

流形与几何初步

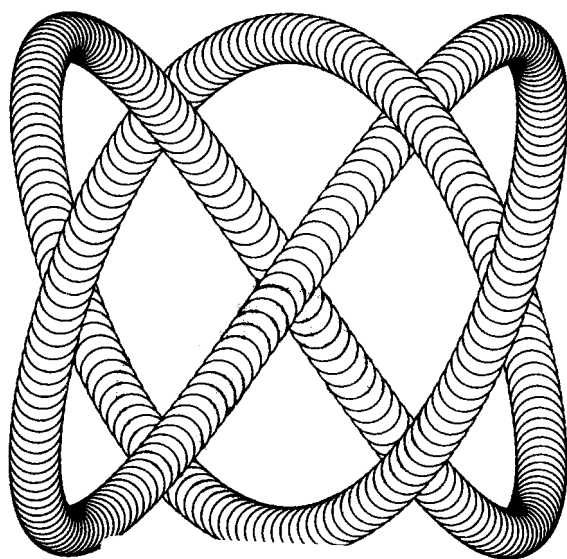
梅加强 编著



科学出版社

流形与几何初步

梅加强 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是微分流形和现代几何的一本入门教材. 它从微分流形的定义出发, 介绍了现代几何学研究中的各种基本概念和技巧. 本书前两章为基础内容, 主要介绍流形上的微积分并证明 Stokes 积分公式; 后三章分别从几何、拓扑和整体分析三个方面阐述现代几何中的一些重要成果, 如 Gauss-Bonnet-Chern 公式、Hodge 定理以及 Atiyah-Singer 指标公式等. 本书内容丰富、语言简洁, 书中含有详细的例子和练习. 凡具有微积分、线性代数、点集拓扑以及泛函分析基础的读者均可阅读本书.

本书可作为综合性大学、师范院校数学系高年级本科生和研究生选修课教材, 也可供数学、物理工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

流形与几何初步/梅加强编著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-036031-1

I. ①流… II. ①梅… III. ①流形几何-高等学校-教材 IV. ①O189.3
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 271176 号

责任编辑: 顾 艳 胡 凯 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2013 年 1 月第一次印刷 印张: 20 1/2

字数: 477 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

几何学在古代被称为测地之学. 几何学的研究对象从平面上的简单规则图形一直演化到空间中较为复杂的曲线和曲面. Gauss 关于曲面的研究揭示了曲率是一个内蕴的几何量. Riemann 是第一个将曲面的概念从欧氏空间中抽象出来并推广到高维情形的数学家. Riemann 在他 1851 年的博士论文和 1854 年的著名的就职演讲中, 提出了流形的概念. Riemann 用这个概念来描述那些满足一定约束条件的变量所能取到的值所构成的集合, 比如, 欧氏空间中的单位球面是流形, 其中约束条件是向量的长度为 1. 在物理学中, 流形的概念出现得也很自然. 在一定的约束条件下某个物理量的所有可能的状态构成的集合就是流形.

1900 年前后, Poincaré 创立了代数拓扑学, 他研究了三维和高维流形的许多具体例子. 1912 年, Weyl 在其关于黎曼曲面的著作中给出了抽象的二维流形的定义. Weyl 将流形视为在局部上与欧氏空间同胚的点集, 这样, 高维抽象流形的概念就呼之欲出了. 1936 年前后, Whitney 详细地研究了微分流形的基本性质; 1944 年, 他证明了抽象的微分流形可以嵌入到欧氏空间中, 于是我们又可以从抽象的空间回到现实的几何世界.

以流形为研究对象的几何学常称为现代几何学. 20 世纪以来, 现代几何学的发展取得了辉煌的成就, 这些成就部分地反映在本书中. 全书共五章, 第 1 章介绍流形的基本概念; 第 2 章在流形上引入微积分; 后三章分别从几何、拓扑和整体分析的角度进一步讨论一些重要的结果. 下面我们对各章主要内容做一些简要的说明:

在第 1 章中, 我们首先从 Weyl-Whitney 的观点出发引入微分流形的概念, 接着再利用反函数定理(隐函数定理)研究流形之间映射的局部性态. 利用隐函数定理, 我们可以将抽象流形视为欧氏空间中多元函数的广义图像. 然后我们介绍单位分解这个常用工具, 它可以用来将局部信息在流形上拼成整体结果. 为了利用微积分的思想研究流形, 我们引入了切空间和切映射的概念. 在微积分中, 我们知道导数恒为零的函数必为常值函数. 在微分流形上, Sard 定理是此结果的推广. 我们讨论了 Sard 定理和它的若干应用. 最后, 利用前面的这些概念和工具, 我们还介绍了 Lie 群的初步知识.

第 2 章主要研究流形上的微积分. 我们在这一章中引入了微分流形上的几个关键性的概念: 首先是切丛的概念, 它是切向量和切空间的整体化; 接着引入了分布的概念并讨论可积分布, 利用 Frobenius 可积性定理我们进一步探讨了 Lie 群; 然后将切丛推广为一般的向量丛, 再引入张量丛和张量场的概念. 张量和微分形式是微分流形上重要的基础性概念. 我们既用局部坐标的观点, 也用整体的不变观点阐述了这些概念. 最后我们介绍带有边界的流形并证明著名的 Stokes 积分公式, 这是流形上的微积分基本公式.

从第 3 章开始我们正式研究流形上的几何学. 首先是几何学的三个基本概念: 黎曼度量、联络和曲率. 引入基本概念以后我们专门以一节的内容介绍基本的计算方法, 包括活动标架法和正规坐标系中的计算方法. 利用这些方法, 我们研究了子流形的几何, 这样, 现代几何和古典几何就合在一起了. 接着我们讨论了 Lie 群和齐性空间的几何, 从不同的角度介绍

了主丛和主丛上的联络. 最后, 我们给出陈省身先生关于 Gauss-Bonnet-Chern 公式的内蕴证明, 从证明方法中很自然地引出关于示性类的 Chern-Weil 理论.

在第 4 章中我们围绕 de Rham 上同调群介绍流形上的拓扑学. 我们首先计算了欧氏空间和球面的 de Rham 上同调群, 利用所得结果引入映射度的概念. 作为应用, 我们证明了 Brouwer 不动点定理和 Borsuk-Ulam 定理. 接着我们讨论 de Rham 上同调群的一般计算方法, 用到的主要工具是 Mayer-Vietoris 正合序列. 利用这些工具, 我们在一类流形上获得了 Poincaré 对偶定理, 并给出 Poincaré-Hopf 指标公式的证明. 最后我们还介绍了重要的 Hodge 理论和微分几何中常用的 Bochner 技巧. 为了与前后内容相衔接, 我们还引入了 Clifford 丛和 Dirac 算子的概念.

第 5 章的主要目的是给出 Hodge 定理的证明, 并讨论非平凡的 Atiyah-Singer 指标公式. 首先我们在流形上建立了 Sobolev 空间, 讨论了 Dirac 算子的解析性质. 利用 Sobolev 空间的基本理论和 Dirac 算子的椭圆性质我们给出了 Hodge 定理的证明. 接着我们介绍 Dirac 算子的热方程和波方程, 研究热核的基本性质. 重要的是热核可以用来表示 Dirac 算子的指标. 最后, 利用热核的渐近展开我们给出了 Dirac 算子的指标公式, 同时也介绍了一般的 Atiyah-Singer 指标公式.

作者多年来在南京大学数学系为高年级本科生和研究生讲授流形与几何的基础课程. 本书是根据作者授课的讲义修改而成, 历届同学也对本书提出了建议, 作者在此表示感谢. 本书部分内容曾经北京大学数学科学学院戴波副教授试用, 作者对他在试用后提出的宝贵意见和建议致以衷心的感谢.

本书的出版得到了南京大学数学系国家基础科学人才培养基金 (批准号: J1210049) 和国家自然科学基金面上项目 (项目批准号: 11171143) 的资助, 特此致谢.

梅加强

2012 年 8 月于南京

目 录

前言

第 1 章	微分流形	1
1.1	流形的定义和例子	1
1.2	子流形	7
1.3	单位分解	15
1.4	切空间和切映射	21
1.5	Sard 定理及应用	29
1.6	Lie 群初步	37
第 2 章	流形上的微积分	45
2.1	切丛和切向量场	45
2.2	可积性定理及应用	56
2.3	向量丛和纤维丛	63
2.4	张量丛	72
2.5	微分形式	80
2.6	带边流形	93
2.7	Stokes 积分公式	97
第 3 章	流形的几何	105
3.1	度量回顾	105
3.2	联络	111
3.3	曲率	122
3.4	联络和曲率的计算	130
3.4.1	活动标架法	130
3.4.2	正规坐标	135
3.5	子流形几何	140
3.5.1	第二基本形式	140
3.5.2	活动标架法	143
3.5.3	极小子流形	144
3.5.4	黎曼淹没	152
3.6	齐性空间	156
3.6.1	Lie 群和不变度量	156
3.6.2	齐性空间	160
3.6.3	对称空间	163
3.7	主丛及其联络	170

3.8 Gauss-Bonnet-Chern 公式	180
3.8.1 向量场的指标	181
3.8.2 单位球丛上的计算	184
3.9 Chern-Weil 理论	190
第 4 章 流形的上同调	205
4.1 Poincaré 引理	205
4.1.1 Poincaré 引理	205
4.1.2 映射度回顾	210
4.2 de Rham 上同调群的计算	215
4.2.1 群作用与上同调	215
4.2.2 Mayer-Vietoris 正合序列	222
4.3 Thom 类和相交数	229
4.3.1 Thom 类	229
4.3.2 相交数	233
4.4 Hodge 理论	240
4.4.1 Hodge 星算子	240
4.4.2 Bochner 技巧	246
4.5 Dirac 算子	253
4.5.1 Clifford 代数	253
4.5.2 Clifford 丛	262
第 5 章 流形上的椭圆算子	270
5.1 Sobolev 空间	270
5.2 Hodge 定理的证明	277
5.3 热方程与热核	284
5.4 迹与指标公式	296
5.5 指标公式的证明	304
5.5.1 谐振子	309
5.5.2 Atiyah-Singer 指标定理	312
参考文献	318
索引	320

第1章 微分流形

本章给出微分流形的定义, 研究流形之间的映射及其线性化. 我们列举了许多具体的微分流形的例子, 并将 Lie 群作为重要的例子加以介绍.

1.1 流形的定义和例子

流形是一种特殊的拓扑空间, 是欧氏空间中曲线、曲面的推广. 在微积分中, 我们曾研究过曲线的弧长、曲面的面积等问题. 在古典微分几何中, 我们进一步研究了曲线和曲面的“弯曲”性质, 发展出了重要的曲率概念. Gauss 发现: 曲面的曲率实际上只依赖于曲面的第一基本形式, 这为将曲面从欧氏空间中抽象出来进行研究奠定了基础. 此外, Gauss-Bonnet 定理将几何量 (曲率) 和拓扑量联系在一起, 从而启发我们用几何手段来研究拓扑问题. 现代微分几何和拓扑学的主要研究对象就是流形.

回忆一下, 所谓拓扑空间是指一个配对 (X, τ) , 其中 X 为一个集合, τ 也是一个集合, 其元素都是 X 中的子集, 并且满足以下条件:

- (i) $\emptyset, X \in \tau$;
- (ii) τ 中有限个元素之交仍属于 τ ;
- (iii) τ 中任意多个元素之并仍属于 τ .

这样的 τ 称为 X 上的一个拓扑, τ 中的元素称为开集. 拓扑空间是点集拓扑学或一般拓扑学的主要研究对象. 在点集拓扑学中, 人们研究拓扑空间的连续性质以及在连续变换下保持不变的性质. 为了用微积分的手段研究拓扑空间的性质, 我们必须对其施加进一步的限制. 在点集拓扑学中, 具有可数拓扑基的拓扑空间称为 A_2 的, 具有 Hausdorff 性质的拓扑空间称为 T_2 的.

定义 1.1.1 (C^r 流形) 设 M 是具有 A_2, T_2 性质的拓扑空间. 如果存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 以及相应的连续映射族 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得

- (i) $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ 为从 U_α 到欧氏空间开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上的同胚;
- (ii) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 如下的转换映射

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

为 C^r ($r \geq 1$) 映射, 则称 M 为 C^r 流形.

我们称 $\{U_\alpha\}$ 或 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为 M 的局部坐标覆盖, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为一个局部坐标系, U_α 为局部坐标邻域, φ_α 为局部坐标映射. 设 $p \in U_\alpha$, 记 $x^i(p)$ 为 $\varphi_\alpha(p)$ 的第 i 个欧氏坐标. $x^i: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ 称为第 i 个 (局部) 坐标函数, 有时也称 $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ 为 p 附近的局部坐标. 上述定义中的 n 称为流形 M 的维数, 记为 $n = \dim M$. 为了强调流形的维数, 有时也把 M 记作 M^n .

我们就流形的概念作一些解释:

(1) 如果所有的转换映射都只是 C^0 (连续) 的, 则称 M 为拓扑流形. 当 $1 \leq r < \infty$ 时, 称 M 为 C^r 微分流形. 如果转换映射都是无限次可微的, 则称 M 为 C^∞ 流形或光滑流形. 当转换映射都是实解析 (记为 C^ω) 时, 称 M 为实解析流形.

(2) 设 U 为 M 上的开集, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续映射, 且 φ 的像为开集, φ 到其像上是同胚. 如果 φ 和 φ_α 之间的转换映射均为 C^r 的, 则称 (U, φ) 和局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 C^r 相容的. 利用选择公理容易证明: 对于任何一个局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 均存在一个包含它的“最大”的局部坐标覆盖 $\mathcal{D}$, 使得任何与 $\mathcal{D}$ 均 C^r 相容的局部坐标系 (U, φ) 都含于 $\mathcal{D}$ 之中. 我们把这样的 $\mathcal{D}$ 称为拓扑流形 M 的一个 C^r 微分构造或微分结构.

(3) 存在这样的拓扑流形的例子, 该拓扑流形上不存在任何相容的微分构造; 另一方面, 可以证明 (这是微分拓扑学的内容), 给定一个 C^r ($r \geq 1$) 微分构造, 一定存在一个相容的 C^∞ 微分构造. 为了方便起见, 在没有明确说明的情况下, 下面的微分流形是指光滑流形.

例 1.1.1 欧氏空间及其开集.

在 $\mathbb{R}^n$ 上取恒同映射 $id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 成为微分流形, 恒同映射是其 (整体) 坐标. 显然, $\mathbb{R}^n$ 中的开集也都是 n 维微分流形; 一般地, 微分流形的开子集也继承了微分结构成为微分流形.

我们把上面所定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的微分结构称为标准微分结构. 需要注意的是, 除了标准的微分结构以外, 还存在和标准微分结构不相容的其他微分结构. 例如, 考虑 $\mathbb{R}$ 上的映射

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = u^3, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

显然 φ 为同胚, 因此它定义了 $\mathbb{R}$ 上的一个微分结构, 它和标准的微分结构不相容 (为什么?).

例 1.1.2 单位圆周 S^1 .

记

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\},$$

则 S^1 为 $\mathbb{R}^2$ 的子拓扑空间. 令

$$U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, 2\pi)\}, \quad U_2 = \{e^{i\eta} \mid \eta \in (\pi, 3\pi)\},$$

则 $U_1 = S^1 - \{(1, 0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(-1, 0)\}$, 因此 $S^1 = U_1 \cup U_2$. 分别在 U_1 和 U_2 上定义映射

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow (0, 2\pi) \subset \mathbb{R},$$

$$e^{i\theta} \mapsto \theta,$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow (\pi, 3\pi) \subset \mathbb{R},$$

$$e^{i\eta} \mapsto \eta,$$

则 φ_1 和 φ_2 均为同胚, 且转换映射

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)$$

为

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta + 2\pi, & \theta \in (0, \pi), \\ \theta, & \theta \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

同理可计算 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, 它们均为光滑映射, 因此 S^1 为光滑流形.

可以证明, 在分类的意义下, $\mathbb{R}$ 和 S^1 是仅有的两个连通一维流形. 为了给流形分类, 我们先引入可微映射的概念.

定义 1.1.2 (C^k 映射) 设 $f: M \rightarrow N$ 为两个 C^r 微分流形之间的连续映射. 如果任给 $p \in M$ 和 $q = f(p) \in N$ 附近的局部坐标系 (V, ψ) , 均存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ) , 使得 $f(U) \subset V$, 且 f 在这两个局部坐标系下的局部表示

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

为 C^k ($k \leq r$) 映射, 则称 f 为流形 M, N 之间的 C^k 映射. C^k 映射的全体记为 $C^k(M, N)$.

显然, C^k 映射的复合仍为 C^k 映射. 注意, C^k 映射的定义虽然用到局部坐标系, 但由于流形定义中要求转换映射都是 C^r 的, 故实际上映射的 C^k 性质不依赖于局部坐标系的选取. 我们在以后定义其他对象的时候, 如果用局部坐标系来定义, 则读者需注意验证该定义是否与局部坐标的选取无关.

定义 1.1.3 (微分同胚) 设 M, N 为 C^r 微分流形, $f: M \rightarrow N$ 为同胚映射. 如果 f 及其逆映射 f^{-1} 均为 C^r 映射, 则称 f 为 C^r 微分同胚, 或简称微分同胚.

当我们不加申明的时候, 光滑流形之间的微分同胚指的是光滑的微分同胚. 我们不区分微分同胚的流形. 特别地, 在同一个拓扑流形上, 如果两个微分结构定义出的微分流形是微分同胚的, 则我们称这两个微分结构等价, 我们不区分等价的微分结构. 作为习题, 读者可证明上面第一例中 $\mathbb{R}$ 上的两个微分结构是等价的. 一般地, Moise 等证明了维数不超过 3 的拓扑流形上存在唯一的一个微分结构. 后来, Milnor 发现在七维球面上存在不同于标准微分结构的微分结构, 这个结果当时在数学界引起了不小的轰动. 进一步的研究表明在七维球面上—共存在 28 个不同的微分结构, 它们组成一个有限循环群. 人们也早就发现, 除了 $\mathbb{R}^4$ 以外, 欧氏空间上的微分结构都是唯一的. 后来, 由于 Freedman 和 Donaldson 等的工作, 人们发现在四维欧氏空间上甚至存在不可数多个不同的微分结构.

设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为微分流形 M 的局部坐标覆盖. 用分量表示转换映射如下

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) = (y^1, y^2, \dots, y^n),$$

其中 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, y^i ($1 \leq i \leq n$) 是关于 x^j 的函数 ($1 \leq j \leq n$). 记转换映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{n \times n},$$

Jacobi 行列式记为

$$\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p) = \frac{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}(\varphi_\alpha(p)), \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

在多元微积分中, 曲线和曲面上的第二型积分都涉及重要的概念: “定向”. 定向这个概念对于微分流形也很重要, 我们将从不同的角度来介绍它.

定义 1.1.4 (可定向流形) 设 M 为微分流形, 如果存在 M 的局部坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$, 使得当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, $\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) > 0$, 则称流形 M 是可定向的, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 为一个定向坐标覆盖. 如果不存在定向坐标覆盖, 则称流形 M 是不可定向的.

前面两个例子中的欧氏空间和单位圆周都是可定向的微分流形. 下面我们再来看一些流形的例子.

例 1.1.3 n 维环面 T^n .

两个微分流形的乘积仍为微分流形, 因此 $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ (n 个 S^1 之积) 为 n 维微分流形, 并且是可定向流形, 称为 n 维环面.

例 1.1.4 n 维球面 S^n .

记

$$S^n = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}.$$

S^n 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的子拓扑空间. 令

$$U_1 = S^n - \{(0, 0, \dots, -1)\}, \quad U_2 = S^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}.$$

显然, $S^n = U_1 \cup U_2$. 映射 $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 分别定义如下

$$\begin{aligned} \varphi_1(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \frac{x^2}{1+x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \right), \\ \varphi_2(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) &= \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \frac{x^2}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

容易看出 φ_1 和 φ_2 均为同胚, 并且转换映射 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ 为

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y^1, y^2, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}, \frac{y^2}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}, \dots, \frac{y^n}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2} \right).$$

因此 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 为光滑映射, 同理 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 为光滑映射. 这说明, S^n 为 n 维光滑流形. 不难验证它是可定向的紧致连通流形.

例 1.1.5 n 维实投影空间 $\mathbb{R}P^n$.

记

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim,$$

其中等价关系 “ $\sim$ ” 定义如下

$$x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad x \sim y \iff \text{存在非零实数 } \lambda \text{ 使得 } x = \lambda \cdot y,$$

即商空间 $\mathbb{R}P^n$ 中的点可以看成经过原点的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的直线. 记 x 的等价类为 $[x]$, 定义投影映射 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 为

$$\pi(x) = [x].$$

$\mathbb{R}P^n$ 商的拓扑定义为商拓扑, 即

$$V \text{ 为 } \mathbb{R}P^n \text{ 中开集} \iff \pi^{-1}(V) \text{ 为 } \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \text{ 中开集}.$$

$\mathbb{R}P^n$ 也可以看成 S^n 的商空间:

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim,$$

其中 $x \sim y$ 当且仅当 $y = -x$. 容易看出, 在商拓扑下, $\mathbb{R}P^n$ 为 A_2 和 T_2 的. 下面我们说明 $\mathbb{R}P^n$ 上有自然的微分流形结构. 为此, 对 $k = 1, 2, \dots, n+1$, 令

$$U_k = \{[x] \in \mathbb{R}P^n \mid x = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}), x^k \neq 0\},$$

由等价关系的定义知 U_k 的定义是恰当的, U_k 均为开集并且 $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} U_k$. 定义映射 $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_k([x]) = (x^1/x^k, x^2/x^k, \dots, x^{k-1}/x^k, x^{k+1}/x^k, \dots, x^{n+1}/x^k).$$

由等价关系的定义知 φ_k 的定义是恰当的, 且为同胚映射. 当 $k \neq l$ 时, $U_k \cap U_l \neq \emptyset$. 为了计算转换映射, 记 x^i/x^j 为 ${}_j\xi^i$, 则

$$\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}({}_k\xi^1, \dots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \dots, {}_k\xi^{n+1}) = ({}_l\xi^1, \dots, {}_l\xi^{l-1}, {}_l\xi^{l+1}, \dots, {}_l\xi^{n+1}),$$

因为

$$\begin{aligned} {}_l\xi^h &= x^h/x^l = \left(\frac{x^h}{x^k}\right) / \left(\frac{x^l}{x^k}\right) = {}_k\xi^h / {}_k\xi^l, \quad h \neq l, k, \\ {}_l\xi^k &= x^k/x^l = 1 / \left(\frac{x^l}{x^k}\right) = ({}_k\xi^l)^{-1}, \end{aligned}$$

故转换映射均为光滑映射, 这说明 $\mathbb{R}P^n$ 为光滑流形.

可以证明, 当 n 为奇数时, $\mathbb{R}P^n$ 为可定向流形; 当 n 为偶数时, $\mathbb{R}P^n$ 为不可定向流形. $\mathbb{R}P^n$ 称为 n 维实投影空间, 当 $n = 2$ 时, $\mathbb{R}P^2$ 也称为实投影平面.

例 1.1.6 流形的连通和.

设 M_1 和 M_2 均为 n 维微分流形, 取 $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$, 分别在 M_1 和 M_2 上取 p_1 附近的局部坐标系 (U_1, φ_1) 和 p_2 附近的局部坐标系 (U_2, φ_2) , 使得 $\varphi_1(p_1) = \varphi_2(p_2) = 0$, 且

$$\varphi_1(U_1) = \varphi_2(U_2) = B_2(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 < 4\right\}.$$

记

$$A\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{4} < \sum_{i=1}^n (x^i)^2 < 4\right\},$$

并令 $V_1 = \varphi_1^{-1}\left(A\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right)$, $V_2 = \varphi_2^{-1}\left(A\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right)$. 考虑映射

$$\phi : A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right), \quad \phi(x) = x \left[\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right]^{-1},$$

ϕ 为微分同胚, 因而映射 $\varphi_2^{-1} \circ \phi \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow V_2$ 也是微分同胚. 考虑商空间

$$M_1 - \varphi_1^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}) \amalg M_2 - \varphi_2^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}) / \sim,$$

它是通过粘合映射 $\varphi_2 \circ \phi \circ \varphi_1^{-1}$ 定义的, 即

$$x \in M_1, y \in M_2, x \sim y \iff x \in V_1, y \in V_2, y = \varphi_2 \circ \phi \circ \varphi_1^{-1}(x).$$

通过这个办法我们得到了一个新的微分流形, 并且在微分同胚的意义下其微分结构不依赖于坐标邻域的选取, 记为 $M_1 \# M_2$, 称为 M_1 和 M_2 的连通和. 不难证明, $M_1 \# M_2$ 与 $M_2 \# M_1$ 微分同胚, $M^n \# S^n$ 与 M^n 自身微分同胚.

特别地, 任给 $g \geq 1$, g 个二维环面 T^2 的连通和仍为二维紧致连通流形; g 个投影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和也是二维紧致连通流形. 可以证明, 加上二维球面, 这些就是所有的二维紧致连通流形了, 有时又称它们为曲面或二维曲面.

本节最后, 我们来介绍什么是流形的定向以及定向和流形连通性之间的关系. 首先有如下简单的引理:

引理 1.1.1 连通的拓扑流形必为道路连通的.

证明 设 M 为连通的拓扑流形. $\forall p \in M$, 令

$$C_p = \{q \in M \mid \text{存在一条道路连接 } p \text{ 和 } q\}.$$

因为 $p \in C_p$, 故 C_p 非空. 又由于拓扑流形局部上和欧氏空间同胚, 即是局部道路连通的, 因此 C_p 为非空开集.

按照定义易见, 当 $p \neq q$ 时, 要么 $C_p = C_q$, 要么 $C_p \cap C_q = \emptyset$. 因此, 如果 $C_p \neq M$, 则 $M - C_p = \bigcup_{q \notin C_p} C_q$ 也是开集, 这和 M 的连通性相矛盾. 这说明 $C_p = M, \forall p \in M$. 因此 M 是道路连通的. □

设 M 为微分流形, 如果 M 的两个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ 满足

$$\det J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p) > 0, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

则称这两个局部坐标系是同向的. 和前面微分结构的定义类似, 我们有如下定向的定义:

定义 1.1.5 (定向) 设 M 为可定向微分流形, $\mathcal{D}$ 为一个定向坐标覆盖. 如果每一个与 $\mathcal{D}$ 中局部坐标系都同向的局部坐标系均包含于 $\mathcal{D}$ 内, 则称 $\mathcal{D}$ 为 M 的一个定向.

由选择公理可知, 任给 M 的一个定向坐标覆盖, 总存在一个包含此坐标覆盖的“最大”定向坐标覆盖, 即定向. 定向这个概念很早就被数学家所意识到了, 但直到 Poincaré 发明代数拓扑的时候才被大家真正认识清楚. 在学习多元函数积分的时候, 我们曾用“左手法则”或“右手法则”来决定定向. 代数拓扑学的发展告诉我们, 定向实际上是一个拓扑性质 (即流形是否可定向与微分结构无关), 它由所谓的第一 Stiefel-Whitney 示性类决定. 我们在后面将从另外的角度来重新解释定向这个概念.

例 1.1.7 $\mathbb{R}^n$ 上的不同定向.

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上如下坐标映射 $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\rho(x) = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, -x^n),$$

$(\mathbb{R}^n, \rho)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个定向坐标覆盖, 它决定的定向和由恒同映射决定的定向不同. 一般地, 如果 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是流形 M 的一个定向坐标覆盖, 则 $\{(U_\alpha, \rho \circ \varphi_\alpha)\}$ 也是定向坐标覆盖, 它们决定了两个不同的定向.

引理 1.1.2 连通的可定向微分流形恰好有两个定向.

证明 设 $\mathscr{D}$ 为可定向流形 M 的一个定向. 根据上面的讨论, 坐标映射 ρ 决定了另一定向, 记为 $\mathscr{D}^-$. 现设 $\tilde{\mathscr{D}}$ 为 M 的另一定向, 我们来定义函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. 任给 $p \in M$, 则存在局部坐标系 $(U, \varphi) \in \mathscr{D}$ 和 $(V, \psi) \in \tilde{\mathscr{D}}$, 使得 $p \in U \cap V$. 令

$$f(p) = \det J(\psi \circ \varphi^{-1})(p) / |\det J(\psi \circ \varphi^{-1})(p)|^{-1}.$$

由于 $\mathscr{D}$ 和 $\tilde{\mathscr{D}}$ 均为定向, 故 $f(p)$ 与局部坐标的选取无关, 是 M 上定义好的局部常值函数. 如果 M 是连通的, 则 f 为常值函数, 从而 $f \equiv 1$ 或 $f \equiv -1$. 当 $f \equiv 1$ 时 $\tilde{\mathscr{D}} = \mathscr{D}$; 当 $f \equiv -1$ 时, $\tilde{\mathscr{D}} = \mathscr{D}^-$. $\square$

推论 1.1.3 设 $\mathscr{D}$ 为流形 M 的一个定向, (U, φ) 为 M 的一个局部坐标系. 如果 U 连通, 则要么 $(U, \varphi) \in \mathscr{D}$, 要么 $(U, \varphi) \in \mathscr{D}^-$.

习题 1.1

1. 如果 M, N 均为 C^r 流形, 则 $M \times N$ 也是 C^r 流形, 且

$$\dim M \times N = \dim M + \dim N.$$

2. 证明: 在本节第一例中, $\mathbb{R}$ 上的两个不相容微分构造定义出的微分流形是微分同胚的.
3. 按照定义说明微分流形的局部坐标映射实际上是从坐标邻域到其像的微分同胚.
4. 证明: 微分同胚的流形具有相同的维数.
5. 证明微分流形转换映射的 Jacobi 行列式在定义域内是处处非零的.
6. 证明: 如果流形 M, N 均可定向, 则 $M \times N$ 也是可定向流形; 反之, 如果 $M \times N$ 可定向, 则 M 和 N 都是可定向的.
7. 通过计算转换映射的 Jacobi 行列式, 证明 n 维球面都是可定向的微分流形.
8. 证明: 如果微分流形被两个局部坐标邻域所覆盖, 并且它们的交集连通, 则该流形必定是可定向的.
9. 将上一题推广至三个坐标邻域, 此时如何判断流形是否可定向? 更多的坐标邻域呢?
10. 证明奇数维的实投影空间是可定向的微分流形, 并证明投影平面不可定向.
11. 证明: 可定向微分流形的连通和仍可定向. 不可定向情形如何?

1.2 子流形

前一节我们按照定义列举了微分流形的一些例子. 为了得到更多的例子, 我们来研究流形之间的映射, 其中一个重要的工具就是逆映射定理. 我们先看一个简单的例子.

例 1.2.1 可逆线性映射.

考虑线性映射 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. 从线性代数我们知道,

$$A \text{ 可逆} \iff \det A \neq 0 \iff A \text{ 为单射}.$$

从微分流形的角度, 我们也可以说 A 是微分同胚当且仅当 A 是满秩的.

$\mathbb{R}^n$ 到自身的线性映射可用矩阵表示, 矩阵可看成 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的元素, 因而可以定义范数. 如果 $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性映射, 范数 $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆, 其中 I_n 为单位矩阵. 事实上, 设 $(I_n - B)x = 0$, 则

$$\|x\| = \|Bx\| \leq \|B\|\|x\|, \quad (1 - \|B\|)\|x\| \leq 0,$$

即 $x = 0$, $I_n - B$ 为单射, 从而为线性同构. 这说明单位矩阵经过微小的扰动以后仍然是非退化的.

下面我们要将上述观察推广到一般的映射.

定义 1.2.1 (映射的秩) 设 $f: M \rightarrow N$ 为两个微分流形之间的 C^k ($k \geq 1$) 映射, $p \in M$, $q = f(p) \in N$. 分别取 p 附近的局部坐标系 (U, φ) 以及 q 附近的局部坐标系 (V, ψ) , 令

$$\text{rank}_p f = \text{rank} J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

称为 f 在 p 处的秩.

请读者自行验证上述定义与局部坐标系的选取无关, 其定义是恰当的. 下面的定理本质上就是多元函数的反函数定理.

定理 1.2.1 (逆映射定理) 设 $f: M^n \rightarrow N^n$ 为微分流形之间的 C^k ($k \geq 1$) 映射, 且 $\text{rank}_p f = n$, 则存在 p 的开邻域 U 和 $q = f(p)$ 的开邻域 V , 使得 $f|_U: U \rightarrow V$ 为 C^k 的微分同胚.

证明 因为要证明的是局部结果, 我们不妨假设 $M^n = N^n = \mathbb{R}^n$, $p = q = 0$. 通过复合一个可逆的线性映射, 我们也不妨假设 f 在原点的 Jacobi 矩阵为单位矩阵, 即 $Jf(0) = I_n$. 这时在原点附近, f 是恒同映射的小扰动, 扰动项可定义为

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由 $Jg(0) = 0$ 知存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\|Jg(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

由多元向量值函数的拟微分中值定理, 有

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|Jg(\xi)\| \|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

设 $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_\varepsilon(0). \quad (1.1)$$

这等价于在 $B_\varepsilon(0)$ 中寻求 $g_y(x) = x + y - f(x)$ 的不动点. 我们利用压缩映像原理来找不动点. 首先有

$$\|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \|x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{B_\varepsilon(0)}, \quad (1.2)$$

这说明 $g_y(\overline{B_\varepsilon(0)}) \subset B_\varepsilon(0)$. 映射 $g_y: \overline{B_\varepsilon(0)} \rightarrow B_\varepsilon(0) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ 为压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

从而方程 (1.1) 在 $\bar{B}_\varepsilon(0)$ 中有唯一的解, 记为 x_y . 由不等式 (1.2) 知 $x_y \in B_\varepsilon(0)$.

记 $U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)) \cap B_\varepsilon(0)$, $V = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, 则上面的论述表明, $f|_U : U \rightarrow V$ 为一一的 C^k 映射, 其逆 $h(y) = x_y$ 满足方程

$$y - g(h(y)) = h(y). \quad (1.3)$$

我们有

(1) $h : V \rightarrow U$ 为连续映射: 当 $y_1, y_2 \in V$ 时,

$$\begin{aligned} \|h(y_1) - h(y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|h(y_1) - h(y_2)\|, \end{aligned}$$

从而 $\|h(y_1) - h(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$, 即 h 为 Lipschitz 连续映射.

(2) $h : V \rightarrow U$ 为可微映射: 设 $y_0 \in V$, 则对 $y \in V$ 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot [h(y) - h(y_0)] + o(\|h(y) - h(y_0)\|). \end{aligned}$$

由 (1) 就得到

$$[I_n + Jg(h(y_0))] \cdot [h(y) - h(y_0)] = (y - y_0) + o(\|y - y_0\|),$$

即

$$h(y) - h(y_0) = [I_n + Jg(h(y_0))]^{-1} \cdot (y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

(3) $h : V \rightarrow U$ 为 C^k 映射: 事实上, 由 (2) 知

$$Jh(y) = [I_n + Jg(h(y_0))]^{-1} = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall y \in V.$$

由 f 为 C^k 映射及上式可依次提升 h 的可微次数, 最后就知道 h 为 C^k 映射. □

我们将利用逆映射定理来研究一些特殊映射的局部性态.

定义 1.2.2 (浸入、嵌入和淹没) 设 $f : M^m \rightarrow N^n$ 为微分流形之间的 C^k ($k \geq 1$) 映射. 如果 $\text{rank}_p f \equiv m, \forall p \in M$, 则称 f 为 C^k 浸入 (immersion); 如果 f 为 C^k 浸入, 且 f 是从 M 到其像 $f(M)$ 上的同胚, 则称 f 为 C^k 嵌入 (embedding); 如果 $\text{rank}_p f \equiv n, \forall p \in M$, 则称 f 为 C^k 淹没 (submersion).

当我们不强调映射的可微次数时, 通常简称上述几种映射分别为浸入、嵌入和淹没. 下面我们举几个例子.

例 1.2.2 单位圆周.

考虑单位圆周 S^1 到平面 $\mathbb{R}^2$ 的包含映射 $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 这是一个嵌入. 包含映射 i 的秩恒为 1.

例 1.2.3 不是单射的浸入.

考虑映射 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

易验证 $\text{rank} f \equiv 1$, 因此 f 为光滑浸入. 显然, $f(\mathbb{R}) = S^1$. f 不是单射, 因此它不是嵌入.

例 1.2.4 单浸入, 但不是嵌入的例子.

考虑映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \left(\frac{t^3 + t}{t^4 + 1}, \frac{t^3 - t}{t^4 + 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

f 为单射, 且 $\text{rank} f \equiv 1$. 因此 f 为一个单浸入, 但它也不是嵌入, 因为 $f(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, 双纽线为紧致子集.

例 1.2.5 环面的嵌入.

考虑映射 $f: T^2 = S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = ((a + b \cos \phi) \cos \theta, (a + b \cos \phi) \sin \theta, b \sin \phi), \quad \theta, \phi \in [0, 2\pi].$$

f 为光滑嵌入, 其像为 $\mathbb{R}^3$ 中的轮胎面.

例 1.2.6 标准嵌入.

设 $m \leq n$, 考虑映射 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^m, 0, 0, \dots, 0).$$

显然 f 为光滑嵌入.

例 1.2.7 标准淹没.

设 $m \geq n$, 考虑映射 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

显然 f 为光滑淹没.

设 $A: V \rightarrow W$ 是秩为 r 的线性映射. 在线性代数中我们知道, 在适当地选取线性空间 V 和 W 的基以后 A 形如 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 对于一般的映射, 我们有如下类似的结果.

定理 1.2.2 (浸入的局部标准形) 设 $f: M^m \rightarrow N^n$ 为微分流形之间的浸入. 对任意 $p \in M$, 存在 p 附近的局部坐标系 (U, φ) 以及 $q = f(p)$ 附近的局部坐标系 (V, ψ) , 使得 f 的局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ 为标准嵌入, 即

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^m) = (x^1, x^2, \dots, x^m, 0, 0, \dots, 0).$$

证明 因为要证明的是一个局部的结果, 如同逆映射定理的证明那样, 不妨设 $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $p = 0, q = 0$. 用分量形式表示映射 f 为

$$f(x) = (f_1(x^1, x^2, \dots, x^m), f_2(x^1, x^2, \dots, x^m), \dots, f_n(x^1, x^2, \dots, x^m)).$$

由假设, 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

秩为 m . 通过调整坐标次序, 我们可以假设子矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$