恩波考研辅导丛书

硕士研究生入学考试 历年试题解析

2005

ENBOEDUCATION 恩波教育

数学三

组编 恩 波
主编 陈 仲

94年~2004年11套全真试题，追寻历年考研轨迹，提供实战训练机会。

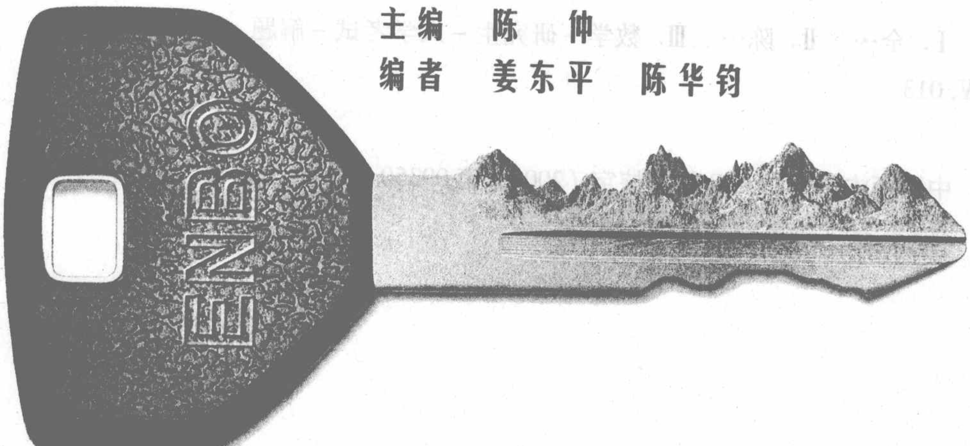
家在全面解析的同时，更重点突出“**考点提示+思路点拨+技巧评点**”。

- **考点提示** 一语中的，使您立刻体会考试内涵和隐含信息。
- **思路点拨** 言简意深，使您迅速找到解题方法和应试精髓。
- **技巧评点** 切中要害，使您深刻理解解题诀窍和应试策略。

学 苑 出 版 社

全国硕士研究生入学考试
历年试题解析

主编　陈　仲
编者　姜东平　陈华钧



数学三

2

ENBOEDUCATION
恩波教育

学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生入学考试数学历年试题解析（文科卷）/陈仲主编. —北京：学苑出版社. 2001. 3（2004 重版）

ISBN 7－5077－1793－3

Ⅰ. 全…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 数学－研究生－入学考试－解题　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 09350 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号　　100036

北京高岭印刷有限公司印刷　　新华书店经销

850×1168 毫米　1/16 开本　9.625 印张　270 千字

2004 年 2 月北京第 1 版　　2004 年 2 月北京第 1 次印刷

印数：0001—10000 册　定价：14.50 元

总前言

本套丛书是在“恩波考研辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下编写出版的。它以历年硕士生入学考试试题为基础，经过辅导专家的整理并作详尽解析而成，提供给广大考生备考复习使用，目的是帮助广大考生高效、有序地做好考前复习，从而取得理想的考试成绩。

本套丛书在编写过程中突出如下特点：

一、引导考生备考和复习　2004 年考研人数已达 94.5 万人之多，竞争之激烈可想而知。所以考研复习不能落入俗套，要有创新思想，既要寻找适合自己特点的路子，又要清醒地把握住自己复习的进程，做到临考不乱，胸有成竹。本套丛书有引导考生备考和复习的初衷，供广大考生参考。

二、总结考试特点和规律　公共课是考研成功道路上最大的障碍，大多数考生因公共课成绩未达到国家最低录取控制分数线，而使其考研成功的梦想破灭。经调查分析，其原因是考生在复习时没有抓住考试的特点和规律，结果误入歧途。本套丛书编写时将试题解析与大纲考点相结合，总结出考试特点和规律，而遵循考试特点和规律从事考前复习将使考生避免盲目性，达到有的放矢、事半功倍的效果。

三、预测命题思路和趋势 本套丛书的试题与解析按时间顺序排列，先试题后解析，目的是希望考生通过做真题，熟悉考试的内容和形式；通过试题解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和发展趋势，并对照答案解析检查不足与差距。

使用本套丛书时，请不要直接看答案和注解，最好先测试一下自己的水平，按规定的时间做完，然后对照答案，给自己记分，通过对照分析试题规律和自己的不足，以确定自己的复习重点。一位恩波考研辅导班的学员曾深有体会地说："认真做一套全真试题，并熟记全部考点和类型，其效率超过做两套模拟试题。"总之，考生在使用本套丛书时不要就题论题，而是要通过对历年考题的比较、对书中详尽解析和复习方法指导的把握，发现一些规律性的东西，使这些资料为我所用，从而提高自身水平，并轻松应对考试。

参加本套丛书编写工作的有陈仲、姜东平、陈华均、王锁明、周固、李新荣、董榕等老师。

编写组

http://www.enbobook.org

LiNian ShiTi JieXi

目 录

2005 年考研数学点拨 …… 1

1994 年数学三试题与解析 …… 5

11994 年数学三试题 …… 5

1994 年数学三试题解析 …… 8

1995 年数学三试题与解析 …… 17

1995 年数学三试题 …… 17

1995 年数学三试题解析 …… 20

1996 年数学三试题与解析 …… 29

1996 年数学三试题 …… 29

1996 年数学三试题解析 …… 32

1997 年数学三试题与解析 …… 42

1997 年数学三试题 …… 42

1997 年数学三试题解析 …… 45

1998 年数学三试题与解析 …… 55

1998 年数学三试题 …… 55

1998 年数学三试题解析 …… 58

1999 年数学三试题与解析 …… 68

1999 年数学三试题 …… 68

1999 年数学三试题解析 …… 71

2000 年数学三试题与解析 …… 82

2000 年数学三试题 …… 82

2000 年数学三试题解析 …… 85

2001 年数学三试题与解析 …… 96

2001 年数学三试题 …… 96
2001 年数学三试题解析 …… 99

2002 年数学三试题与解析 …… 110
2002 年数学三试题 …… 110
2002 年数学三试题解析 …… 113

2003 年数学三试题与解析 …… 125
2003 年数学三试题 …… 125
2003 年数学三试题解析 …… 129

2004 年数学三试题与解析 …… 139
2004 年数学三试题 …… 139
2004 年数学三试题解析 …… 142

2005 年考研数学点拨

近年来，我国每年报考硕士研究生的人数逐年增加，2003 年达 79.7 万人，2004 年达 94.5 万人。出现这种“考研热”的原因是多方面的，首先是国家改革开放和现代化建设事业的需要，国家机关、企事业单位、各行各业对高素质、高学历人才的需求量越来越大，硕士生招生人数也逐年增加，2003 年为 27 万人，2004 年达 33 万人，随着“科教兴国”、“知识经济”等战略性措施日益广泛实施，我们估计这种高层次人才的需求还将不断增加，“考研热”随之还会不断升温；其次，人才流动与大学生毕业就业已进入市场，不再“毕业分配”，双向选择是大学毕业生就业的主要渠道。从近几年的情况看，由于高等教育的大众化，1998 年高校招生人数为 108 万人，2003 年达到 400 万人，相当多的大学本科毕业生要找到理想的工作是比较困难的，这也从客观上促使大学毕业生选择考研继续深造，希望学到更专门的知识，希望取得更高的学历，以增强自己的竞争能力。还有相当多的往届大学毕业生由于这样那样的原因企图通过读研来实现调换工作岗位，调换工作单位，更好地发挥自己的专长。这些年，应届与往届的考生已基本各占一半。

硕士生入学数学统一考试是国家选拔高层次人才的水平考试，它与在校大学生的期中与期末考试相比，深度与难度大大增加，命题者将考试成绩的期望值设定在 75～80 分（总分 150 分）之间进行命题，试题面广量大，基础性强，难题较多，因此竞争力强，淘汰率高。

考研大纲

自 1989 年考研招生实行全国统考以来，数学考试的命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求进行的。该大纲对考试性质，基本要求，考试方法，试卷分类和适用专业详细阐明；对各卷考试内容，考试要求和试卷结构皆一一详述，它不但是国家命题中心命题的指导性文件，也是广大考生复习迎考的惟一重要依据。根据原国家教委的要求，考试中心于 1996 年组织 20 多位专家对原 1991 年颁布的“数学考试大纲”进行了重大修订，并于 1997 年起在全国实施至今。2002 年对“大纲”进行了修订，从 2003 年起数学二增加了“几何型概率”，删除了“两曲线的交角”和“包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组”；数学二增加了“实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角矩阵”；数学四增加了“常微分方程”；对考试内容和考试要求的表述进一步明确；并将数学试卷的满分调整为 150 分。2003 年对“大纲”又作了修订，从 2004 起数学一增加了“多元函数微积分学”，对数学一、二、三、四的考试内容和考试要求进一步明确、规范和统一，并将选择题和填空题的考分比例由原来的 48 分增加到 56 分，总分 150 分不变。“数学考试大纲”是必备材料，广大考生在复习时要好好研究“大纲”，经常对照“大纲”，明确考试范围和考试要求，了解分数分布，按“大纲”所指明的“了解”，“理解”，“掌握”等不同考试要求有重点地复习。

考研复习

数学的概念、理论和方法一环套一环逐步深入，没有前一步就没有后一步。因此考生第一遍要系统复习，将自己在大学一年级时学习的课本认真复习（注意：“大纲”不作考试要求的内容要跳过去），将自己过去的作业本认真看一遍，学过的东西抓起来往往容易一些。在第一遍复习的基础上要进入提高阶段。选择一本好的考研参考书，将有助于提高阶段的复习质量。因为大学课本偏重基础，难题少，综合题少，应用题少，例题与习题的深度也不够。现在市面上考研参考书琳琅满目，版本多得让你无所适从，有的内容太杂，非常容易的基本题很多，非常难的不适合作考研题的题目也很多。一本差的参考书可能会误人子弟；一本好的考研参考书可以使你的复习更接近于考试的要求，强化你的知识，提高你的复习质量。此外，选择一个好的辅导班，在名师指导下，除系统复习外，更好地掌握数学方法，提高应试水平，这也是一个明智的选择。辅导班的作用主要有：1）串讲知识，建立知识框架；2）讲述考点重点，缩小复习范围；3）化解难点，预测考题。不少已金榜题名的研究生有这样的体会，选择一个好的考研辅导班，可大大提高考试的得分。一个好的考研辅导班的标准是：有一组授课质量一流、考研辅导经验丰富的好老师；有一支懂教学、善于管理的员工队伍；有一个完整的教学计

划。另外收费多少、课时安排、教室环境等也是选择参数。在辅导层次上有些辅导班又分为基础班、提高班、强化班与冲刺班。一些基础不好的考生可选基础班和提高班(或强化班)两期,基础较好的考生可选择提高班(或强化班)和冲刺班两期,不要四期全部参加。辅导班只能助你一臂之力,不可能代替你的复习。听了辅导班之后还得消化、巩固,认真地、耐心地做一定量的习题。犹如学习游泳,老是听教练讲如何如何游,怎么也学不会,一定要自己下水去多练习才行。听课方法也大有学问,要多听,听懂,理解,能达到举一反三,触类旁通。

数学的概念和方法一般说来不是一、二遍就能学好的。必须多次反复、多次学习才能掌握。学会了还有个熟练的问题。如果在考试中,基本题不但会做,而且能较熟练地,比别人花较少的时间做对,你就有较多的时间去做难题,难的那怕做对一半也能使你的考分比别人高。

考研试题

要收集与研究近几年的研究生入学考试试题,了解题型、题量,知道哪一类题是常考的,哪一类题是必考的,哪一类题是基本不考的。分析历届研究生入学试题,可以看出全国研究生入学统一考试的基本模式是稳定的,虽然每年都有若干新颖的新编的题目,但大量的题目还是老脸式,甚至有相当一部分是雷同题。例如:

1) 2003 年数学一题四与 2001 年数学一题五;

2) 2001 年数学一题一(2) 与 1993 年数学一题一(4);

3) 2001 年数学一题六与 1997 年数学一题三(2);

4) 2001 年数学二题八与 1995 年数学一题五;

5) 2001 数学三、四题三与 1997 年数学三题四;

6) 2001 年数学三、四题七与 1996 年数学三题六;

7) 2000 年数学一题二(2) 与 1988 年数学一题二(3);

8) 2000 年数学三、四题九与 1991 年数学一题七;

9) 2000 年数学一题七与 1995 年数学一题一(4);

10) 2000 年数学二题二(2) 与 1997 年数学二题二(3);

11) 2000 年数学三、四题五与 1991 年数学三题七;

12) 2000 年数学四题十与 1999 年数学四题九;

13) 1999 年数学一题三与 1995 年数学一题三(1);

14) 1999 年数学三题九与 1997 年数学一题七(2);

15) 1999 年数学四题九与 1994 年数学三题十;

16) 1999 年数学二题十二与 1991 年数学一题七。等等。

关于命题的特点与走向,下列四点广大考生要引起重视:

第一,研究生入学统一考试一直是以考查"三基"(即基本概念、基本理论和基本方法)为主线的。在往年的试题中,有 5 条填空题(每题 3 分),5 条选择题(每题 3 分)。从 2004 年起有 6 条填空题(每题 4 分),8 条选择题(每题 4 分)。这 56 分的题量基本上都是"三基"内容的考查,覆盖面广,基础性强,而且要求有一定的熟练程度。

例如 2003 年数学一题二(1) 与数学二题二(4) 是一道选择题,要求根据题中所画的导函数的图形判断函数有几个极大值与几个极小值。

例如 2001 年数学一题二(3) 是一道选择题:

设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

该题只有 3 分,但基础性强,要求对导数(包括左、右导数)的定义掌握得很熟练,对极限(包括左、右极限)的概念掌握得很好。

又如 1999 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同选择题:

设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数．

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数．

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数．

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数．

该题只有 3 分，但要将本题的内容全部搞清楚，需要许多基本知识，如什么叫原函数，原函数与不定积分的关系，两个不同原函数的关系，变上限的定积分，原函数存在定理，定积分的换元积分公式等。若用排除法也可通过举反例将(B)、(C)、(D) 排除，得出(A) 成立。

又如 2002 年数学一题二(3) 与数学二题二(4) 是一道相同的选择题。

设函数 $y = f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0+} f'(x) = 0$.

该题用举反例易于否定(C)、(D)，但举反例否定(A) 不太容易。要正面证明(B) 成立有一定难度。虽然该题只有 3 分，但要真正搞清全部内容，基础性要求是很高的。

第二，每年都有考查灵活运用重要定理、重要公式的试题。除了要理解这些重要定理的条件、结论外，还要针对具体情况灵活运用，例如 2000 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同的证明题：

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$，试证：在$(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2，使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$。

该题的评分结果是数学一考生的得分不好，数学二、三、四考生的得分很差，特别是文科考生全对的几乎没有。

该题需用到高等数学的零点定理、定积分中值定理、罗尔定理等。考生一般有两种解法：一是先用定积分中值定理，推得 $f(x)$ 的一个零点，再用反证法求得第二个零点；二是构造辅助函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

设法对 $F(x)$ 两次应用罗尔定理推得 $f(x)$ 在$(0,\pi)$ 内至少有两个零点。绝大部分考生用的是上述第一种方法，上述第二种方法证明很简捷，但使用此方法的考生极少。

又例如 1998 年数学一题九、数学二题八、数学三题六、数学四题七分别是应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题，在证明中都要根据题意构造辅助函数，这一点对许多考生而言是个难点，要通过做一定数量的习题(包括一定比例的难题) 才能做到。

第三，每年都有一定量的应用题。在考查"三基" 的基础上，对考生运用所学知识解决实际问题的能力进行考查，在近几年的考研试题中有加强的趋势。应用题包括几何与物理上的应用(如变力作功，旋转体体积，弧长，立体的重心等)，还有与社会生活有关的其它专门设计的应用题，其中积分学和微分方程的应用是重点。对文科考生而言，应用导数或偏导数解经济问题中的极值应用题是重点。

例如 2003 年数学一题六是定积分与极限的综合应用题，求汽锤打桩的深度；2003 年数学二题九是定积分与微分方程的综合应用题，由容器注入液体时液面扩大的速率求容器侧壁的曲线方程；例如 2001 年数学一题八与数学二题九是微积分的应用，求雪堆全部融化所需的时间；2001 年数学三题六，求面积的最大值；2001 年数学四题六是导数在经济上的应用，求利润的最大值。又如 2000 年数学一题八是三重积分的应用题，求球体的重心坐标；2000 年数学二题七是微分方程应用题，求经过多少年湖泊中污染物的治理达标；2000 年数学三题五和数学四题五是多元函数极值(拉格朗日乘数法) 在经济上的应用，求产品销售价格使利润取最大值。又如 1999 年数学一题七和数学二题六都是定积分应用题，求抓斗提升污泥作多少功；1999 年数学三题五和数学四题五都是多元函数极值(拉格朗日乘数法) 在经济上的应用，求生产某产品的投入总费用最小。再如 1998 年数学一题五和数学二题七都是微积分方程的应用题，求测量仪器的下沉深度与速度的关系；1998 年数学三题五和数学四题六都是极值应用题，求新酒窖藏多少年后出售总收入的现值最大。

第四，每年都有一定量的综合题。在大学的教材中和大学的期中、期末考试中，由于教学时段的局限性，很少有综合题。近几年研究生入学试题中综合题也有加强的趋势。它要求考生将微积分、线性代数和概率统

计这三部分的知识综合起来解题。这类题往往有一定难度，失分率大，要求考生所学知识融汇贯通，灵活运用。

例如 2001 年数学一题八：

设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$$

（设长度单位为 cm，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130(cm) 的雪堆全部融化需多少小时？

这是导数、积分、重积分的综合题。

又如 2000 年数学二题十一：

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 1$，且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x \geqslant 0$ 时成立不等式：$\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$。

这是导数、积分、微分方程和导数的应用的综合题。

又如 1999 年数学三题一(5)：

设随机变量 X_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n; n \geqslant 2)$ 独立同分布，$\mathrm{E}(X_{ij}) = 2$，求行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $\mathrm{E}(Y)$。这是线性代数与概率统计的综合题。

再例如 1998 年数学一题一(4)：

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的，讨论两直线

$$\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2} \quad 与 \quad \frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$$

的关系。该题是空间解析几何和线性代数的综合题，用到矩阵的秩，三向量共面的充要条件，直线的方程与两直线的关系，该题构题新颖，有一定难度。

考研技巧

考试时要遵循先易后难，遇难不慌，知一写一的原则。

硕士生入学考试是国家选拔高层次人才的水平考试，命题者将考试成绩的期望值设定在 75 ~ 80 分之间（总分 150 分），因此考试题中一定有难题，考试时应试者一定会有不顺手的地方，这时应试者的心态是很重要的，如果遇难题就发慌，再遇难题就不知所措，严重影响甚至放弃后面的考试，那是一定考不好的。有这样的一个真实的例子，1998 年硕士生入学考试中有一位考生数学考了 38 分，其它 4 门都过线，总分超过分数线 15 分，结果落榜。该考生非常懊恼地回忆道：数学考试时很不顺手，几个题不会做，认为一定完了，就没有信心做余下的题，没想到最后数学单科的分数线是 40 分（注：数学单科的分数线 2002 年前一般在 50 ~ 55 之间，2003 年后一般在 75 ~ 80 分之间。）如果当时心态好一点，认真做余下的题，多拿 5 ~ 10 分一定没问题。广大考生应从这个例子中吸取教训，应试时会做的题，能拿分题先解；难题或自己没有见过的题型要逐个攻克，能写几步写几步（评分是按步给分）；没有把握的题，分析题意，估计用什么公式，写出有关的思路和公式有时也能得 1 ~ 2 分；有些题或一些解题步骤很难，得分又少，放到最后思考或者大胆地放弃；最后还一定要腾出时间复查一遍，纠正笔误或不足之处。如果能将有限的时间都花在能得分的解题上，达到高水平发挥，就一定能获得好成绩，实现自己的理想。

1994 年数学三试题与解析

1994 年数学三试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) $\int_{-2}^{2} \frac{x+|x|}{2+x^2}dx =$ ____2ln3____;

(2) 已知 $f'(x_0) = -1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)} =$ ____1____;

(3) 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数,则 $\frac{dy}{dx} =$ ________; $-\frac{ye^{xy}+\sin x}{2y+xe^{xy}}$

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,其中 $a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$,则 $A^{-1} =$ ________; $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

$(A|E)=(E|A^{-1})$

(5) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X \leqslant \frac{1}{2}\}$ 出现的次数,则 $P\{Y=2\} =$ ____9/64____. $Y\sim B(3,\frac{1}{4})$

$P\{X\leqslant\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=x^2\big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内)

+1, +2, 0

(1) 曲线 $y = e^{1/x^2}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 ( )

(A) 1 条. (B) 2 条. (C) 3 条. (D) 4 条.

(2) 设常数 $\lambda > 0$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ ( )

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 λ 有关.

(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,C 是 n 阶可逆矩阵,矩阵 A 的秩为 r,矩阵 $B = AC$ 的秩为 r_1,则 ( )

(A) $r > r_1$. (B) $r < r_1$. $r(B)=r(A)$

(C) $r = r_1$. (D) r 与 r_1 的关系依 C 而定.

(4) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$,则 ( )

$P(A|B)=P(A|\overline{B})$ $P(\overline{A}|\overline{B})+P(A|\overline{B})=1$ $P(A\overline{B})=P(A-AB)$

A, B $=P(A)-P(AB)$

(A) 事件 A 和 B 互不相容. (B) 事件 A 和 B 互相对立.

(C) 事件 A 和 B 互不独立. (D) 事件 A 和 B 相互独立.

(5) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,\ s_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$s_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,\ s_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 ( )

(A) $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s_1/\sqrt{n-1}}$. (B) $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s_2/\sqrt{n-1}}$.

(C) $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s_3/\sqrt{n}}$. (D) $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s_4/\sqrt{n}}$.

三、(本题满分 6 分)

计算二重积分

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant x + y + 1\}$.

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}$

四、(本题满分 5 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -4. \end{cases}$$

求广义积分

$$\int_0^{\infty} y(x)\,\mathrm{d}x.$$

五、(本题满分 5 分)

已知 $f(x,y) = x^2 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0) = 0$，$F(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\,\mathrm{d}t$，求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y = a\sqrt{x}\,(a > 0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线，求

(1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0)；

$a=e^{-1}\quad x_0=e^2,\ y_0=1$

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.

八、(本题满分 6 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 (a, ∞) 内存在且大于零，记

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x > a),$$

证明：$F(x)$ 在 (a, ∞) 内单调增加.

$F'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a) - [f(x)-f(a)]}{(x-a)^2} = \varphi(x)$

$\varphi'(x) = f''(x)(x-a) + f'(x) - f'(x) > 0$

$\varphi(a) = 0$

九、(本题满分 11 分)

设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

若不相等.

$|\bar{A}| = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdot(a_4-a_2)(a_3-a_2)(a_4-a_3) \neq 0$

$r(\bar{A}) = 4$

而 $r(A) \leq n = 3$

(1) 证明:若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k(k \neq 0)$. 且已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$r(A) = 2 = r(\bar{A})$

$n - r(A) = 3 - 2 = 1$

写出此方程组的通解.

$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ 1 & -k & k^2 & -k^3 \end{pmatrix}$

$\xi = \beta_1 - \beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ $\quad X = C\xi + \beta_1$

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x 和 y 应满足的条件.

$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1.$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(E - A) = 1$

$y + x = 0$

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同分布,

$$P\{X_i = 0\} = 0.6, \quad P\{X_i = 1\} = 0.4 \quad (i = 1,2,3,4).$$

求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

$P\{X_1X_4 = 1\} = P\{X_2X_3 = 1\} = 0.16$

$=0 \quad =0 = 0.84$

$= X_1X_4 - X_2X_3$

$-1 \quad 0 \quad 1$

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动线加工的某种零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu, 1)$,内径小于10或大于12的为不合格品,其余为合格品,销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损,已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & 若\ X < 10; \\ 20, & 若\ 10 \leq X \leq 12; \\ -5, & 若\ X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

解: $E(T) = -P\{X < 10\} + 20P\{10 \leq X \leq 12\} - 5P\{X > 12\}$

$= -\Phi(10-\mu) + 20\Phi(12-\mu) - 20\Phi(10-\mu) - 5 + 5\Phi(12-\mu)$

$= 25\Phi(12-\mu) - 21\Phi(10-\mu) - 5$

$E(T)'_\mu = -25\varphi(12-\mu) + 21\varphi(10-\mu)$

令其$=0$ 即 $\frac{-25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + \frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = 0$

1994 年数学三试题解析

一、填空题

(1) $\underline{\ln 3}$.

【考点提示】定积分的计算.

【思路点拨】注意利用奇、偶函数在对称区间上的积分的性质.

【解】
$$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=0+2\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{1}{2+x^2}\mathrm{d}(2+x^2)=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln 3.$$

(2) $\underline{1}$.

【考点提示】函数的极限.

【思路点拨】应用导数的定义.

【解】 先将分式颠倒:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$$

为应用 $f'(x_0)$ 的定义,引进辅助项.

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$
$$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=-f'(x_0),$$

故 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}=\dfrac{-1}{f'(x_0)}=1.$

(3) $\underline{-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}}$.

【考点提示】隐函数的导数.

【思路点拨】利用一元隐函数的求导法.

【解】 视 $y=y(x)$,在所给方程两端对 x 求导,得 $e^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x$,解得
$$y'=-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}.$$

【技巧评点】 也可利用公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

【考点提示】逆矩阵.

【思路点拨】可以利用初等行变换(解法Ⅰ),也可利用分块矩阵的求逆公式(解法Ⅱ).

解法Ⅰ

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a^n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \dfrac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{a^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right),$$

所以

$$
A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.
$$

解法 Ⅱ

由分块矩阵的求逆公式$\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$,得

$$
A^{-1}=\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \hline \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right).
$$

(5) $\underline{\dfrac{9}{64}}$.

【考点提示】计算$\{Y=2\}$的概率.

【思路点拨】利用二项分布的概率计算公式.

【解】 因 $p=P\{X\leqslant \frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$,则 $Y\sim B(3,\frac{1}{4})$,于是

$$
P\{Y=2\}=C_3^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})=\frac{9}{64}.
$$

二、选择题

(1) 选(B).

【考点提示】曲线的渐近线.

【思路点拨】分别求铅直渐近线及非铅直渐近线.

【解】 因$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}=\infty$,故有铅直渐近线 $x=0$. 又因

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}=0,
$$

$$
\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{\pi}{4},
$$