北京工业大学
"211工程"资助出版

运筹与管理科学丛书 14

设施选址问题的近似算法

徐大川 张家伟 著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 14

设施选址问题的近似算法

徐大川　张家伟　著

北京工业大学“211 工程”资助出版

科学出版社

北　京

内 容 简 介

设施选址问题是经典的NP-难解问题之一，在运筹学、计算机科学和管理科学中有着广泛的应用. 本书介绍了设施选址问题及其变形的近似算法. 主要内容包括：无容量限制的设施选址问题的线性规划舍入算法、无容量限制的设施选址问题的原始对偶算法、无容量限制的设施选址问题的局部搜索算法、有容量限制的设施选址问题、k 层设施选址问题、凹设施选址问题、不确定设施选址问题、设施选址问题的其他变形等.

本书可作为运筹学、计算机科学、管理科学和应用数学专业的高年级本科生和研究生的教材和参考书，亦可供相关研究领域科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

设施选址问题的近似算法/徐大川，张家伟著. —北京：科学出版社，2013
(运筹与管理科学丛书；14)
ISBN 978-7-03-035240-8
Ⅰ. ①设… Ⅱ. ①徐… ②张… Ⅲ①近似计算-应用-基础设施-选址
Ⅳ. ① F294

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 177088 号

责任编辑：李 欣 赵彦超 / 责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年1月第一版 开本：B5(720×1000)
2013年1月第一次印刷 印张：14 3/4
字数：297 000
定价：58.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:“运筹帷幄之中, 决胜千里之外. ”

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于20世纪50年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

总　　序

“211 工程” 是我国建国以来教育领域唯一的国家重点建设工程, 面向 21 世纪重点建设一百所高水平大学, 使其成为我国培养高层次人才, 解决经济建设、社会发展和科技进步重大问题的基地, 形成我国高等学校重点学科的整体优势, 增强和完善国家科技创新体系, 跟上和占领世界高层次人才培养和科技发展的制高点.

中国高等教育发展迅猛, 尤其是 1400 所地方高校已经占全国高校总数的 90%, 成为我国高等教育实现大众化的重要力量, 成为区域经济和社会发展服务的重要生力军.

在北京市委、市政府的高度重视和大力支持下, 1996 年 12 月我校通过了 “211 工程” 部门预审, 成为北京市属高校唯一进入国家 “211 工程” 重点建设的百所大学之一. 我校紧紧抓住 “211 工程” 建设和举办奥运的重要机遇, 实现了两个历史性的转变: 一是实现了从单科性大学向以工科为主, 理、工、经、管、文、法相结合的多科性大学的转变; 二是实现了从教学型大学向教学研究型大学的转变. “211 工程” 建设对于我校实现跨越式发展、增强服务北京的能力起到了重大的推动作用, 学校在学科建设、人才培养、科学研究、服务北京等方面均取得了显著的成绩, 综合实力和办学水平得到了大幅度的提升.

至 2010 年底, 我校的学科门类已经覆盖了 8 个: 工学、理学、经济学、管理学、文学、法学、哲学和教育学. 现拥有 8 个一级学科博士学位授权点、37 个二级学科博士学位授权点和 15 个博士后科研流动站, 15 个一级学科硕士学位授权点和 81 个二级学科硕士学位授权点; 拥有 6 种类型硕士研究生专业学位授权资格, 工程硕士培养领域 19 个; 拥有 3 个国家重点学科、16 个北京市重点学科和 18 个北京市重点建设学科.

目前, 学校有专任教师 1536 人, 全职两院院士 5 名, 博士生导师 220 人, 有正高职称 294 人和副高职称 580 人, 专任教师中具有博士学位教师的比例达到 54.6%. 有教育部 “长江学者” 特聘教授 4 人, 国家杰出青年基金获得者 6 人, 入选中组部 “千人计划”1 人, 北京市 “海聚工程”3 人, 教育部新 (跨) 世纪优秀人才支持计划 15 人.

2010 年学校的到校科研经费为 6.2 亿元. “十一五” 期间, 学校承担了国家科技重大专项 28 项, “973 计划” 项目 16 项, “863 计划” 项目 74 项, 国家杰出青年基金 2 项, 国家自然科学基金重点项目 8 项、科学仪器专项 2 项、重大国际合作项目 1 项、面上和青年基金项目 347 项, 北京市自然科学基金项目 180 项, 获国家级奖

励 14 项. 现有 1 个共建国家工程研究中心, 7 个部级或省部共建科研基地, 11 个北京市重点实验室和 3 个行业重点实验室.

为了总结和交流北京工业大学 “211 工程” 建设的科研成果, 学校设立了 “211 工程” 专项资金, 用于资助出版系列学术专著. 这些专著从一个侧面代表了我校教授、学者的学科方向、研究领域、学术成果和教学经验.

展望北工大未来, 我们任重而道远. 我坚信, 只要我们珍惜 “211 工程” 建设的重要机遇, 构建高层次学科体系, 营造优美的大学校园, 我校在建设国际知名、有特色、高水平大学的进程中就一定能够为国家、特别是为北京市的经济建设和社会发展做出更大的贡献.

中国工程院院士
北京工业大学原校长 左铁镛
2011 年 6 月

前　　言

设施选址问题在运筹学、计算机科学和管理科学领域受到了广泛关注. 最近十几年来, 人们在设施选址问题的近似算法领域取得了非常丰富的研究成果.

本书第 1 章介绍问题模型和结果. 第 $2\sim4$ 章分别介绍经典的无容量限制的设施选址问题的线性规划舍入算法、原始对偶算法和局部搜索算法. 第 $5\sim9$ 章介绍设施选址问题的各种变形. 书中 3.5, 5.1, 5.2, 6.3~6.5, 7.1, 7.2, 8.2, 8.3, 9.1~9.4 节是作者与合作者近年来的研究成果[4,20,21,45,52~54,61,64,71,72,75~78], 其他章节取材于文献 [1, 6, 9, 13, 17, 30, 37~39, 44, 47, 50, 56, 63, 67].

本书内容曾在北京工业大学运筹学专业的近似算法研究生课程和讨论班中讲授过. 感谢作者的研究生吴晨晨、王凤敏、王星、万玮、余让慧以及博士后合作者任建峰录入部分内容并校对初稿, 其中前两位学生付出了很多时间和精力, 书中所有的插图由吴晨晨完成, 名词索引由王凤敏完成. 感谢朋友和同事陈旭瑾、杜东雷、李改弟、盖玲、舒嘉、邢文训、薛毅、张国川、张海斌、朱文兴等对本书的初稿提出的宝贵建议和修改意见.

感谢中国科学院数学与系统科学研究院的韩继业教授、袁亚湘教授、胡晓东教授、斯坦福大学的叶荫宇教授、明尼苏达大学的张树中教授等多年来给予作者的支持和帮助. 感谢北京工业大学数理学院和纽约大学商学院为作者提供的良好科研环境. 感谢科学出版社责任编辑为本书的撰写和编辑提供的帮助. 此外, 作者要感谢各自的家人对作者工作给予的支持和理解. 特别地, 在书稿的写作过程中, 本书第一作者徐大川的母亲、曲阜师范大学数学系方逸耀副教授生前一直鼓励其潜心学术研究, 安心著书, 谨以此书献给她.

本书得到了北京工业大学 “211 工程” 专著出版专项资金和国家自然科学基金 (No. 11071268) 的资助.

由于作者水平有限, 本书难免有错误和不妥之处, 欢迎读者批评指正.

徐大川　张家伟

北京工业大学, 纽约大学

2012 年 11 月

目　　录

第1章　绪　　论

自 20 世纪 60 年代初期以来, 设施选址问题 (facility location problem, 简记为 FLP) 在运筹学中一直占据着中心位置[69]. 它来自于工厂、仓库、超市、学校、医院、图书馆、火车站、代理服务器、传感器等位置的确定问题. 运筹学、管理科学和计算机科学领域有许多专家从事该问题的研究.

设施选址问题是 NP- 难解问题, 除非 P=NP, 设施选址问题不存在多项式时间精确算法. 由于设施选址问题具有很强的实际背景, 处理该问题所取得的进展往往有助于提高生产效率和管理水平. 因此, 许多学者对设施选址问题感兴趣, 设法从各种渠道来寻找处理它的方法, 其中一个有效而合理的方法是采用近似算法来求解. 此时要求设计出多项式时间算法, 并要求估计算法所得到的解对应的目标函数值与最优值之间的比值 (近似比). 已知一个极小化问题, 如果算法在多项式时间内能给出可行解, 并且所对应的目标值不超过最优值的 $\rho(\geqslant 1)$ 倍, 那么称该算法为 ρ- 近似算法, 称 ρ 为近似比. 对于极大化问题可以类似地定义近似比 $\rho(\leqslant 1)$. 关于 NP- 完全性理论和近似算法的更多介绍参见文献 [58, 59, 70, 79].

设计设施选址问题的近似算法主要分为三类：线性规划舍入 (LP rounding)、原始对偶 (primal-dual) 和局部搜索 (local search). 前两类算法基于线性规划松弛. 在线性规划舍入算法中, 首先给出原问题的线性整数规划模型, 然后求解相应的线性规划松弛问题得到分数最优解, 通常会根据可行性要求对分数最优解进行改造, 最后在 (改造的) 分数解的基础上构造原问题的整数可行解. 由于线性规划舍入算法需要求解线性规划, 故不是组合算法. 如果不直接求解线性规划松弛问题, 而是设计组合算法给出对偶问题的可行解 (通常为对偶上升过程), 根据该对偶可行解的信息构造原始问题的整数可行解, 通过与对偶可行解比较得到算法的近似比, 这类算法称为原始对偶算法. 原始对偶算法有两个优点：一是该算法是组合算法, 可以揭示问题的组合结构; 二是该算法具有鲁棒性, 容易移植到其他变形问题上. 对偶拟合 (dual fitting) 算法可以看做原始对偶算法的变形. 该算法用组合算法构造对偶解 (不一定可行) 使得费用与原始整数可行解的费用相同, 通过将对偶解一致缩小得到对偶可行解, 同时缩小的系数即为近似比. 在局部搜索算法中, 给定初始可行解, 定义适当的邻域, 通过引入恰当的调整策略, 在邻域中得到改进的可行解, 依次迭代下去, 直到按照给定的调整策略不能改进为止. 局部搜索算法在硬容量限制的设施选址问题上得到了成功的应用.

1.1　无容量限制的设施选址问题

结构最简单同时也是最经典的设施选址问题是无容量限制的设施选址问题 (uncapacitated facility location problem, 简记为 UFLP). 在 UFLP 中, 给定 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 的二部图 G, 其中 $\mathcal{F}$ 表示设施 (facility) 集合, $\mathcal{C}$ 表示顾客 (client) 集合, 对于任意 $i\in\mathcal{F}$, $j\in\mathcal{C}$, f_i 表示设施 i 的开设费用 (opening cost), d_j 表示顾客 j 的服务需求量, c_{ij} 表示设施 i 为顾客 j 提供单位服务的连接费用 (connection cost). 我们的目标是选择 $\mathcal{F}$ 的子集 $\hat{\mathcal{F}}$, 开设 $\hat{\mathcal{F}}$ 中的设施, 找到函数 ϕ: $\mathcal{C}\longrightarrow\hat{\mathcal{F}}$, 将 $\mathcal{C}$ 中顾客连接到开设的设施上以满足其需求, 最终使得总费用 (开设费用与连接费用之和) 最小.

在本书中, 如无特殊说明, 一般考虑 $d_j=1(\forall j\in\mathcal{C})$ 的情形. UFLP 可写为如下形式的线性整数规划

$$\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i\in\mathcal{F}} f_iy_i+\sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} c_{ij}x_{ij}\\
\text{s. t.}\quad & \sum_{i\in\mathcal{F}} x_{ij}\geqslant 1,\quad \forall j\in\mathcal{C},\\
& x_{ij}\leqslant y_i,\quad \forall i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C},\\
& x_{ij},y_i\in\{0,1\},\quad \forall i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}.
\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

在上述规划中, y_i 表示设施 i 是否开设, 若开设, 则 $y_i=1$, 否则 $y_i=0$; x_{ij} 表示顾客 j 与设施 i 是否相连, 若相连, 则 $x_{ij}=1$, 否则 $x_{ij}=0$; 第一组约束条件表示任意顾客 j 至少与一个设施相连; 第二组约束条件表示如果顾客 j 连接到某个设施 i 上, 则设施 i 必须开设. 记 OPT 为 (1.1.1) 的最优解, 相应的设施开设费用和连接费用分别是 F_{OPT} 和 C_{OPT}. (1.1.1) 的线性规划松弛为

$$\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i\in\mathcal{F}} f_iy_i+\sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} c_{ij}x_{ij}\\
\text{s. t.}\quad & \sum_{i\in\mathcal{F}} x_{ij}\geqslant 1,\quad \forall j\in\mathcal{C},\\
& x_{ij}\leqslant y_i,\quad \forall i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C},\\
& x_{ij},y_i\geqslant 0,\quad \forall i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}.
\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

记 (x^*,y^*) 为 (1.1.2) 的最优解, 相应的最优值记为 LP*, 并记

$$F^*:=\sum_{i\in\mathcal{F}} f_iy_i^*,\quad C_j^*:=\sum_{i\in\mathcal{F}} c_{ij}x_{ij}^*,\quad C^*:=\sum_{j\in\mathcal{C}} C_j^*=\sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} c_{ij}x_{ij}^*.$$

(1.1.2) 的对偶线性规划为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j\in C}\alpha_j \\
\text{s. t.} \quad & \alpha_j-\beta_{ij}\leqslant c_{ij}, \quad \forall i\in\mathcal{F}, j\in\mathcal{C}, \\
& \sum_{j\in C}\beta_{ij}\leqslant f_i, \quad \forall i\in\mathcal{F}, \\
& \alpha_j,\beta_{ij}\geqslant 0, \quad \forall i\in\mathcal{F}, j\in\mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

记 (α^*,β^*) 为 (1.1.3) 的最优解.

在本书或其他文献中, 一些术语会交替使用. 如: 顾客也可以称为城市 (city), 终端用户 (end-user), 需求点 (demand point) 等. 顾客 j 连接到设施 i, 也称为顾客 j 被指派到设施 i, 或者顾客 j 由设施 i 服务. 连接费用 c_{ij} 也称为服务费用 (service cost) 或者指派费用 (assignment cost). 记 $n_c=|\mathcal{C}|$, $n_f=|\mathcal{F}|$. 二部图 G 中的总顶点数为: $n_c+n_f=n$, 总边数为: $n_c\times n_f=m$. 在本书中, 如果不做特别说明, 考虑的 UFLP 及其变形均为可度量情形, 即连接费用 c_{ij} 是非负的、对称的且满足三角不等式 (任意给定三点构成的三角形, 两边之和大于第三边). 记 $\mathrm{e}\approx 2.71828182$ 为自然对数的底.

考虑非度量情形, Hochbaum[36] 证明了无容量限制的设施选址问题的近似比为 $O(\log n_c)$, 并且近似比的下界是 $\Omega(\log n_c)$[25].

考虑可度量情形, Shmoys 等[63] 利用线性规划舍入技巧给出第一个常数比 3.16-近似算法, Chudak 和 Shmoys[17] 通过构造所谓的完全解, 随机开设设施, 得到改进的 1.736-近似算法. Jain 和 Vazirani[39] 给出原始对偶组合 3-近似算法. Pál 和 Tardös[56] 给出光滑化的原始对偶组合 3-近似算法. Korupolu 等[42] 给出局部搜索 $(5+\epsilon)$-近似算法. Arya 等[6] 给出局部搜索 $(3+\epsilon)$-近似算法, 通过按比例放大 (scaling up) 设施费用, 近似比可以改进为 $1+\sqrt{2}+\epsilon$. Guha 和 Khuller[30] 基于 Shmoys 等[63] 的算法得到的解, 结合贪婪增广技巧得到 2.408-近似算法, 当设施费用都相同时, 近似比可以改进为 2.225. Charikar 和 Guha[13] 给出组合的 $(1+\sqrt{2}+\epsilon)$-近似算法, 与 Jain 和 Vazirani[39] 的算法结合可以得到 1.8526-近似算法, 再进一步与 Chudak 和 Shmoys[17] 算法结合得到 1.728-近似算法. Mahdian 及其合作者[37, 38, 50, 52, 54] 分别给出了对偶拟合 1.861, 1.61, 1.52- 近似算法. Sviridenko[67] 利用管输舍入 (pipage rounding) 得到 1.582- 近似算法. Byrka 和 Aardal[9] 通过识别近点和远点来估计连接费用的上界, 得到改进的 1.50- 近似算法. Li[47] 在 Byrka 和 Aardal[9] 算法的基础上, 按照某种概率分布选取按比例放缩参数 (scaling parameter), 结合对偶拟合算法得到目前最好的结果, 1.488- 近似算法.

关于 UFLP 下界的结果如下. Guha 和 Khuller[30] 证明了, 如果 UFLP 存在 ρ-

近似算法 ($\rho < 1.463$) 则意味着 NP $\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log n)}$). Sviridenko[66] 将结果加强为, 如果 UFLP 存在 ρ- 近似算法 ($\rho < 1.463$), 则意味着 P = NP.

第 2~4 章, 我们按照算法设计技巧, 分别介绍无容量限制的设施选址问题的线性规划舍入算法、原始对偶算法和局部搜索算法.

1.2　设施选址问题的各种变形

第 5 章, 我们介绍有容量限制的设施选址问题 (capacitated facility location problem, 简记为 CFLP). 在该问题中, 每个设施能够提供的服务量受到限制. 假设每个顾客的需求是可分的 (splittable demand), 即可以由多个设施提供服务. 如果允许每个设施可以开设多次并支付相应次数的开设费用, 则得到软容量限制的设施选址问题 (soft capacitated facility location problem, 简记为 SCFLP). 如果每个设施至多只能开设一次, 则得到硬容量限制的设施选址问题 (hard capacitated facility location problem, 简记为 HCFLP). 对于 SCFLP, Shmoys 等 [63] 利用线性规划舍入技巧给出 5.69- 近似算法, Arya 等 [6] 利用局部搜索技巧给出 $(3.732+\epsilon)$- 近似算法, Jain 和 Vazirani[39] 利用线性规划对偶理论给出 4- 近似算法, Mahdian 等[52] 推广了上述技巧并给出 2.89- 近似算法, Mahdian 等[53, 54] 利用归约的思想给出 2- 近似算法, 并证明了该问题线性规划松弛的整数间隙 (integrality gap) 为 2. 对于 HCFLP, 当每个设施的容量限制相同时, Korupolu 等[42] 采用局部搜索技巧给出 8- 近似算法. Chudak 和 Williamson[18] 采用简化的分析给出 5.83- 近似算法. 目前最好的结果是 Aggarwal 等[5] 给出的 3- 近似算法. 当每个设施的容量限制不一定相同时, Pál 等[57] 给出基于局部搜索的 8.53- 近似算法, Mahdian 和 Pál[51] 给出改进的 7.88- 近似算法, 目前最好的结果是 Zhang 等[77] 给出的基于限制多交换技巧 (restricted multiexchange) 的 5.83- 近似算法. 当设施费用都相同时, Levi 等[44] 给出基于线性规划舍入的 5- 近似算法.

第 6 章, 我们介绍 k 层设施选址问题 (k-level facility location problem, 简记为 k-LFLP). 在该问题中, 设施 $\mathcal{F}$ 由 k 层设施集 $\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_k$ 构成. 每个顾客 $j\in\mathcal{C}$ 必须与一条由 k 个不同层的设施构成的路 $p=(i_1,\cdots,i_k)\in\mathcal{F}_1\times\cdots\times\mathcal{F}_k$ 相连接. k-LFLP 最好的近似比是 3, 由 Aardal 等[1] 提出的线性规划舍入算法得到. 该算法的缺点是, 它需要求解具有指数多个变量的线性规划松弛. Gabor 和 van Ommeren[28] 提出了一个有多项式个变量的线性规划松弛, 并给出线性规划舍入 3- 近似算法. 该问题的第一个组合近似算法是由 Meyerson 等[55] 提出的, 近似比为 $O(\ln n_c)$. 之后, Guha 等[31] 提出了近似比为 9.2 的近似算法. Bumb 和 Kern[8] 提出了一个原始对偶 6- 近似算法. Ageev[2] 指出, UFLP 的任意 ρ- 近似算法都可转化为 k-LFLP 的 3ρ- 近似算法. 目前最好的组合算法是 Ageev 等 [4] 给出的 3.27- 近似算法, 当层数

$k=2,3$ 时, 算法的近似比严格小于 3. 对于 2-LFLP, 最好的结果是 Zhang[76] 利用拟贪婪和对偶拟合技巧给出的 (非组合)1.77- 近似算法. 当 k 为常数时, Byrka 和 Rybick[11] 提出具有森林结构的线性规划松弛, 得到线性规划舍入 α_k- 近似算法, 其中 α_k 是关于 k 的递增函数且 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=3$. 当 $k\geqslant 3$ 时, Byrka 和 Rybick[11] 得到了 k-LFLP 的最好近似比, 特别地, 当 $k=3, 4, 5$ 时, 近似比分别为 2.02, 2.14, 和 2.24. 能否在多项式时间内得到一般 k-LFLP 比 3 更好的近似比成为一个具有挑战性的问题. k-LFLP 下界的结果最近取得了新的进展, 而不是简单的用 UFLP 的下界 1.463. Krishnaswamy 和 Sviridenko[43] 证明了, 如果 2-LFLP 存在 1.539- 近似算法, 或者 k-LFLP 存在 1.61- 近似算法, 则意味着 $\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{DTIME}(n^{O(\log\log n)})$.

第 7 章, 我们介绍凹设施选址问题 (concave cost facility location problem, 简记为 CCFLP). 在 UFLP 中, 设施的开设费用是一个常数, 与其服务的顾客集合无关. 但在 CCFLP 中, 设施的开设费用 $f_i(d)$ 是关于其服务的顾客总需求量 d 的凹函数. 每个顾客 j 的服务需求量为 d_j, 这里, 顾客的需求不可分, 必须由同一设施提供服务. 当 $d_j=1$ $(\forall j\in\mathcal{C})$ 时, Hajiaghayi 等[34] 利用对偶拟合技巧对 CCFLP 设计了 1.861- 近似算法. Li 等[45] 给出了光滑化的原始对偶 3- 近似算法. 对于一般的 d_j, Romeijn 等[61] 基于对偶拟合技巧设计了 1.61- 近似算法, 再结合按比例放缩和贪婪增广技巧可以得到改进的 1.52- 近似算法.

第 8 章, 我们介绍不确定设施选址问题. 8.1节考察给定多项式个场景的两阶段随机设施选址问题 (two-stage stochastic facility location problem, 简记为 SFLP) 的模型. 在该问题中, 整个选址过程分为两个阶段, 第一阶段并不确定需要服务 $\mathcal{C}$ 中的哪些顾客, 但可以选择一些设施开设, 这一阶段开设的设施能够为所有的顾客提供服务, 直到第二阶段才给定可能发生的所有场景 (scenario) 的信息及其发生的概率, 在每个场景中可以开设一些设施. 我们需要确定每个阶段开设的设施集合, 将每个场景出现的顾客连接到第一阶段或者第二阶段相应场景中开设的设施上, 使得开设费用和连接费用的期望和最小. 我们把算法得到的每个场景的可行解费用与相应无容量限制的设施选址问题最优值之间比值的上界称为算法单场景界 (per-scenario bound). Ravi 和 Sinha[60] 首次提出了 SFLP, 并给出了线性规划舍入 8- 近似算法. Mahdian[49] 给出原始对偶组合 3- 近似算法. Srinivansan[65] 通过先解线性规划, 按分数最优解将顾客分为两类, 一类由第一阶段开设的设施服务, 另一类由对应场景中的设施服务. 这样, 随机问题可以转化成若干个无容量限制的设施选址子问题, 对每个子问题应用对偶拟合算法[37] 将近似比改进到 2.369. 对顾客的分类准则稍作修改, 可以得到单场景界为 3.095. Byrka 等[10] 借鉴了 Srinivansan[65] 算法设计思想, 对每个无容量设施选址子问题上应用线性规划舍入算法[17], 将近似比改进到 2.2957, 单场景界改进到 2.4957. 8.2节介绍风险可调的两阶段随机设施选址问题 (risk-adjusted two-stage stochastic facility location problem, 简记为 RASFLP),

是 SFLP 的推广. So 等[64] 首次提出该模型, 并给出线性规划舍入 8- 近似算法. 8.3 节介绍动态设施选址问题 (dynamic facility loçation problem, 简记为 DFLP). DFLP 与时段 T 有关, 是 SFLP 的推广. Ye 和 Zhang[75] 基于原始对偶技巧设计了 DFLP 的 3- 近似算法, 用贪婪增广技巧可以改进到 1.8526, 该近似比也是 SFLP 问题的最好近似比. Li 等[46] 研究了随机优先设施选址问题, 给出了原始对偶 3- 近似算法.

第 9 章, 我们介绍设施选址问题的四种变形：带次模惩罚的设施选址问题 (9.1节), 带服务安置费用的设施选址博弈 (9.2节), 极大形式的 k 层设施选址问题 (9.3节), 硬容量限制的 k 层设施选址问题 (9.4节).

在选址过程中, 服务某些顾客的费用较高, 有时可以选择不服务这样的顾客, 但是如果顾客的服务要求没有得到满足就需要支付一定的费用, 称为惩罚费用, 这种变形称为带惩罚的设施选址问题 (facility location problem with penalties, 简记为 FLPWP). 根据惩罚费用函数的不同, 可以将带惩罚的设施选址问题分为线性惩罚情形 (facility location problem with linear penalties, 简记为 FLPLP) 和次模惩罚情形 (facility location problem with submodular penalties, 简记为 FLPSP). 具体地说, 在 FLPLP 中, 任意顾客 j 的惩罚费用为 p_j, 目标是选择一些顾客被惩罚, 再选择一些设施开设, 将每个未被惩罚的顾客连接到一个开设的设施上, 最终使得开设费用、连接费用和惩罚费用之和最小. 如果每个 p_j 足够大, 那么该问题就退化为经典的 UFLP. 在 FLPSP 中, 顾客的惩罚费用是一个集合函数, 任意顾客集合 $S \subseteq \mathcal{C}$ 的惩罚费用是关于 S 的单调增的次模函数 $h(S)$(参见 7.1 节, 9.1 节). 如果令 $h(S) := \sum\limits_{j \in S} p_j$, 次模惩罚即为线性惩罚, 因此 FLPSP 是 FLPLP 的推广. Charikar 等[14] 给出了 FLPLP 的基于原始对偶的 3- 近似算法. Xu 和 Xu[74] 利用贪婪增广的方法, 将原始对偶算法的近似比改进到 1.8526. Xu 和 Xu[73] 基于线性规划舍入的技巧得到了 FLPLP 的 $(2+2/\mathrm{e})$- 近似算法. Hayrapetyan 等[35] 给出了线性规划舍入 $(1+\rho)$- 近似算法, 其中线性规划的求解需要调用椭球算法, ρ 为 UFLP 的与线性规划松弛的最优值比较得到的近似比. 通过引入 FLPSP 的凸松弛, Chudak 和 Nagano[16] 给出了凸规划舍入的 $(1+\epsilon)(1+\rho)$- 近似算法, ρ 含义与文献 [35] 相同. Du 等 [35] 提出了 FLPSP 的原始对偶组合 3- 近似算法.

在网络设计中, 除问题本身外, 还可以考虑相应的博弈. 给定顾客的集合 $J \subseteq \mathcal{C}$, 将其视为一个联盟. $c^*(J)$ 表示顾客集合为 J 时最优网络的费用. 现在需要将 $c^*(J)$ 分摊到联盟 J 中的每个顾客, 使得每个顾客都满意. 具体的说, 就是计算所有顾客的费用分摊 $\alpha(j,J)$, 使其满足以下三个性质.

1. 单调性：如果 $J \subseteq J'$, 那么 $\alpha(j,J) \geqslant \alpha(j,J')$, 要求每个顾客的费用分摊随着联盟集合的扩大而变小.

2. 竞争性：$\sum_{j\in J}\alpha(j,J)\leqslant c^*(J)$, 要求所有顾客的费用分摊之和不超过总费用.

3. 费用补偿性：$\sum_{j\in J}\alpha(j,J)\geqslant c^*(J)$, 要求联盟中所有的顾客确实分摊了总费用.

不幸的是, 在许多有趣的博弈问题中, 以上三个性质不能同时成立, 也就是说, 在这些博弈中核 (core) 是空集. 但是, 我们可以研究近似核 (approximation core), 将第 3 个性质松弛为

3′. ρ 近似费用补偿性：$\sum_{j\in J}\alpha(j,J)\geqslant c^*(J)/\rho$, 要求所有联盟中的顾客至少分摊了总费用的 $1/\rho$.

这时, 称满足性质 1, 2, 3′ 的费用分摊为 ρ- 近似费用分摊. 容易看出, 对于一个设施选址问题, 光滑化的原始对偶算法对应着相应博弈的满足单调性和竞争性的费用分摊算法. 3.2 节给出了 UFLP 的光滑化的原始对偶 3- 近似算法[56], 6.3 节给出了 k-LFLP 的光滑化的原始对偶 6- 近似算法[72], 7.1 节给出了 CCFLP 的光滑化的原始对偶 3- 近似算法[45], 9.2 节给出了带服务安置费用的设施选址问题的光滑化的原始对偶 11- 近似算法[71].

在设施选址问题中, 顾客连接到一个开设的设施上可以视为顾客的需求得到满足, 那么就会相应的产生一定的利润; 设施的开设费用视为相应的成本, 最终开设一些设施使得净利润最大, 净利润是指顾客需求得到的利润减去开设设施的成本, 称这种设施选址问题为极大化的设施选址问题. 类似地, k 层设施选址问题也可以定义极大化形式的问题 (maximization version of the k-level facility location problem, 简记为 Max-k-LFLP). 在 Max-k-LFLP 中每个顾客连接到一条开设的路径上就会得到利润 c_{jp}, 每个顾客至多只能连接到一条开设路径上, 并且需要支付这条路径上所有设施的开设费用作为成本, 目标是开设一些路径, 将一些顾客连接到开设路径上使得净利润 (利润减成本) 最大. 当 $k=1$ 时, Cornuejols 等[19] 给出 $1-1/\mathrm{e}\approx 0.632$- 近似算法. Ageev 和 Sviridenko[3] 利用线性规划舍入技巧将近似比改进到 $2\sqrt{2}-2\approx 0.828$. Bumb[7] 考虑了两层的情形, 给出 0.47- 近似算法. 对任意常数 $k\geqslant 1$, Zhang 和 Ye[78] 给出目前最好的近似比 0.5.

Du 等[21] 首次考虑了硬容量限制的 k 层设施选址问题, 通过归约的方法, 给出 $(h(k)+\epsilon)$- 近似算法, 其中 $h(k):=k+2+\sqrt{k^2+2k+5}$. 通过计算可以得到 $h(1)\leqslant 5.83$, $h(2)\leqslant 7.61$, 且对任意的 k, 有 $2k+3<h(k)<2k+4$.

下面简单介绍国际上关于设施选址问题的最新研究成果.

如果要求顾客连接到若干个不同的设施上, 则得到容错设施选址问题 (fault-tolerant facility location problem), Byrka 等[12] 给出了随机相关线性规划舍入的 1.725- 近似算法. 在实际问题中, 选择开设的设施会出现故障, 因而需要再开设一