灌上 v_1,v_2,……,v_n 次(如果 V_i 是负的话,"灌上 V_i 次"要理解成"倒空 $-V_i$ 次"),就可以得到 w 升水了。具体操作上,先求出各 V_i,然后先往 V_i 是正数的壶里灌水,灌 1 次就把 V_i 减 1。再把这些水到进 V_i 是负数的壶里,等某个壶灌满了,就把它倒空,然后给这个负的 V_i 加 1,壶之间倒来倒去不变更各 V_i 的值。要注意的是要从池塘里灌水,一定要用空壶灌,要倒进池塘里的水,一定要是整壶的。这样一直到所有 V_i 都是 0 为止。

会不会发生卡住了,既不能灌水又不能倒掉的情况?不会的。如果有 V_i 仍旧是负数,而 A_i 壶却没满:那么如果有其他 V_i 是正的壶里有水的话,就都倒给它;如果有

其他 V_i 是正的壶里没水，那么就拿那个壶打水来灌（别忘了给打水的壶的 V_i 减 1）；如果根本没有任何 V_i 是正的壶了——这是不可能的，这意味着 w 是负的。有 V_i 仍旧是正数，而 A_i 壶却没满的情况和这类似，你会发现你要用到定理中的条件(1)。

这样“灌水定理”彻底得证。当然，实际解题当中如果壶的数目和容积都比较大的话，手工来找(*)中的各 U_i 比较困难，不过可以写个程序，连倒水的步骤都算出来。最后要指出的一点是，(*)中的 U_i 不是唯一的，所以倒水的方式也不是唯一的。

海盗分金问题

问　题

海盗，大家听说过吧。这是一帮亡命之徒，在海上抢人钱财，夺人性命，干的是刀头上舔血的营生。在我们的印象中，他们一般都瞎一只眼，用条黑布或者讲究点的用个黑皮眼罩把坏眼遮上。他们还有在地下埋宝的好习惯，而且总要画上一张藏宝图，以方便后人掘取。不过大家是否知道，他们是世界上最民主的团体。参加海盗的都是桀骜不驯的汉子，是不愿听人命令的，船上平时一切事都由投票解决。船长的唯一特权，是有自己的一套餐具——可是在他不用时，其他海盗是可以借来用的。船上的唯一惩罚，就是被丢到海里去喂鱼。

现在船上有若干个海盗，要分抢来的若干枚金币。自然，这样的问题他们是由投票来解决的。投票的规则

如下:先由最凶猛的海盗来提出分配方案,然后大家一人一票表决,如果有50%或以上的海盗同意这个方案,那么就以此方案分配,如果少于50%的海盗同意,那么这个提出方案的海盗就将被丢到海里去喂鱼,然后由剩下的海盗中最凶猛的那个海盗提出方案,依此类推。

解答方式

我们先要对海盗们作一些假设。

(1)每个海盗的凶猛性都不同,而且所有海盗都知道别人的凶猛性,也就是说,每个海盗都知道自己和别人在这个提出方案的序列中的位置。另外,每个海盗的数学和逻辑都很好,而且很理智。最后,海盗间私底下的交易是不存在的,因为海盗除了自己谁都不相信。

(2)一枚金币是不能被分割的,不可以你半枚我半枚。

(3)每个海盗当然不愿意自己被丢到海里去喂鱼,这是最重要的。

(4)每个海盗当然希望自己能得到尽可能多的金币。

(5)每个海盗都是现实主义者,如果在一个方案中他得到了1枚金币,而下一个方案中,他有两种可能,一种得到许多金币,一种得不到金币,他会同意目前这个方

案，而不会有侥幸心理。总而言之，他们相信二鸟在林，不如一鸟在手。

(6)最后，每个海盗都很喜欢其他海盗被丢到海里去喂鱼。在不损害自己利益的前提下，他会尽可能投票让自己的同伴喂鱼。

现在，如果有 10 个海盗要分 100 枚金币，将会怎样？

要解决这类问题，我们总是从最后的情形向后推，这样我们就知道在最后这一步中什么是好的和坏的决定。然后运用这个知识，我们就可以得到最后第二步应该作怎样的决定，等等等等。要是直接就从开始入手解决问题，我们就很容易被这样的问题挡住去路："要是我作这样的决定，下面一个海盗会怎么做？"

以这个思路，先考虑只有 2 个海盗的情况(所有其他的海盗都已经被丢到海里去喂鱼了)。记他们为 P_1 和 P_2，其中 P_2 比较凶猛。P_2 的最佳方案当然是：他自己得 100 枚金币，P_1 得 0 枚。投票时他自己的一票就足够 50%了。

往前推一步。现在加一个更凶猛的海盗 P_3。P_1 知道——P_3 知道他知道——如果 P_3 的方案被否决了，游戏就会只由 P_1 和 P_2 来继续，而 P_1 就一枚金币也得不到。所以 P_3 知道，只要给 P_1 一点点甜头，P_1 就会同意他的方案(当然，如果不给 P_1 一点甜头，反正什么也得不

到，P_1 宁可投票让 P_3 去喂鱼）。所以 P_3 的最佳方案是：P_1 得 1 枚，P_2 什么也得不到，P_3 得 99 枚。

P_4 的情况差不多。他只要得两票就可以了，给 P_2 一枚金币就可以让他投票赞同这个方案，因为在接下来 P_3 的方案中 P_2 什么也得不到。P5 也是相同的推理方法只不过他要说服他的两个同伴，于是他给每一个在 P_4 方案中什么也得不到的 P_1 和 P_3 一枚金币，自己留下 98 枚。

依此类推，P_{10} 的最佳方案是：他自己得 96 枚，给每一个在 P_9 方案中什么也得不到的 P_2，P_4，P_6 和 P_8 一枚金币。

下面是以上推理的一个表（Y 表示同意，N 表示反对）：

P_1	P_2
0	100
N	Y

P_1	P_2	P_3
1	0	99
Y	N	Y

P_1	P_2	P_3	P_4
0	1	0	99
N	Y	N	Y