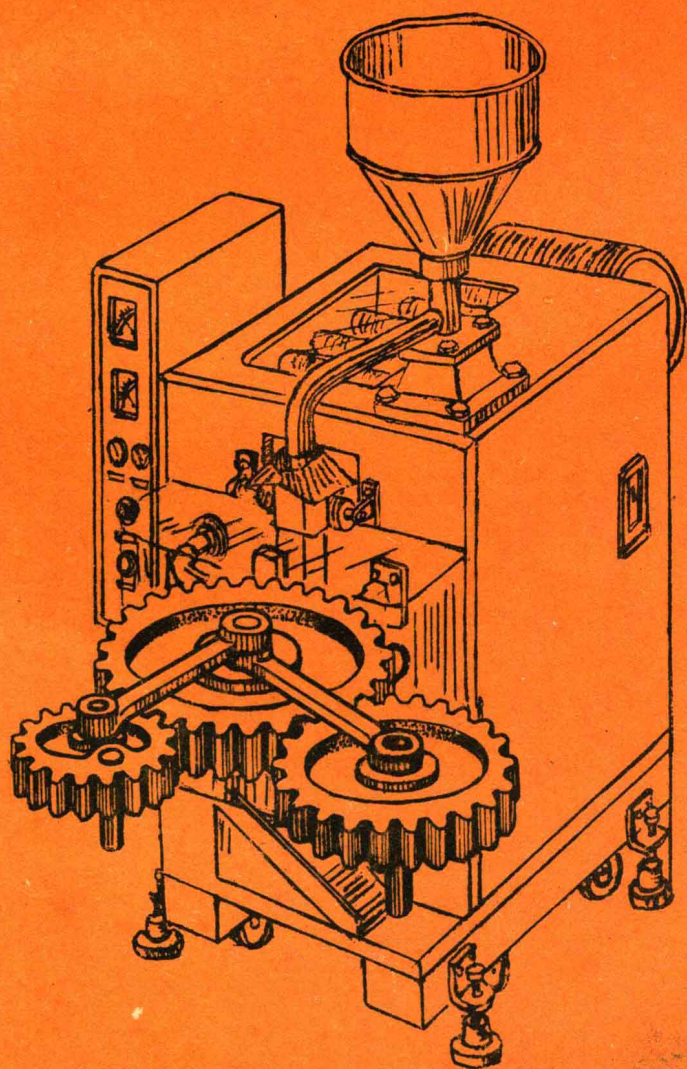


基本知识

1

自动机械设计

《自动机械设计》编写组编



ZIDONGJIXIESHEJI

上海市业余工业大学

根据上海地区工业发展的需要,上海市业余工业大学于1982年联合上海市有关高校组成《自动机械设计》编写组,集体编写了本书,仅供内部交流使用。

本书内容共分三篇:第一篇为“基本知识”、第二篇为“机构设计”、第三篇为“机械设计”。其中第一篇除介绍某些典型自动机械外,主要是根据后两篇教学内容的要求,在机械类专业的技术基础课的基础上所补充的一些理论知识,包括机械振动基础、凸轮从动件运动规律、平面机构运动分析和平面连杆机构设计原理等;第二篇主要讨论自动机械中的常用机构设计,包括传动机构、送料机构、间歇运动机构、凸轮机构、组合机构和离合器等;第三篇包括自动机械总体设计、包装机械执行机构、电子工业专用执行机构、支承件、导轨、机械手、机械调整检测和保险用执行机构及自动线概论等。

本书主要针对轻工业、手工业、电子和医药工业等行业所使用的非标准设备进行讨论,其中对于各行业都在使用的包装机械取材较多,并尽可能讨论一些共性问题。考虑到教学和设计人员的实际需要、扩大适应面,因而篇幅较多,实际使用时可根据情况适当地加以取舍。

参加本书编写的人员有楼任东、周大川、黄惟卓、胡慧仁、张光裕、于携初、应瑞森、陶祖源、宣美益等同志,由楼任东任主编,编写组成员互校互审。在编写过程中,潘震苍同志曾对本书提出过宝贵意见,邱鹏飞同志对第一篇中部份内容作了校审,并得到上海大学工商管理学院、上海大学工学院、上海轻工业专科学校和上海市仪表局职工大学等有关院校领导的热情支持和帮助,在此一并表示深切的谢意。

由于我们水平有限,时间局促,书中定有不少不妥和错误之处,竭诚希望批评和指正,以便今后改进。

一九八四年三月

《自动机械设计》第一篇《基本知识》

目 录

引述	(1)
扭结式方块糖包装机	(1)
工艺流程	(1)
组成及主要机构	(2)
第一章 机械振动基础	(8)
第一节 简谐振动概述	(8)
第二节 单自由度系统的自由振动	(8)
一 无阻尼的自由振动	(8)
二 有阻尼的自由振动	(8)
第三节 有阻尼的强迫振动	(11)
一 简谐激振力	(11)
二 旋转的不平衡质量所造成的激振力	(13)
三 力的传递及隔振	(13)
四 支承运动引起的响应	(15)
五 等效粘性阻尼	(16)
六 具有库伦阻尼的简谐激振	(17)
七 任意周期激振的响应	(18)
第四节 瞬态激振	(19)
一 突加载荷的激振	(19)
二 载荷按线性增加的激振	(19)
三 按指数规律衰减的激振	(20)
四 任意瞬时激振	(20)
第五节 二自由度系统	(22)
一 自由振动和频率方程	(22)
二 扭转振动	(24)
三 强迫振动	(25)
四 动力吸振器	(26)
第六节 振动机械的工作原理	(27)
一 机械式振动机械	(27)
二 电磁式振动机械	(28)
第七节 多自由度系统自由振动简介	(28)
一 柔度影响系数	(28)
二 特征方程、特征值及特征向量	(29)
第二章 凸轮从动件的运动规律	(32)
第一节 凸轮机构的运动规律	(32)
第二节 运动规律的无因次化表示	(32)
第三节 从动件停留条件及凸轮轴上的扭矩计算	(33)
一 从动件停留条件	(33)
二 凸轮轴上扭矩计算	(33)
第四节 几种基本的运动规律的方程	(34)
一 等速运动规律(直线型运动规律)	(35)
二 等加速等减速运动规律(抛物线运动规律)	(35)

三	余弦运动规律 (简谐运动规律)	(35)
四	正弦运动规律 (摆线运动规律)	(36)
第五节	改进型运动规律的运动方程	(36)
一	变形梯形曲线	(36)
二	变形正弦曲线	(37)
三	变形等速运动曲线	(38)
四	非对称变形曲线	(39)
第三章	平面机构的运动分析	(42)
第一节	机构运动分析的目的和方法	(42)
第二节	应用三心定理进行运动分析	(42)
一	正弦机构	(42)
二	偏置式曲柄滑块机构	(43)
三	摆动导杆机构	(45)
四	转动导杆机构	(46)
第三节	应用极坐标复数矢量对平面连杆机构进行运动分析	(47)
一	极坐标复数矢量符号	(47)
二	铰链四杆机构的运动分析	(48)
三	多杆机构运动分析的举例	(49)
第四节	四杆机构运动特性的组合应用举例	(52)
一	在工作行程内作近似等速运动	(52)
二	作近似等速直线运动	(53)
第四章	平面连杆机构设计	(55)
第一节	引言	(55)
第二节	按连杆平面的给定位置设计平面四杆机构	(56)
一	等视角定理	(56)
二	应用	(57)
第三节	按两运动杆的相应角移量设计平面四杆机构	(59)
一	相对极 相对位移	(59)
二	相对极等视角定理及其应用	(60)
三	应用刚化倒置法设计机构尺寸	(62)
第四节	按极限位置设计曲柄摇杆机构	(64)
一	引言	(64)
二	按曲柄工作行程转角 ϕ_w 、摇杆极限摆角 ϕ 设计曲柄摇杆机构	(64)
三	规定摇杆极限位置前后两对相应角移量设计曲柄摇杆机构	(68)
第五节	实现给定轨迹的连杆机构设计	(71)
一	引言	(71)
二	中点曲线、圆点曲线概念及其应用简介	(72)
三	点位归并法	(74)
四	欧拉——沙瓦里公式及其在近似直线导向机构设计中的应用	(75)
五	卡当机构	(78)
第六节	实现给定运动规律的连杆机构设计	(80)
一	威贝谢夫布点公式	(80)
二	四杆机构的位置方程式	(81)
三	函数发生器的设计例题	(82)

第七节	用矩阵方法设计平面连杆机构.....	(83)
一、	刚体的平面位移矩阵.....	(83)
二、	已知连杆平面位置设计四杆铰链机构.....	(83)
三、	已知连杆平面位置设计滑块机构.....	(84)
四、	已知二连架杆的相应角移量设计四杆机构.....	(85)
五、	设计例题.....	(86)

第一篇 《基本知识》

引 述

在轻工、手工、仪表电子、医药等行业中，为了达到一定的加工要求，广泛采用着各类自动机械。如果将其中的设备按传动特点进行分类，常见的有凸轮连杆式自动机、电—液控制式自动机、气—电液式自动机等。从结构和布局来看则有立式和卧式、直线式和回转式的区别；从传动方式来看，有连续式和间歇式等。

不论是那类自动机械，均由以下一些基本部分组成：

将加工对象等送到工作位置的送料机构；把电动机的转动传送到各工作执行机构的中间传动件；具有分配运动职能的间歇运动机构；能改变运动形式和要求的凸轮机构、连杆机构；能直接完成工艺动作的执行机构；此外还有把有关部件连接在一起的机架、箱体、支承件以及使有关部件得以实现相对运动的导轨。

限于篇幅，下面仅对一凸轮连杆式自动机——扭结式方块糖热包装机作一简单介绍。

扭结式方块糖热包装机

对于方块糖通常都需经包装后才能出厂，就其制造过程连续性来说，可分为热包机和冷包机两类，热包机是先将软糖成型，即将配制好的糖坯由拉条机拉成条状后再切断进行扭结等包装。冷包机是将已切断的糖块经冷却后由料仓顺序输送进行扭结等包装。一般来说冷包产品外观、包装质量比热包为好，但生产过程复杂，生产率不及热包机高。

本节以方块乳脂软糖间歇式热包装机为例，该机采用卷筒包装纸、两端扭结，其生产能力为400粒/分，包括轧制糖条成型、切块、送纸、推糖包折和两端扭结等五道主要工序。

一、工艺流程

拉条机先把糖坯拉成圆形糖条，其后又被两对相互垂直安装的、间歇转动的轧辊2、3滚轧成长方形糖条，沿水平方向输送到进糖工位处，如图0-1-1中所示。连续快速转动的刀片4将其切成糖块6，卷筒纸7（该机可以进行外商标纸、内衬纸和糯米纸等三层包装纸的包装）沿垂直方向下送，并由连续回转的切纸刀8切断呈单张纸，推糖杆5将单张纸连同糖块一起送进工序盘上的一对糖钳10内，单张纸被折成“□”形；接着由下折纸板9抄纸呈“□”形；在工序盘转过过程中，再由固定折纸板完成四面裹包形成“□”形；当糖钳停在扭结工位时，由一对扭结手12完成糖纸两端的扭结；最后，糖钳转至打糖工位，由打糖杆11把

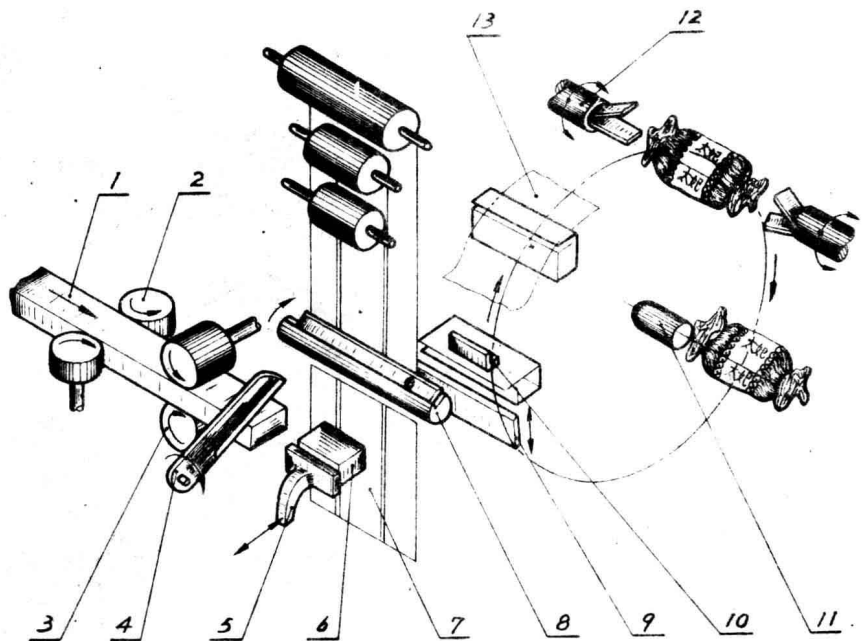


图0-1-1 乳脂软糖包装工艺流程图

- 1—糖条 2—水平轧辊 3—垂直轧辊 4—刀片 5—推糖杆
6—糖块 7—包装纸 8—切纸刀 9—抄纸板 10—糖钳
11—转轴 12—扭结机械手 13—固定杆纸板

包装好的糖果打出塑封。

双扭结包装机的工艺流程都基本相同。由于该机采用了成型、包装联合加工，就不象冷包机靠摩擦力输送而易出故障，并用卷筒纸切成单张纸包裹的方法，生产能力就大为提高。

一、组成及主要机构

为了实现以上工艺流程，乳脂软糖包装机有下列主要机构：

1) 传动机构：由电动机传动分配轴，从而通过安装在该轴上的齿轮、凸轮、链轮等分别再去推动各有关执行机构。

2) 糖条输送及成型机构：完成圆形糖条的输送并将其压成长方形糖条。

3) 供纸机构：将卷筒纸间歇式的定长输送，防止拉力过大和惯性松纸现象，并切成单张待包。

4) 工序盘机构：完成抄纸、折纸、扭结和推出等操作程序的多工位回转工序。

5) 切断上料机构：将长方形糖条切断成块状，并将糖块和包装纸一起推入工序盘上的钳手内。

6) 扭结机构：同时完成糖纸两端单向扭结。

现分别介绍如下：

（一）传动机构

图 0·1-2 所示为该机的传动机构立体示意图。电磁调速异步电动机 4 (JZT 型)，经三角皮带带动分配轴 2 转动，分配轴上安装着齿轮、锥齿轮、链轮、偏心轮、凸轮和手轮等，用来操纵和控制包装机各执行机构。其中齿轮 1 经齿轮 2 9 传动转轴 2 1，在转轴上固装着曲柄销盘 2 5 和齿轮 3，分别使槽轮 2 4 经转轴 2 3 带动工序盘作间歇回转和使转轴 2 2 带动切糖刀、切纸刀回转，同时经齿轮 2 8、2 7 和转轴 2 6 带动扭结手动作；在分配轴上的齿轮 1 2 则经齿轮 1 7、1 8、1 9 和转轴 2 0 带动另一扭结手动作；锥齿轮 1 6 经锥齿轮 1 5 带动糖条输送和成型机构；链轮 1 3、1 4 分别带动拼纸辊和送纸辊回转；偏心轮 6 和凸轮 7、8 和 9 分别控制推糖杆、托糖杆和压纸杆的运动；偏心轮 5 控制折纸板的升降运动；偏心轮 1 0 控制开闭钳口的凸轮的运动；偏心轮 1 1 控制打糖杆运动；手轮 3 0 用来慢车盘车，以便调整各运动关系。

该传动机构把各执行机构的主动件尽量安装在一根分配轴上，这样，根据凸轮工作循环图可方便地进行整机调整。

根据工艺要求，只需进糖、扭结和出糖三个工位，而该机采用了八槽槽轮机构，即实际使用仅三个工位。我们知道，槽轮机构的槽数越多，则最大角速度和角加速度越小，惯性小，运转亦越平稳，有利于提高转速，但分度转位时间增长，静止时间减少，导致生产能力降低，在同类包装机中，一般多用六槽槽轮机构。经综合考虑该机采用八槽槽轮机构。

（二）糖条输送及成型机构

糖条输送及成型机构传动立体示意图见图 0·1-3 中所示。分配轴 1 上动力经锥齿轮 2、3 (即图 0·1-2 中的件 15、16)、转轴 4 带动偏心盘 5。在偏心盘 5 的长槽内用螺母 6 固紧着齿轮 8，由于齿轮 8 的轴偏心安装，则齿轮 8 只作公转而不自转。经过齿轮 9、连杆 1 0 和摇杆 1 1 使齿轮 1 3 获得间歇转动，再由齿

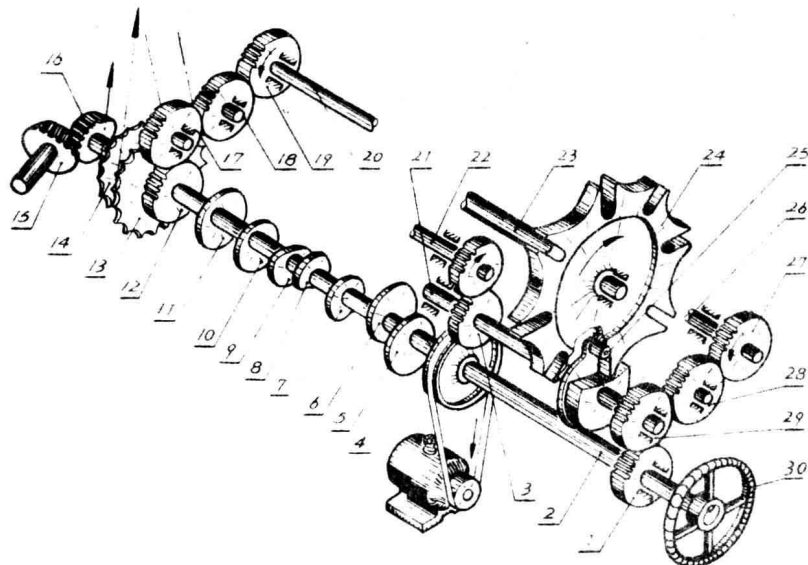


图 0·1-2 乳脂糖自动包装机传动机构立体示意图

轮12、14、29、15、16、28和18使第一道水平轴成型辊23和25获得间歇转动；再通过链轮26和34、齿轮38和42、螺旋齿轮35、32和33、31使第二道垂直轴成型辊43和30获得间歇转动，齿轮38又通过齿轮41、40和39使第三道水平成型辊37和36获得间歇转动。因此，整个糖条输送及成型机构都是间歇进行的。这样，当糖条停止时，切糖刀切断，接着推糖杆推送糖块进入工序盘的精钳内。根据工艺需要，只要调整偏心盘5上的偏心距离，就能改变停歇的时间。

为了清理方便，第一道成型辊的上轧辊23装在支架19上，只需将手柄21绕销轴20向左推开，抬起手柄22，即可使支架19连同上轧辊23和齿轮18绕销轴17向上翻起。

上图中偏心盘5、齿轮8、9、13、连杆10和摇杆11组成的间歇运动机构称为齿轮—连杆组合机构。图0.1-4为其机构运动简图。图中件号与上图相同。由图可见：偏心盘5旋转时，由于偏心距形成曲柄AB，齿轮9、13中心联接杆DC为摇杆，则ABCD是曲柄摇杆机构；以该机构的B、C、D为安装中心，安装

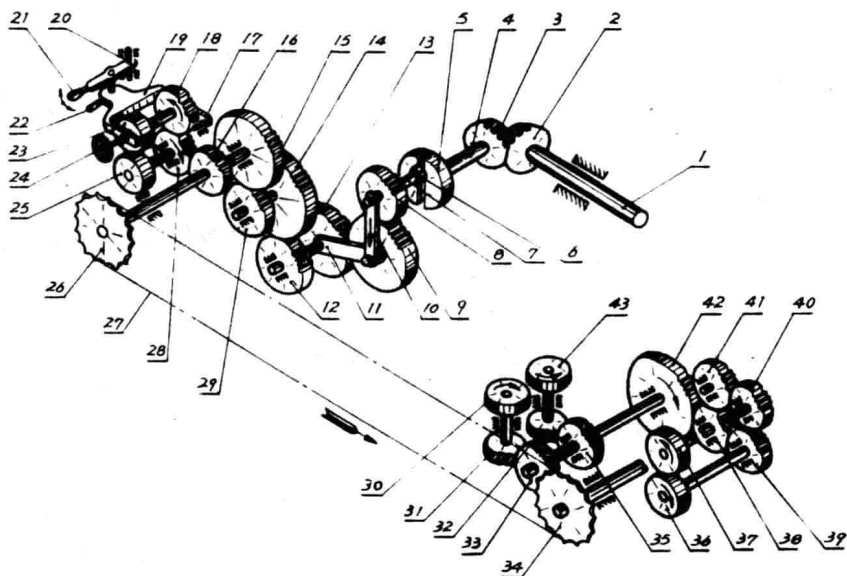


图0.1-3 糖条输送及成型机构传动立体示意图

着三只齿轮，其中齿轮9、13能分别绕轴心C、D旋转，而齿轮8因被螺母固定在偏心盘5上，则只能随曲柄5一起绕机架——曲柄的连结销轴A旋转，且齿轮8每转动一周，从动齿轮13转数为 Z_8/Z_{13} 周（图0.1-4中 $Z_8=25$ ， $Z_{13}=50$ ，故分配轴每转一周，齿轮13转半周），但其转速输出是不均匀的，其转速可能减少至零甚至继续在某一区间作反向转动。由于反向转角较小，且各对齿轮之间存在一定侧隙，因此，这种反转现象一般并不显示出来，而表现为有一个短暂的停歇时间。有关齿轮—连杆组合机构的分析设计参见第二篇“组合机构”。

这种间歇运动机构结构紧凑，不但运动平稳，很少冲击，能实现较大的动停比，还能方便地进行调节，因此用于实现自动包装中作短暂停歇较为理想，多见于包装物料和材料的切断机构中。

⇒ 供纸机构

为了不使乳脂软糖受热焦化粘着，该机采用三层纸包装，内层用糯米纸18裹衬，中间用消毒衬纸16，最外层用印有商标的腊纸15等包装，三层纸拼叠下送，后切断成块纸，其立体示意图如图0.1-5所示，主要由卷纸架、拼纸辊筒、送纸辊筒和切纸滚刀等组成。

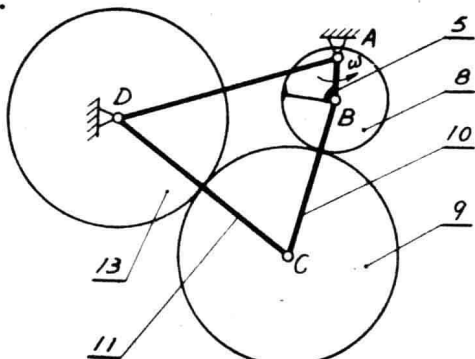


图0.1-4 齿轮—连杆组合机构简图

分配轴34上装有两只链轮35、36和齿轮30（相当于图0.1-2中的链轮13、14和齿轮1），其中齿轮30经齿轮传动带动回转切纸滚刀33，配合固定刀26将三张卷纸合并切断。这种连续回转的滚刀比摆动的剪刀结构简单，但滚切时活动刀刃的运动方向与纸带的移动方向一致。在这种情况下，欲产生一个剪切力，两刀刃必须接触，则会引起刀刃的过早磨损，同时，两刀相碰会产生短暂停歇可能导致包装纸的折皱而影响下一次送纸。当包装纸较宽、供送机构拉力较小、或采用容易产生

折皱的纸包装时，就需考虑采用间歇转动的回转滚刀，在送纸停歇瞬间完成切纸动作。

分配轴上的链轮 3 6 经链轮 3 7 和齿轮传动，带动齿轮 1 旋转。当牙嵌离合器 2 合上时，即经齿轮副带动一对送纸辊 2 4、2 5 相对转动。为了便于纸带穿过，辊筒 2 5 装在带重锤的支架 4 1 上，需要时可抬起支架。导杆 4 2 用来对纸带下送时导向。

分配轴上的链轮 3 5 经链轮 4、离合器 5 和齿轮副带动拼纸辊筒 2 0 转动，需要时，扳动手柄 6（绕销轴 3），就可同时脱开两离合器，供纸过程即停止。拼纸从动辊 2 1 受手柄 3 8 操纵，扳动手柄时，克服拉簧 4 0 的拉力，挡销 3 9 靠其自重下落。放开手柄时，则挡销碰到机架被顶住，此时从动辊 2 1 抬起，可以方便地安装纸带。如抬起挡销 3 9，则从动辊 2 1 在拉簧作用下复位，压紧在辊筒 2 0 上防止纸带返回。滚筒架 2 2 与其连接杆 2 3 间可转动，以便保持两滚筒接触良好。为防止最外层腊纸的油脂粘着在辊筒 2 0 上，装有刮刀 1 9 及时进行处理。

橡皮送纸辊筒 2 4 的线速度一般大于拼纸辊筒 2 0（分配轴转一圈，送纸辊筒转过 61.93 毫米，拼纸辊只转过 57.8 毫米）以保证纸带处于张紧状态。

三只卷纸架的结构相同，图示出了糯米纸卷纸架的结构。在机架上有小轴 8，其上套装安放

卷筒纸的套筒 9，挡纸圆盘 1 3 用螺钉 1 4 固紧在套筒 9 上，其轴向位置可调。钢带 1 1 绕过套筒 9，一端通过销子 1 2 固定在机架上，另一端通过销子与带拉紧辊的连杆 1 0 相连，连杆由拉簧 1 7 张紧。可绕套筒 9 轴线摆动，当卷纸向下拉动时，连杆 1 0 向下摆动，拉簧 1 7 拉伸，钢带放松，套筒 9 回转送纸。当卷纸放松时，拉簧 1 7 拉回连杆 1 0，钢带复又压紧套筒 9，于是停止送纸，同时，张紧辊拉紧卷纸带。这样，使卷纸既保持张紧状态，又保证顺利供纸。当需要调整卷筒纸的在轴上的轴向位置时，可调节螺钉 7 经拨叉将套筒 9 连同安装其上包括卷筒纸在内的所有零件在轴 8 上作轴向调整，以达到所要求之居中位置。

四 工序盘机构

工序盘的立体示意图如图 0-1-6 所示。

分配轴 1 9 旋转，带动偏心轮 1 4、1 5 和 1 6 转动，偏心轮 1 5 经连杆 1 2 驱动套装在回转主 轴 8 上的凸轮 7 摆动，再经滚柱 3 使活动糖钳 2 绕销轴 4 摆动，弹簧 5 被压缩，糖钳 2 张开。当推糖杆将糖块推入钳口时，在凸轮 7 作用下靠弹簧压力将其压紧在工序盘上的砵钳 1 与 2 之间。同时，偏心轮

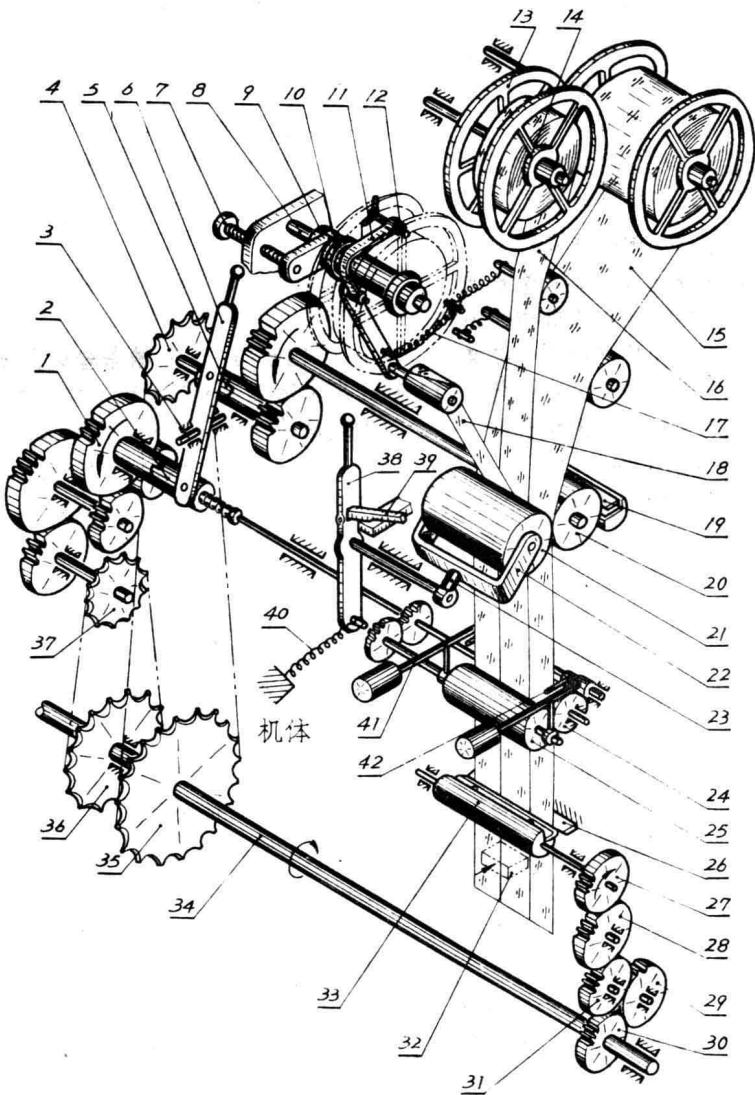


图 0-1-5

1 4 经连杆 1 3、摆杆 9 使抄纸板 2 0 以销轴 1 0 为支点摆动，抄纸板向上摆动时，包折下纸边。接着工序盘在凸轮机构带动下转位，各对糖钳都转动 $1/8$ 转。在转动过程中，上纸边由于固定折纸板 6（假想线示）的阻挡，将其下折而盖住下纸边，再经过扭结工位由扭结机械手（假想线示）扭转，使裹包着糖块的糖纸两端扭紧，然后工序盘转位，把糖送到图示 A 处时糖钳 2 在凸轮 7 作用下张开，其时偏心轮 1 6 经连杆 1 7 使打糖杆 1 8 绕销轴 1 1 顺时针摆动，打糖杆 1 8 将钳口内（A 处）包装完成的糖果推出，通过料槽集于成品收集箱内，完成全部包糖过程。

四切断—上料机构

为了适应高速包装的要求，合理分配各有关动作的运动时间以便其更好地协调工作是很重要的。显然，该机在进糖工位需完成的复杂动作——送糖、切糖、托糖、推糖、压纸等的配合是一个关键，图 0·1—7 所示表示了切断——上料机构的立体示意图。业经整形轧花后的糖条由导槽 5 伸到处于静止状态的托糖杆 1 0 的托叉 9 内，当糖条处于刚停止输送瞬间时，连续回转的切糖刀 4 即把糖条切断，于是在托叉 9 内便留有一粒糖；与此同时，供纸机构亦把包装纸向压纸杆 2 0 上的压纸叉 7 和托糖杆 1 0 上的托叉 9 间输送。当包装纸达到要求长度时，压纸叉 7 向托叉 9 靠拢，将其压牢在糖块的前侧。其时，切纸滚刀将纸切断。接着推糖杆 6、压纸杆 2 0 和托糖杆 1 0 连同被夹住的糖块及块纸一起向工序盘送进。当送至接近工序盘上的一对糖钳 8 时，托糖杆停止前进，而推糖杆与压纸杆继续向前移动，将糖和纸送入糖钳，这时，托糖杆开始返回到起始位置停止，糖条又立即送到它的托叉 9 上。然后，推糖杆返回。

为了避开糖条，推糖杆在返回时，其头部必须绕过托叉 9 而由其下面返回，而压纸杆 2 0 要等到工序盘转位后才能返回，以免糖和纸重新带出糖钳。

安装在分配轴 1 6 上的凸轮 1 3

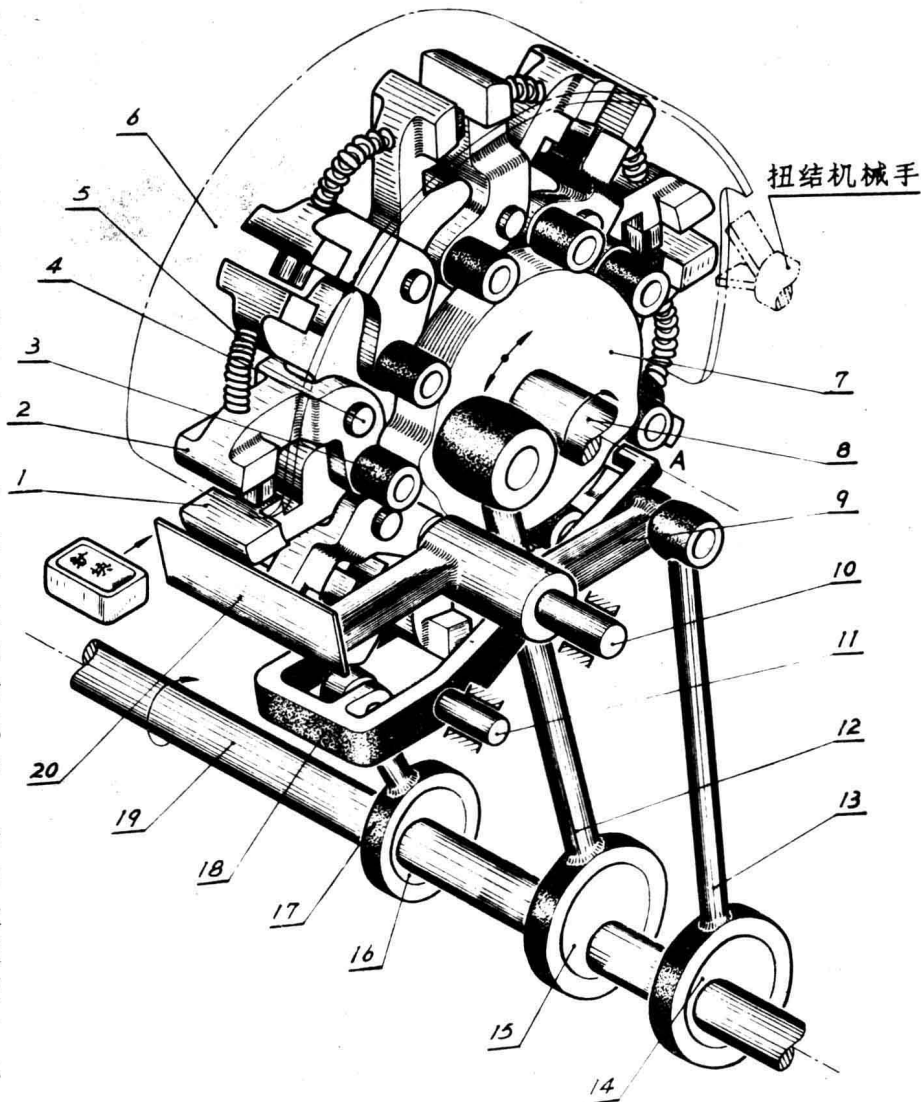


图 0·1—6 工序盘的立体示意图

控制托糖杆10摆动，凸轮11、12控制压纸杆20的摆动，偏心轮15通过连杆18、摇杆23

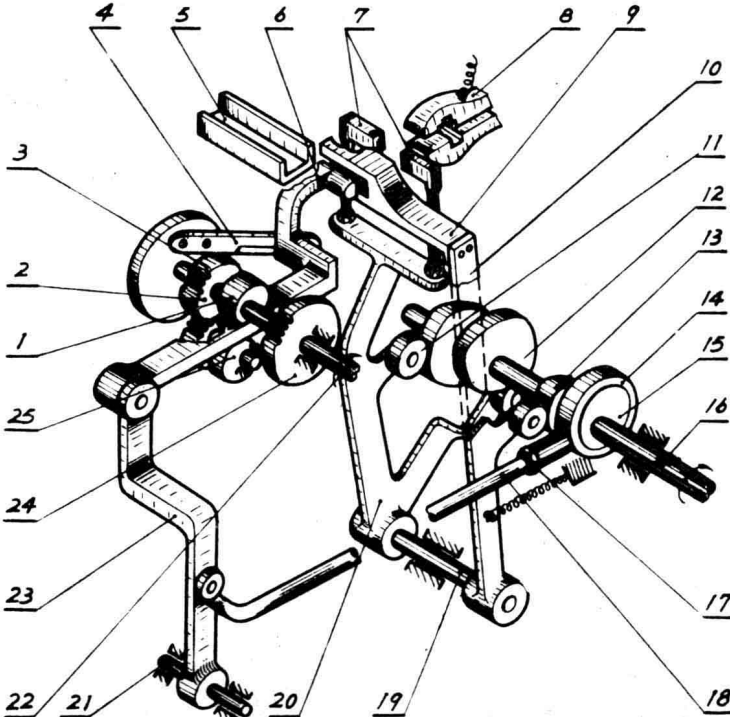


图 0.1-7 切断——上料机构立体示意图

控制推糖杆6水平方向的运动，若需调整推糖杆的极限位置，可调节连杆18长度，并用螺母17固紧。

分配轴16还通过齿轮传动（图中未示）带动轴22转动，使切糖刀4连续回转，并通过齿轮24带动切纸滚刀连续回转。齿轮副3带动反向转动的上凸轮1、下凸轮25控制推糖杆6垂直方向的运动。

推糖杆既要作水平方向又要作垂直方向的运动，即要完成平面曲线运动，这种实现平面曲线运动的机构，称为凸轮——连杆组合机构，其运动简图如图0.1-8所示。

推糖杆EFG与曲柄摇杆机构AECD在E点铰接，并在F点有一对凸轮 O_1O_2 控制一根平底摆从动件，运动时每一瞬间，E、F的位置是确定的，从而可保证推糖头G完成预定的平面封闭曲线运动（见图0.1-8中F点轨迹）。

为了保证上下两个凸轮的共轭作用，它们的加工和装配精度都要有更高的要求。

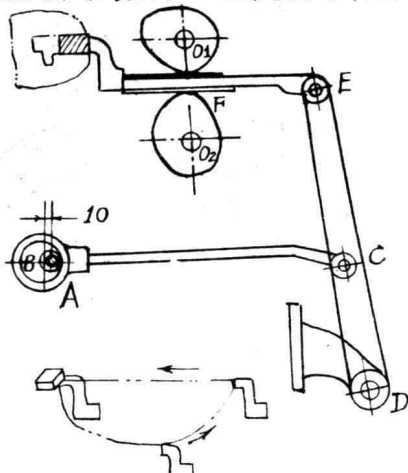
这种机构结构简单，但凸轮与从动件之间存在滑动摩擦，因此磨损较厉害。通常在推糖杆接触点的两面各复盖一块45号钢（淬火、回火至HRC40~45），而凸轮则采用15号钢（表面渗炭淬硬至HRC56~62，渗炭层厚度为0.6~0.8毫米）。

内扭结机械手

糖块经裹包以后，裹包纸两端需扭结封闭，在扭结工位，工序盘两侧各有一只扭结手。由于糖纸扭结后缩短，因此，扭结手不但要有张闭与回转运动，而且还应有相向靠近的轴向运动，以防糖纸扭断。图0.1-9所示为扭结机械手立体示意图，能实现上述要求。

在轴6上装有圆柱凸轮9，通过摆杆11和带齿条的小轴1在套筒2内轴向移动，控制手钳4的张闭运动。圆柱凸轮8，通过摆杆10，使套筒2作往复移动，在手钳4张开时靠近和离开。齿轮7经齿轮5、3，使套筒2连同小轴1和手钳4一起作旋转运动。

该包装机操作稳定，生产能力较高，但结构较为复杂，为加工、装配带来一定困难和麻烦，成本较高。尤其是采用成型和包装联合进行的结构，缺少成型后必要的冷却和定型过程，这对收缩性较大的软糖（如蛋白糖等）就很难保证包装质量，往往会出现包而不紧的现象，此外，定型



推糖运动的轨迹

$AB=10, CD=98, DE=282, O_1O_2=78.681$ （单位：毫米）

图 0.1-8 凸轮——连杆组合机构运动简图

外观差、易粘连，也影响它的进一步扩大使用。

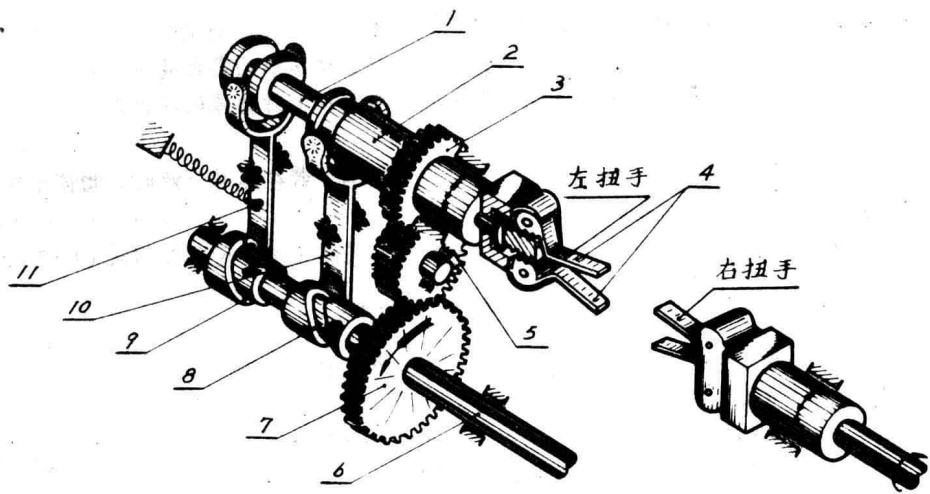


图 0·1- 9 扭结机械手立体示意图

第一篇 第一章 机械振动基础

第一节 简谐振动概述

振动是物体在外力作用下其平衡状态受到破坏而在平衡位置附近作周期性或非周期性的往复运动。简谐振动是周期性振动中最基本的形式。简谐振动是指物体运动的参数随时间作正弦（或余弦）函数式的变化。若以平衡位置作为计算的起始位置，则任意时刻 t 时物体的位移是：

$$x = A \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (1.1-1)$$

上式中 A 是物体的最大位移，称为振动的振幅， ω 是频率。若在运动开始时，物体不在平衡位置，则位移的一般表达式为： $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ $\dots\dots\dots (1.1-2)$

φ 表示物体的初始位置称为相位角。简谐振动时物体的速度、加速度只要将式 (1.1-2) 对时间求导可得： $v = \omega A \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ ， $a = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi + \pi)$ $\dots\dots\dots (1.1-3)$

即物体的速度与加速度也按正弦函数变化，分别比位移超前 $\frac{\pi}{2}$ 及 π 。由 (1.1-3) 及 (1.1-2) 还可得到：

$$x = -\omega^2 x \quad \dots\dots\dots (1.1-4)$$

简谐振动可通过旋转矢量来表达。图 (1.1-1) 表示一个模为 A 的矢量在平面中以角速度 ω 旋转，则该矢量在纵轴上的投影便是简谐振动，相应的速度加速度也可分别以模为 ωA 及 $\omega^2 A$ 的旋转矢量表示，它们分别比位移矢量超前 $\pi/2$ 及 π 。

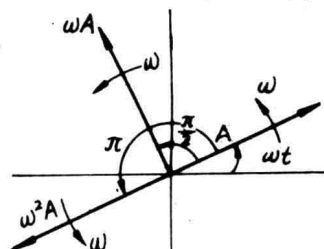


图 1.1-1

两个同频率的简谐振动的合成是常遇到的情况。图 1.1-2 表示两个振幅分别为 A_1 及 A_2 ，相位差 $(\pi/2)$ 的简谐振动（频率均为 ω ）的合成。其结果将是一个振幅为 A 的简谐振动， A 值是

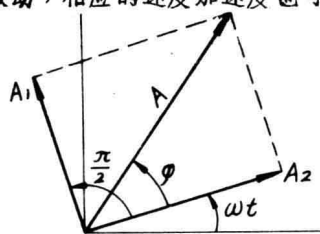


图 1.1-2

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \dots\dots\dots (1.1-5)$$

$$\text{其超出 } A_2 \text{ 的相位角 } \varphi \text{ 为: } \tan \varphi = \frac{A_1}{A_2} \quad \dots\dots\dots (1.1-6)$$

第二节 单自由度系统的自由振动

一、无阻尼的自由振动

单自由度系统的自由振动是最基本的一种振动形式，图 1.1-3 是它的力学简图。对这种振动形式作扼要的叙述。

若以物体的静平衡位置作为计算位移的出发点，则通过对物体的受力分析可得其运动方程为： $m\ddot{x} + kx = 0$ $\dots\dots\dots (1.1-7)$

$$\text{式 (1.1-7) 的解为: } x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad \dots\dots\dots (1.1-8)$$

式中 A 、 B 是决定于初始条件的常数， ω_n 是系统的固有圆频率，其值为

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (\text{弧度/秒}) \quad \dots\dots\dots (1.1-9)$$

若 $t=0$ 时，物体的位移及速度分别是 $x(0)$ 及 $\dot{x}(0)$ ，以此代入式 (1.1-8)，可得

$$x = x(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad \dots\dots\dots (1.1-10)$$

$$\text{振动的周期及固有频率为: 周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ 频率 } f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots\dots\dots (1.1-11, 12)$$

频率和周期也可通过弹簧在物体重量作用下产生的静变形 Δ 来表示：

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \dots\dots\dots (1.1-13)$$

关于单自由度系统振动的有关知识已在前行课程中讲过，本处不再作重复叙述。

二、有阻尼的自由振动

实际振动过程总是伴随着产生阻尼，正因为阻尼的作用，自由振动才不可能永不停止地进行下

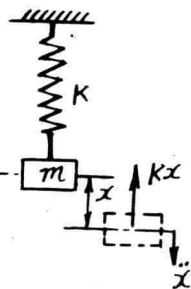


图 1.1-3

去。常见的阻尼有三大类：由液体摩擦而产生的粘性阻尼；由干燥表面摩擦而产生的库伦阻尼以及由于固体变形引起的结构阻尼。以下讨论在前两种阻尼存在的情况下的自由振动。

（一）粘性阻尼

当物体以低速在粘性流体中运动或两相对滑动面间有一连续油膜存在时的阻尼称为线性粘性阻尼，其粘性阻尼力 R 正比于速度 $\dot{x}$ 。

$$R = c\dot{x} \quad \dots\dots\dots (1.1-14)$$

式中比例常数 c 与液体的粘性、油层的厚度等有关。有阻尼存在的系统的表示方式以及受力情况如图 1.1-4 示。

从受力分析可以建立物体的运动微分方程如下

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \dots\dots\dots (1.1-15)$$

这个方程仍然是一个二阶线性常系数微分方程，令 $x = e^{rt}$ 代入可得一个特征方程：

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0, \text{ 该特征方程有两个根}$$

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad \text{振动物体位移的通解是}$$

$$x = e^{-(c/2m)t} [c_1 e^{\sqrt{(c/2m)^2 - (k/m)} \cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{(c/2m)^2 - (k/m)} \cdot t}] \dots\dots\dots (1.1-16)$$

式中 c_1 、 c_2 是两个决定于初始条件的任意常数。从数学上讲，式 (1.1-16) 是一个指数方程，但是位移与时间究竟是何种关系还要决定于 $\sqrt{(c/2m)^2 - (k/m)}$ 的值是实数、是零还是虚数。由此，在有阻尼情况下物体的自由振动的位移与时间的关系可以有三种情况：

第一种情况： $(c/2m)^2 > (k/m)$ 。这是强阻尼情况，上述根号的值是实数，物体不可能产生振动，由于阻尼的作用，物体将按指数规律逐渐趋向平衡位置，理论上，物体永远不会回到初始位置。这是一种强阻尼的类型，有些自动关闭的门就是利用这种阻尼。

第二种情况： $(c/2m)^2 = (k/m)$ 。这时上述根号的值为零，物体处于临界阻尼状态，相应的阻尼系数称为临界阻尼系数，以 C_{cr} 代表，它的值完全由 m 及 k 决定

$$C_{cr}^2 = 4mk \quad \dots\dots\dots (1.1-17)$$

$$C_{cr} = \sqrt{4mk} = 2m\omega_n \quad \dots\dots\dots (1.1-18)$$

通常，引入下列无因次阻尼比 ζ 表示任一阻尼值

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} \quad \dots\dots\dots (1.1-19)$$

物体在临界阻尼状况下，恢复到平衡位置所需的时间是最小的。这时，物体也不发生振动。特征根 r_1 和 r_2 相等，位移与时间关系是

$$x = (C_1 + C_2)t e^{-(c/2m)t} \quad \dots\dots\dots (1.1-20)$$

第三种情况： $(c/2m)^2 < (k/m)$ 。这是较常见的弱阻尼的情况，这时，物体将围绕其平衡位置发生振动，而每一次振动的振幅都比上一次振幅为小，逐渐地趋向平衡位置。将位移公式 (1.1-16) 予以重新安排，可得

$$x = e^{-(c/2m)t} [C_1 e^{i\sqrt{(k/m) - (c/2m)^2} \cdot t} + C_2 e^{-i\sqrt{(k/m) - (c/2m)^2} \cdot t}] \quad \dots\dots\dots (1.1-21)$$

或者写成三角函数形式如下：

$$x = e^{-(c/2m)t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] \quad \dots\dots\dots (1.1-22)$$

式中 $\omega_d = \sqrt{(k/m) - (c/2m)^2}$ 是受阻尼时系统的固有频率（弧度/秒）， A 、 B 及 C_1 、 C_2 均是任意常数。

上述三种情况下，物体位移与时间的关系曲线图见图 (1.1-5)。

受阻尼系统振动频率与无阻尼振动的固有频率之间的关系可以通过阻尼比 ζ 相联系，粘性阻

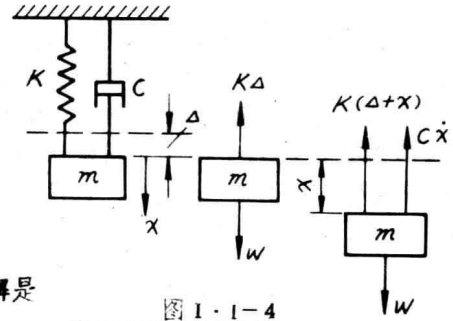


图 1.1-4

尼系统的振动频率永小于无阻尼系统的固有频率，即

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \dots\dots\dots (1.1-23)$$

ω_d / ω_n 与 ζ 间的关系如图 (1.1-6) 所示，由图可见，除非系统的阻尼系数较接近于临界值，一般情况下 ω_d 的减小量是不大的。一般工程问题中 ζ 值大于 0.2 是不多的，因此，振动的频率与无阻尼自由振动的固有频率相差不远。

(二) 对数衰减率

重新观察图 (1.1-5) 可以看到：有阻尼的振动其相邻波形的振幅相差较大，整个振动的振幅衰减很快。对一个有确定阻尼的振动系统而言，设在 $t=t_0$ 时振幅为 A_0 ，一个周期后即 $t=t_0+T_d$ 时振幅减为 A_1 ；二个周期后，即 $t=t_0+2T_d$ 时振幅为 A_2 等等。它们可以分别用下式表示。

$$\begin{aligned} A_0 &= c \cdot e^{-(c/2m)t_0} \\ A_1 &= c \cdot e^{-(c/2m)(t_0+T_d)} = A_0 \cdot e^{-(c/2m)T_d} \\ A_2 &= c \cdot e^{-(c/2m)(t_0+2T_d)} \\ &= A_0 \cdot e^{-(c/2m)2T_d} \end{aligned}$$

式中 c 是决定于 A_0 的任意常数。

n 个周期后的振幅为

$$A_n = A_0 \cdot e^{-(c/2m) \cdot nT_d} \quad (1.1-24)$$

现在研究两个相邻振幅（例如 A_2/A_1 ）之比，由上述关系可得

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-(c/2m) \cdot T_d}$$

式中 $(c/2m)T_d$ 可以用来衡量系统受阻尼作用的效应，

令 $(c/2m)T_d = \delta$ 称为对数衰减率。由此

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\delta} \quad \dots\dots\dots (1.1-25)$$

对于一个阻尼已经确定的系统， δ 是常量。从而，由式 (1.1-25) 可见，振幅的衰减是按指数规律进行的。经过 n 个周期后的振幅比 A_n/A_0 可由式 (1.1-24) 求得：

$$A_n = A_0 e^{-n\delta}$$

或写成
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n} \quad \dots\dots\dots (1.1-26)$$

对数衰减率是一个无因次的量，实际上，从下面的关系可以看出，它仅是阻尼比 ζ 的另一形

式：
$$\delta = \frac{c}{2m} \left(\frac{2\pi}{\omega_d} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \dots\dots\dots (1.1-27)$$

当 ζ 较小时，也可以写成近似公式：

$$\delta = 2\pi\zeta \quad \dots\dots\dots (1.1-28)$$

对数衰减率说明了阻尼对振幅的影响，从能量损失的意义上说， δ 也可说明由于阻尼引起的能量损失。由于在最大振幅时，系统的能量表现为弹簧的势能，因此，两个相邻振幅的能量分别为

$$V_1 = \frac{1}{2} k A_1^2, \quad V_2 = \frac{1}{2} k A_2^2$$

而
$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2!} - \dots\dots$$

因此，能量损失率为

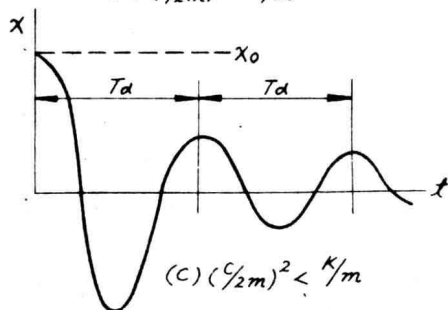
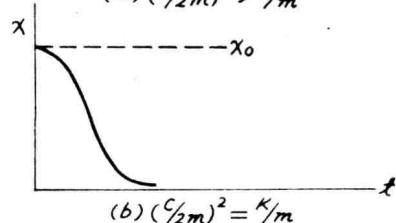
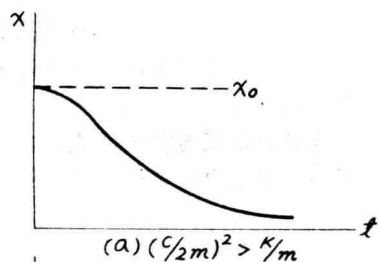


图 1.1-5

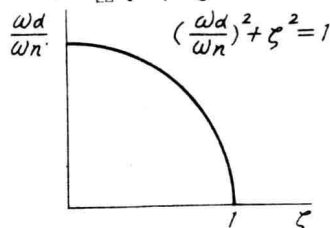


图 1.1-6

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = 1 - e^{-2\delta}$$

展开 $e^{-2\delta}$, 对于弱阻尼系统, δ 值较小, 略去高阶项, 最后可得: $\frac{\Delta V}{V} = 2\delta$

库伦阻尼

库伦阻尼亦称干摩擦阻尼, 是由两个干燥表面相对滑动而引起的。这种阻尼的阻尼力与物体位移或速度无关, 仅决定于滑动表面的正压力。但是阻尼力的方向始终与运动方向相反, 当物体的运动方向改变时, 阻尼力的方向也改变。因而, 对于正向和反向运动需要用两组不同的方程来描述。

参看图 (1.1-7), 对于从右到左的半个循环有

$$-kx + \mu N = m\ddot{x}$$

上式之解为

$$x = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad \dots (1.1-29)$$

若物体的运动为自左向右, 对该半个循环有

$$-kx - \mu N = m\ddot{x}$$

其解为

$$x = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad \dots (1.1-30)$$

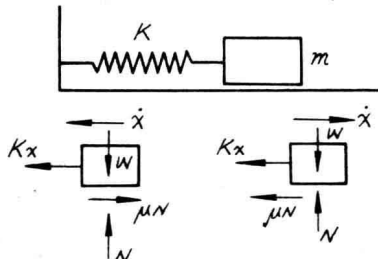


图 1.1-7

式 (1.1-29) 及式 (1.1-30) 中 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 为决定于起始条件的任意常数。

设图 (1.1-7) 中物体的初始位置 $x(0) = A_0$, $\dot{x}(0) = 0$, 则由式 (1.1-29) 可求得

$$A_1 = A_0 - \frac{\mu N}{K}, \quad B_1 = 0$$

及

$$x = \left(A_0 - \frac{\mu N}{K}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{K} \quad \dots (1.1-31)$$

上式适用于 $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$ 。在 $t = \pi/\omega_n$ 时, $x = (2\mu N/K) - A_0$ 。对于另半个循环, 按式 (1.1-

30) 有 $A_2 = A_0 - \frac{3\mu N}{K}, \quad B_2 = 0, \quad x = \left(A_0 - \frac{3\mu N}{K}\right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{K} \quad \dots (1.1-32)$

上式适用于 $(\pi/\omega_n) \leq t \leq (2\pi/\omega_n)$, 当 $t = 2\pi/\omega_n$ 时, $x = A_0 - (4\mu N/K)$ 。由此可见, 经过一次振动循环, 振幅减少 $4\mu N/K$, 经过若干次循环, 在某次循环结束时, 振幅小于 $(\mu N/K)$ 时, 振动即告停止, 因为此时弹簧力小于摩擦力 $Kx < \mu N$ 。图 (1.1-8) 表明库伦阻尼时自由振动振幅的变化。由图可见, 振幅不是按粘性阻尼的指数规律衰减而是按线性规律减小, 位移曲线被包络在两条斜直线之内。相邻两振幅之间的关系是

$$A_{n+1} = A_n - \frac{4\mu N}{K}$$

最后还须注意, 存在库伦阻尼时振动的

频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 是与无阻尼的自由振动的频率相同的。

第三节 有阻尼的强迫振动

一个振动系统在振动过程中持续不断地受到外界激振力的作用, 补偿了由阻尼所消耗的能量, 因而使振动得以持续下去, 这样的振动称为强迫振动。物体在强迫振动中不仅受到弹性恢复力和阻尼力还受有激振力的作用, 从而作出了某种响应, 研究这些响应就是本节的内容。

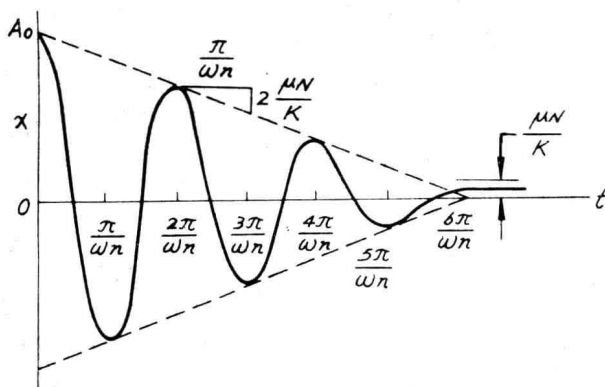


图 1.1-8

一、简谐激振力

图 (1.1-9) 是受有简谐激振力 $F_1 \sin \omega t$ 的单自由度振动系统简图。由受力图分析可列出下

列方程 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_1 \sin \omega t \quad \dots (1.1-33)$

式(1.1-33)仍然是一个二阶线性方程式,按微分方程理论,该方程式的解应包括式(1.1-15)的通解及一个特解。可以把式(1.1-33)的解写成如下形式

$$x = e^{-(c/2m)t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (1.1-34)$$

上式中第一项就是式(1.1-15)的通解,从上一节的分析已知由于阻尼的存在这一项将随时间而很快消失,所以是瞬态响应。第二项和第三项是只要激振力存在始终产生的响应,因此,这两项才是稳态响应。将该稳态解代入原运动微分方程(1.1-33)得

$$(-C\omega^2 + D \frac{c\omega}{m} + \frac{k}{m} \cdot C) \cos \omega t + (-D\omega^2 - C \frac{c\omega}{m} + \frac{k}{m} \cdot D) \sin \omega t = \frac{F_1}{m} \sin \omega t$$

将上式改写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} (\omega_n^2 - \omega^2) & \frac{c\omega}{m} \\ -\frac{cm}{m} & (\omega_n^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m} \end{bmatrix} \quad (1.1-35)$$

从而解得

$$C = -\frac{F_1 c \omega}{m^2 \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m} \right)^2 \right]}, \quad D = \frac{F_1 (\omega_n^2 - \omega^2)}{m \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m} \right)^2 \right]} \quad (1.1-36)$$

把C及D的值代入式(1.1-34),同时用简谐振动合成的方法,可以把稳态振动的位移响应写成下式

$$x = B \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.1-37)$$

其中B是振动的振幅,其值为:

$$B = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{F_1}{m \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m} \right)^2}} \quad \text{或} \quad B = \frac{F_1}{K \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (1.1-38)$$

φ 是相位角,亦即位移滞后于激振力的角度为

$$\tan \varphi = \frac{-C}{D} = \frac{c\omega}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)} \quad (1.1-39)$$

或者,振动响应的全解是:

$$x = e^{-(c/2m)t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + B \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.1-40)$$

至此,可以对强迫阻尼振动作以下几点概括结论并对振幅响应等作进一步分析。

1. 在简谐激振力作用下,物体的振动也是简谐振动,其频率与激振力频率相同。

2. 在简谐激振力作用下物体的最大振幅是B,其值由式(1.1-38)决定。把振幅写成振幅比的形式如下

$$\beta = \frac{B}{F_1/K} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (1.1-41)$$

振幅比 β 说明了由于激振力的动力作用使物体的振幅增加的倍数,称为动力放大因子,这一点只要注意到 (F_1/K) 是激振力的幅值所引起的静伸长,而B是实际位移响应的幅值便可予以理解。由上式可以看出两点:第一,对各种简谐力的频率而言,特别是 $(\omega/\omega_n) = 1$ 附近阻尼明显降低了振幅比。我们把 $\omega = \omega_n$ 称为共振频率,在无阻尼的强迫振动($\zeta = 0$)时的共振状态下,振幅将达到无限大。对于有阻尼的强迫振动,共振状态也是在振幅达到最大值位置的附近。振幅比的减少在共振频率附近更显得突出;第二,振幅比达到最大值的频率稍小于共振频率($\omega = \omega_n$),最大振幅比发生在

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (1.1-42)$$

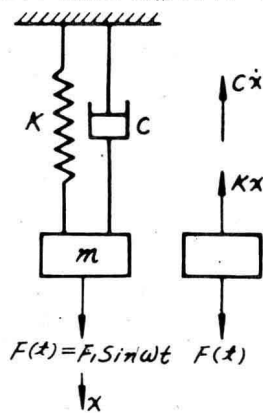


图 1.1-9