高等数学講义

上　册

（73级通用教材）

中国科学技术大学

1974年3月

恩 格 斯 語 录

变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程：运动。

毛主席语录

思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

分析的方法就是辩证的方法。所谓分析，就是分析事物的矛盾。

说　明

这本《高等数学講义》上册是我校73級各系通用教材。教材内容基本照顾到数、理、化三种类型的需要，使用时，各系、各专业可根据需要酌情增减。

由于我們的馬列主义、毛澤东思想水平不高，又缺乏实踐經驗，教材中的缺点錯誤一定不少。特别是前后两个对話，是初次嘗試，很不成熟。恳切地希望工农兵学員和教員提出批評和建議。

目　录

第一章　函数和极限

第二章　单变量函数的微分学

第三章 单变量函数的积分学

附　　录

关于微积分两类基本問題的对話

小张：老李，我們就要开始学习微积分了，你給我說說微积分是研究什么的，好嗎？

老李：好！我們先来学习一段毛主席的有关教导。毛主席說：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。”**

小张：微积分所研究的特殊矛盾是什么呢？

老李：微积分的研究对象是变量，它是研究事物运动和变化規律的数学方法。具体地說，就是研究我們在生活实践、生产活动和科学技术中所碰到的种种变量变化的規律性。

小张：唯物辯証法告訴我們，世界上的事物，无不在变化着，运动着，当然反映这些現象的数量大多是变量囉！

老李：正因为这样，微积分就具有广泛的应用，它已成为生产实践和科学技术中非常有用的数学工具。

小张：听說微积分很难学，是嗎？

老李：那是因为旧的微积分教材理論脫离实际，从定义到定理，搞一整套形式邏輯，繁瑣哲学，把微积分弄得深奥莫測。

小张：恩格斯在《反杜林論》中指出：**“純数学的对象是現实世界的空間形式和数量关系，所以是非常現实的材料。”**微积分也不会例外呀！

老李：当然不会例外！本来微积分的概念就是从物理模型、几何問題或其它科学技术問題中抽象出来的。

小张：你能不能举几个具体例子。

老李：我們先来看計算速度这个問題吧！如果火車出站后，速度一直不变，經过 5 小时，跑了 300 公里，它的速度是多少呢？

小张：那还不容易算！只要用时間除一下路程，就知道速度是每小时 60 公里。

老李：对，这时只用一次除法，就算出了速度。这个速度就是火車在 5 小时这段时間內的平均速度，由于火車的速度一直不变，它也就是火車每时每刻的速度。

小张：火車的速度怎么可能老不变呢？譬如，火車刚出站时，速度越来越快，而在快进站时，速度又越来越慢。

老李：問題就在这里，火車的速度經常在变。这时，平均速度已經不能反映出某一时刻火車运行的快慢了，而要用所謂瞬时速度来刻划。

小张：怎样計算瞬时速度呢？

老李：我們还得从平均速度談起。刚才說过，在較长一段时間內，平均速度不能刻划火車在某一时刻的速度，但是，在較短的时間內，譬如說在一秒鐘內，由于火車的速度变化不大，因而在这較短的时間內，平均速度就可以近似地刻划火車在某一时刻的速度了。

小张：的确是这样，时間間隔取得越短，平均速度就越接近火車在某一时刻的速度。

老李： 但是不管时間間隔取得多么短，平均速度毕竟还是火車在某一时刻速度的一个近似值呀！

小张： 那怎么办呢？

老李： 如果讓时間間隔无限制地縮短，那末平均速度就无限接近于一个确定的数，这个数就是瞬时速度。

小张： 噢，看来計算瞬时速度还不很簡单。

老李： 是呀！这里需要用极限的方法，瞬时速度就是当时間間隔趋于零时平均速度的极限。求瞬时速度的問題是微分学的一个典型例子。

小张： 你再給我举一个积分学的例子，好嗎？

老李： 好，我們来計算由拋物綫 $y=x^2$，ox 軸及直綫 $x=1$ 所围成的曲边三角形 OAB 的面积，它的图形如图 1 所示。

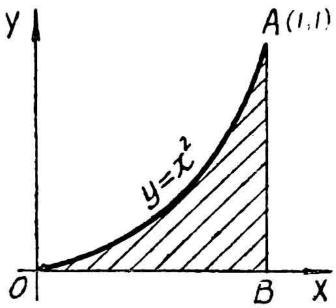

图 1

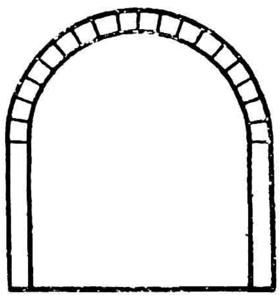

图 2

小张： 像三角形、矩形、梯形这样一些直綫形的面积我都会算，而現在这个图形有一条边是曲的，它的面积怎么算呢？

老李： 困难就在于有一条边是曲的。我們可以設法将計算曲边三角形面积的問題轉化为計算直綫形的面积問題。解决这个問題，也就是要解决“曲”与“直”的矛盾。

小张： 怎么能使“曲”轉化为“直”呢？

老李： 关于这一点，你是有实际体会的。你想想我們挖防空洞时，半圓形洞頂是怎么砌起来的？

小张： 那不是用一块一块的砖砌起来的嗎？噢！我想起来了，每块砖都是直的，砌出来的洞頂却是半圓形的（图 2）。

老李： 这个例子就体現了“曲”与“直”的辯証关系，在一定的条件下，“直”可轉化为“曲”，“曲”也可轉化为“直”。

小张： 我們从整体上看，洞頂是半圓形的，但在局部一小段上看却是直的。

老李： 你說得很对。如果我們在很短的一段上，以“直”代“曲”，那末就可以把計算曲边三角形面积的問題，轉化为計算直綫形的面积問題。

小张： 具体怎么做呢？

老李： 为了能在局部以“直”代“曲”，我們先把整个曲边三角形分割成很多小条，每一小条的面积就可以用一个小矩形的面积来代替，如图 3 所示。

小张： 嗯，每一小条的面积是和相应的小矩形的面积差不多。

老李： 把所有的小矩形面积加起来，就是图 3 上那个台阶形的面积，它不就是曲边三角形的

面积的近似值嗎？

小张：要計算精确值，怎么办？

老李：刚才我們是把底边 OB 分成六等分，如果分得更細一些，譬如，我們把底边 OB 分成十二等分（图 4），从图形上就可以看出，这时台阶形的面积就更接近于曲边三角形

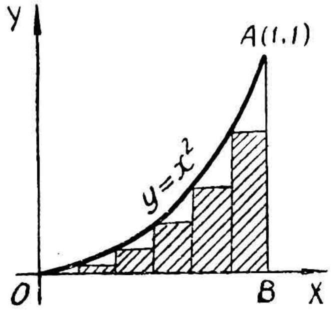

图 3

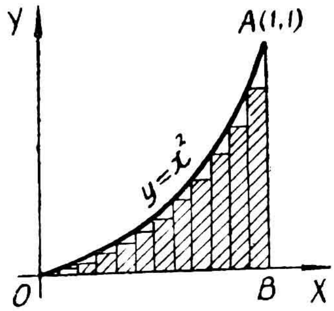

图 4

的面积，因此，这样得到的近似值就更精确一些了。

小张：不錯，这样是比刚才的精确一些了。但它毕竟还是近似值呀！

老李：为了由近似值得到精确值，我們把底边 OB 无限細分，台阶形的面积就相应地变化而越来越接近一个确定的数，这个数就是曲边三角形面积的精确值。也就是說，曲边三角形的面积是底边无限細分时台阶形面积的极限。

小张：噢！原来計算曲边三角形的面积也要用到极限呀！

老李：对，求瞬时速度与求曲边三角形面积这两个問題都要用到极限方法。这两个問題代表了微积分中两类基本問題——微分問題与积分問題。

小张：經你这么一說，看来微积分并不神秘难懂。今天，你对我的帮助很大，我初步了解了微积分所研究的两类基本問題，加强了学好微积分的信心。

老李：我們用辯証唯物主义思想作指导，一定可以学好微积分。当然具体学习时，还会有很多困难，正象馬克思指出的：**“在科学上面是沒有平坦的大路可走的，只有那在崎嶇小路的攀登上不畏劳苦的人，有希望达到光輝的頂点。”**我們要遵照毛主席的教导：**“在战略上我們要藐視一切敌人，在战术上我們要重視一切敌人。”**既不害怕它，同时又要認真对待，刻苦鑽研，才能学好。

第一章　函数和极限

微积分是以現实世界的变量为其研究对象的一門数学。变量之間的相互依賴关系即所謂“函数关系”是首先要加以討論的。

第一节　函　　数

§ 1.1　函数概念

常　量　与　变　量

在研究自然現象或解决生产問題时，会遇到两种量：一种是可变的，即在某个过程中，这个量可以取得不同的数值；另一种是不变的，即在某个过程中，这个量保持固定的数值。前者叫做**变量**，后者叫做**常量**。例如：火車由合肥开往上海的过程中，它与合肥的距离是变量，車廂內的乘客的数目也是变量，而每节車皮的长度是常量；物体自高处下落时，它与地面的距离是变量，下落的速度也是变量，而物体的質量是常量；密封容器內的气体在加热过程中，气体的体积和分子的数目是常量，而气体的溫度和压力則是变量；……。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作具体分析。例如，气溫的变化使机器上的軸热胀冷縮，但当气溫变化引起的軸长变化不大时，我們就将軸长看成是常量；而在精密的仪器上，軸长的微小变化也可能影响仪器的精度，这时就应将軸长看成是变量，以估計它对精度的影响。

在数学中常用字母 x,y,z,s 等表示变量，而用字母 a,b,c,k 等表示常量。由于变量可以取不同的值，它在数軸上对应着一个动点，而常量始終保持一定的数值，它在数軸上对应着一个定点。

函　数　的　定　义

毛主席教导我們：**“每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。”**反映在数量关系上，就是在同一变化过程中，各个数量的变化不是彼此孤立的，而是相互联系，相互依賴的。我們所要討論的，首先是两个变量之間的一种确定的依賴关系，即所謂函数关系。許多变化过程在数量上的規律性，可以通过变量間的函数关系表現出来。下面先看几个例子。

例 1. 物体在时刻 $t=0$ 从高度为 h 处自由落下。从物理学知道，物体下落的路程 s 与时間 t 之間的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度。对每一个 t 的值，按照公式，可以确定出 s 的唯一的一个值。例如

$t=2$ 秒时，$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times9.8\times4=19.6$(米)；$t=3$ 秒时，$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times9.8\times9=44.1$（米）。应注意 t 的取值有一定范围，因为当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时，物体已达地面，所以 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

例 2. 根据牛顿万有引力定律，具有質量 m 和 M 的两个質点之間，在距离为 r 时的引力 F 是

$$F=k\frac{mM}{r^2},$$

其中 k 是引力常数。这个公式給出了 r 与 F 之間的对应关系，对于 $r(r>0)$ 的每一个值，从这公式可以确定出 F 的唯一的一个值。

例 3. 某河流的水文站，記录了該河流历年的月流量 v（即一个月流过的水量的总和），現将 40 年的平均月流量列表如下：

月　份　t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月　流　量　v（亿立方米）	0.39	0.44	0.57	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

这里也有两个变量：月份 t 及流量 v. t 只能取 $1,2,\cdots,12$ 这十二个数。每取定 t 的一个值，从表中便可唯一地确定出 v 的一个值。例如，$t=5$ 时，$v=0.35$；$t=9$ 时，$v=1.8$。

例 4. 一天中气溫 T 与时間 t 是两个变量。图 5 是北京某地气象站自动記录的某一天气溫的变化曲綫。这条曲綫表出了气溫 T 随时間 t 变化的規律。在这里 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant24$. 在 t 的变化范围内，每給定一个值，就可从图中确定出 T 的唯一的一个相应的值来。

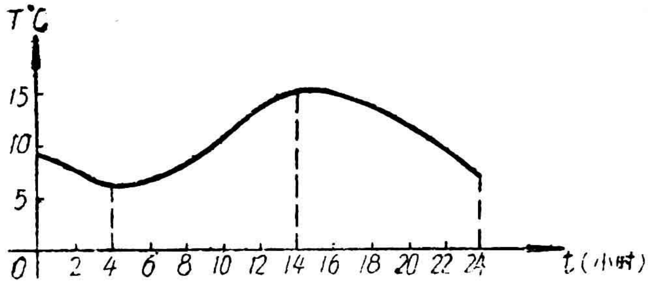

图　5

上面四个例子，虽然实际意义各不相同，变量之間的关系也是用不同的方式表示的，但它們有一重要的共同点，就是在出现的两个变量中有确定的依賴关系，只要其中一个变量的值取定后，另一个变量的值也就跟着唯一地确定了。变量之間的这样一种关系叫做函数关系。

定义. **設在某个变化过程中有两个变量 x 与 y. 如果对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值，根据某一对应法則可确定变量 y 的唯一的一个值，那末我們就說，变量 y 是变量 x 的函数，記作**

$$y=f(x), \qquad (1)$$

其中 x 叫做自变量，y 随 x 的变化而变化，叫做因变量。自变量 x 的变化范围称为函数的定义域。

在实际問題中，还会遇到自变量的一个值对应于因变量的多个值的情形，这时称函数为**多值函数**。若自变量的一个值对应于因变量的唯一的一个值，就称函数为**单值函数**。本教材主要研究单值函数。以后不加說明时，所論的函数都是指单值函数。

自变量取某一值 $x=x_0$ 时，对应的因变量 y 的值称为函数在点 $x=x_0$ 的值，記为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，例如，設

$$y=f(x)=2x^2+\frac{1}{x},$$

那末，

$$f(1)=2(1)^2+\frac{1}{1}=3,$$

$$f(x_0)=2(x_0)^2+\frac{1}{x_0}=2x_0^2+\frac{1}{x_0},$$

$$y|_{x=\frac{1}{3}}=2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{29}{9},$$

$$f(a+b)=2(a+b)^2+\frac{1}{a+b},$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=2(x_0+h)^2+\frac{1}{x_0+h}-\left(2x_0^2+\frac{1}{x_0}\right)=4x_0h+2h^2+\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}.$$

根据函数的定义，要使变量 y 是变量 x 的函数，首先两者之間要有一个确定的对应法则，根据这个法則，才能从自变量 x 的值确定出因变量 y 的值。在函数記号（1）中，$f(\ )$ 所表示的就是变量 x 与变量 y 間的对应法則。对于不同的函数关系，对应法則可取不同的記号，如例 1 中 s 是 t 的函数，可記为 $s=f(t)$；例 2 中 F 是 r 的函数，可記为 $F=g(r)$；例 4 中 T 是 t 的函数，可記为 $T=T(t)$ 等等。

从上面所举的例子可以看出，表示函数的对应法則的方法是多种多样的，一般来說，两个变量之間的函数关系有三种表示法：**公式法**（例 1、例 2），**列表法**（例 3），**图示法**（例 4）。这三种表示法各有其特点：公式法便于作理論分析；列表法有現成的数据，用起来方便；图示法直观。三种表示法是相輔相成的。有时候給出函数的公式，要作出函数的图形，便于作直观的分析；有时候从实驗結果画出了函数图形，要列出函数式子，便于作理論分析；有些函数不易用公式来表示，就主要靠图形和表格来分析。本教材所涉及的函数，絕大多数是用公式表示的。

根据函数的定义，除了对应法則外还必須給出自变量的变化范围，即函数的定义域，这个函数才算完全确定了。在上面的四个例子中，例 1 的定义域是 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$；例 2 的定义域是 $r>0$；例 3 的定义域是 $1,2,\cdots,12$ 这十二个数；例 4 的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 24$。

关于函数的概念，关鍵是弄清对应法則和定义域。下面就对这两个方面作进一步的討論。

列 函 数 关 系

在实际問題中，如何用公式把变量間的函数关系表示出来，这是用数学方法解决实际問題的关鍵之一。下面举几个例子。

例 5. 在漏斗形的量杯上要刻上表示容积的刻度，需要找出溶液深度与其对应容积之間的函数关系。现知漏斗的頂角是 60°，試求容积与深度的函数关系。

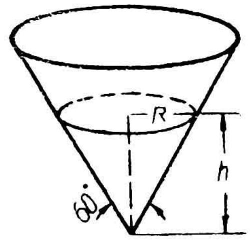

图 6

解. 先画出示意图如图 6，設深度为 h 时，对应的容积为 V. 由圓錐的体积公式得

$$V=\frac{1}{3}\pi R^{2}h, \tag{2}$$

其中 R 是液面的半径。题目的要求是求出容积 V 与深度 h 的函数关系。因此需要将半径 R 用深度 h 来表示。由于漏斗的頂角是 60°，我們立刻可以得到

$$\frac{R}{h}=\operatorname{tg}30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

即 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，把它代入（2），即得

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^{2}h=\frac{1}{9}\pi h^{3}.$$

根据这个公式，对于一个确定的 h 值，就可算出相应的 V 值。这样，就可在量杯上刻出表示容积的刻度了。自变量 h 的变化范围要由量杯的高度来确定。

例 6. 在机械中广泛应用着曲柄連桿机构（图 7）。設主动輪的半径 $OA=r$，連桿 $AB=l$. 当主动輪以等角速度 w（弧度/秒）轉动时，曲柄 OA 繞軸 O 作圓周运动，連桿 AB 带动滑块 B 作往复直綫运动。求滑块的运动規律。

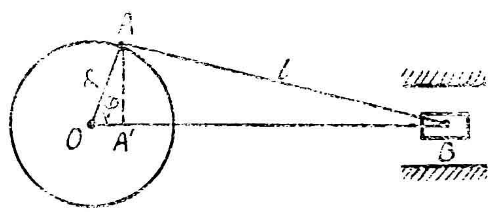

图 7

解. 設当轉角为 φ 时，滑块 B 的位置与 O 点的距离为 x，即 $OB=x$. 已知 $AB=l, OA=r$, 过点 A 作 $AA'\perp OB$，得

$$OA'=r\cos\varphi,\quad A'B=\sqrt{l^{2}-AA'^{2}}=\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\varphi},$$

故有

$$x=OA'+A'B=r\cos\varphi+\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\varphi}.$$

又因主动輪的轉角 φ 是 t 的函数：

$$\varphi=wt,$$

把 $\varphi=wt$ 代入上式，得

$$x=r\cos wt+\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}wt}.$$

这就是滑块的运动規律。

例 7. 火車站收行李費的規定如下：当行李不超过 50 公斤时，按基本运費計算，如从

北京到某地每公斤收 0.15 元，当超过 50 公斤时，超重部分按每公斤 0.25 元收费。求运费 y 与行李重 x 間的函数关系。

解. 在这个問題中因为 50 公斤以內和 50 公斤以外的行李每公斤收費的标准不同，因此計算时就要根据是否超过 50 公斤而采取不同的方法。当重量 x 不超过 50 公斤，即 $0 \leqslant x \leqslant 50$ 时，$y=0.15x$；当重量 $x>50$ 时，$y=0.15\times 50+0.25\times(x-50)$. 于是 y 与 x 的函数关系可表为

$$y=f(x)=\begin{cases}0.15x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.15\times 50+0.25\times(x-50), & x>50.\end{cases}$$

其图形見图 8。

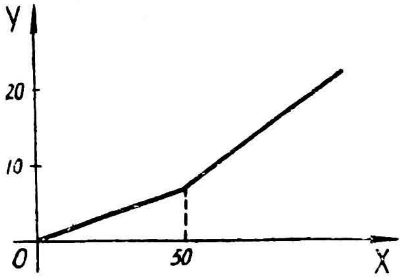

图 8

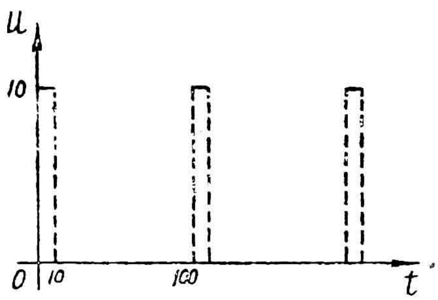

图 9

例 8. 图 9 是矩形脉冲的图形，它表示每隔 100 微秒（1 秒 $=10^6$ 微秒）产生一个 10 伏的电压脉冲，持續时間是 10 微秒。試用公式表示这个函数。

解. 由于波形是周期性的，我們只須写出一个周期內的函数关系式。当 t 由 0 微秒增至 10 微秒时，电压 u 等于 10 伏，而当 t 由 10 微秒增至 100 微秒时，电压 u 等于 0，故

$$u=u(t)=\begin{cases}10, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ 0, & 10<t<100.\end{cases}$$

从例 7、例 8 我們看到，在一些实际問題中，經常要遇到用几个公式組合起来才能表示的函数，称为“**分段函数**”。必須注意，分段函数的特点是，在自变量 x 的不同范围內，表示函数对应規律的公式是不同的，我們在求函数値时应注意这一点。如例 7 中，$f(20)=0.15\times 20=3$，$f(100)=0.15\times 50+0.25\times(100-50)=20$. 在求分段函数的定义域时，必須把各段的自变量变化范围均包括进去，如例 7 的定义域是 $x\geqslant 0$，例 8 的第一个周期的定义域是 $0\leqslant t<100$.

关于函数的定义域

对于描述实际現象的函数关系，它的定义域必須由实际問題本身的意义来确定。前面举的八个例子，已經充分說明了这个問題。如果用某个算式来表示一个函数，而沒有另加說明，那末这个函数的定义域就是使該算式有意义的自变量的变化范围。例如，对函数

$$y=\frac{1}{x}$$

来說，要使它有意义，必須分母不等于 0，即 $x\neq 0$. 因此定义域是除去 $x=0$ 外的一切实数

值，可以記作 $-\infty<x<0$ 及 $0<x<+\infty$，或簡記为 $x\neq 0$. 为了熟悉这种求定义域的方法，我們再举两个例子。

例 9. 求函数 $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ 的定义域。

解. 要使函数有意义，根号內的数必須取非負值，即要求

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\geqslant 0.$$

解这个不等式得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 1$. 故知这个函数的定义域是 $x\geqslant 3$，$x\leqslant 1$.

例 10. 求函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域。

解. 要使 $\ln\dfrac{1}{1-x}$ 有意义，必須 $\dfrac{1}{1-x}>0$，即 $x<1$. 要使 $\sqrt{9-x^2}$ 有意义，必須 $9-x^2\geqslant 0$，这就要求 $-3\leqslant x\leqslant 3$. 要使原来的函数有意义，必須这两者都有意义，因此它的定义域是 $-3\leqslant x<1$.

为了簡便起見，有时用“**区間**”来表示变量 x 的变化范围。我們把适合不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体，称为一个**閉区間**，用記号 $[a,b]$ 来表示；适合不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体，称为一个**开区間**，用記号 (a,b) 来表示；适合不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体，称为**半开区間**，分别用号記 $(a,b]$、$[a,b)$ 来表示。从数軸上来看，区間是介于某两个点之間的一綫段上点的全体，閉区間包含其端点，开区間不包含其端点（图 10）。

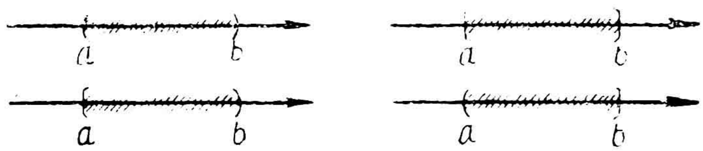

图 10

除了上述那些有限区間外，还有**无限区間**：$[a,+\infty)$ 表示滿足不等式 $x\geqslant a$ 的实数 x 的全体；$(a,+\infty)$ 表示滿足不等式 $x>a$ 的实数 x 的全体；仿此不难理解記号 $(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$ 的意义。区間 $(-\infty,+\infty)$ 表示一切实数的全体。

如果用区間来表示函数的定义域，那末例 9 的定义域是 $(-\infty,1]$，$[3,+\infty)$；例 10 的定义域是 $[-3,1)$。

习　　題　　一

1. 設

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1},\qquad g(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$$

求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(\sqrt{2})$，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$，$g(1)$，$g(2)$，$g(-2)$，$g(a)$.

2. 設 $f(u)=u^3-1$，求 $f(1)$，$f(a)$，$f(a+1)$，$f(a-1)$，$2f(2a)$.

3. 設 $\varphi(t)=ta^t$，求 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$，$\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)$.

4. 設 $f(x)=x^2-3x+7$，求 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

5. 設 $f(x)=\ln x$，証明 $f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$.

6. 設 $g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，証明 $g(a)+g(b)=g\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. 設 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，証明 $f(a)=f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

8. 設 $\varphi(x)=x^2+\cos x$，証明 $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

9. 設 $F(x)=\dfrac{x^3\cos x}{1+x^2}$，証明 $F(-x)=-F(x)$.

10. 已知圓錐的体积为 V，試将圓錐的底半径 R 表为其高 h 的函数。

11. 一圓半径为 8，記其弦长为 l，試将 l 表成圓心到弦的距离 x 的函数。

12. 在边长为 12 的正方形紙板的四个角上，各剪去一个边长为 x 的正方形，把它折起来做成一个无盖的盒子。試将盒子的容积 V 表成 x 的函数。

13. 从一半径为 R 的圓鉄片上，自中心剪去一中心角为 θ 的扇形，把剩下的部分围成一个无底的圓錐。試将这圓錐的体积 V 表达为 θ 的函数。

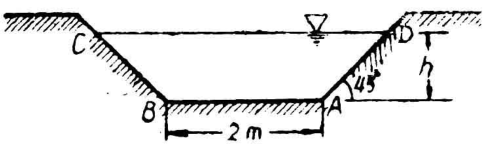

图 11

14. 某灌溉渠的横断面是一个梯形，底寬 2 米，边坡 1:1（即傾角为 45°）。CD 表示水面，$ABCD$ 叫过水断面。求过水断面面积 S 和水深 h 的函数关系（图 11）。

15. 矿井深 H 米，用半径为 R 的卷揚机以每秒鐘 ω 弧度的角速度从矿井底吊起重物。求重物离地面的距离 h 与时間 t 的函数关系。又若 $H=50$ 米，$R=0.5$ 米，$\omega=2\pi$ 弧度/秒，問經过多少时間能把重物从井底吊到地面(图12)。

16. 某化工厂有一半径为 R 的球形容器。液体深度为 h 时，液面面积为 A，求 A 与 h 的函数关系（图 13）。

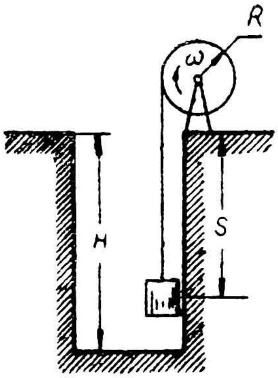

图 12

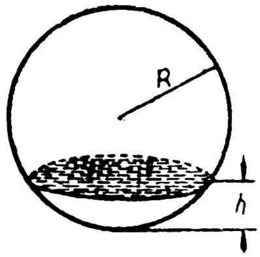

图 13

17. 邮資 y 是信件重量 x 的函数，按照邮局的规定，对于国內的外埠平信，按信件重量，每重 20 克应付邮資 8 分，不足 20 克者以 20 克計算，当信件的重量在 60 克以內时，試写出这个函数的数学表达式，并画出它的图形。

18. 写出由图 14 和图 15 所表示的函数的表达式（这是无綫电技术中所謂矩形脉冲和三

角形脉冲一个周期的图形）。

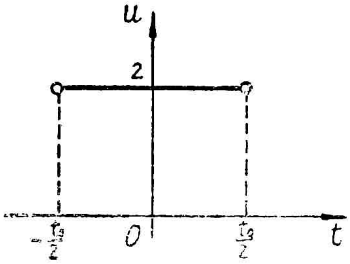

图　14

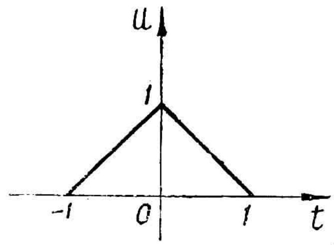

图　15

19. 物体作直綫运动，已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反。当物体以1米/秒的速度运动时阻力为2克，試建立阻力 f 与速度 v 間的函数关系。

20. 一座拱桥，形状是抛物綫，其跨度为20米，中心处拱高为4米。根据施工需要，将跨度分成8等分，要算出各分点处的拱高。試計算图16中的 h_1, h_2, h_3.

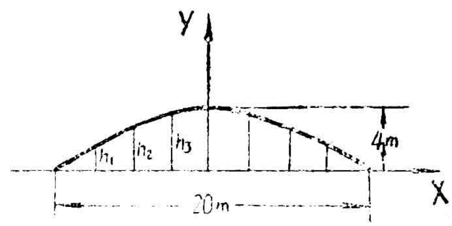

图　16

21. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x-1}$　　　（2）$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

（3）$y=\sqrt{3x+4}$　　　（4）$y=\dfrac{1}{1+x^2}$

（5）$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　　（6）$y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

（7）$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$　　　（8）$y=\sqrt{x^2-8x+15}$

（9）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$　　　（10）$y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

§ 1.2　复合函数与反函数

复　合　函　数

在各种具体問題中，有时变量間的依賴关系是錯綜复杂的。通常表現之一是鎖鏈式的依賴关系，即变量甲依賴于变量乙，变量乙又依賴于变量丙，等等。如 § 1.1 例6中

$$x=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi},$$

而

$$\varphi=\omega t,$$

所以 x 通过中間变量 φ 而依賴于时間 t 的函数关系是：

$$x=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}.$$