高校教材

本教材另配习题解答

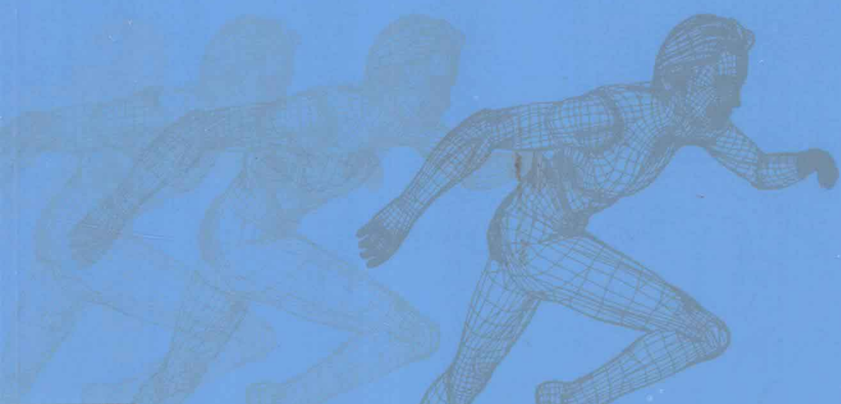
第3版

# 概率与统计

高等师范院校教材

GaoDengShiFan YuanXiaoJiaoCai

主编 缪铨生



华东师范大学出版社

# 概率与统计

主编　缪铨生

第3版

华东师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率与统计/缪铨生主编. —3 版. 上海:华东师范大学出版社,2000. 5
ISBN 978-7-5617-0450-9

Ⅰ. 概... Ⅱ. 缪... Ⅲ. ①概率论-高等学校:师范学校-教材②数理统计-高等学校:师范学校-教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09254 号

概率与统计(第 3 版)

主　　编　缪铨生
项目编辑　朱建宝
文字编辑　王植鑫
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021-62450163 转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　24.5
字　　数　504 千字
版　　次　2007 年 06 月第三版
印　　次　2007 年 06 月第一次
印　　数　5100
书　　号　ISBN 978-7-5617-0450-9/N·019
定　　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

# 目录

## 引言

## 第1章 事件与概率



## 第2章 随机变量及其分布

## 第3章　多维随机变量及其分布



## 第4章　随机变量的数字特征



## 第5章　大数定律和中心极限定理



## 第6章　马尔可夫链

## 第7章　统计量及其分布



## 第8章　参 数 估 计



## 第9章　参数假设检验



## 第10章　非参数假设检验

## 第 11 章　方差分析与回归分析



## 附　　表

# 引言

我们观察自然界发生的现象不外乎有两类,一类现象称为决定性现象. 这类现象的特点是:在一组条件下,其结果完全被决定,或者完全被肯定,或者完全被否定,不存在其他的可能性. 例如,使两个带同性电荷的小球相靠近,则两小球相互排斥. 这里,“使两个带同性电荷的小球相靠近”是一组条件,一旦这组条件实现,那么“两小球相互排斥”这一结果就完全被肯定. 所以“使两个带同性电荷的小球相靠近,则两小球互相排斥”这一现象是决定性现象. 该决定性现象,在试验中必然发生,故这种决定性现象常称为必然现象. 又如,使“两个带同性电荷的小球相靠近(条件),则两小球互相吸引(结果)”完全被否定,所以这一现象也是决定性现象. 该决定性现象,在试验中必然不发生,故这种决定性现象常称为不可能现象. 显然,必然现象和不可能现象互为相反面,必然现象的反面就是不可能现象,反之,不可能现象的反面就是必然现象. 由上可见,决定性现象(必然现象或不可能现象)实际上就是事前可以预言结果的现象. 通常我们对某个现象可以“未卜先知”,应当说指的是决定性现象.

还有一类现象称为非决定性现象. 这类现象的特点是:条件不能完全决定结果,每次观察所发生的结果可能是不同的. 例如,“向桌上任意抛掷一枚硬币,落下后某一面向上”这一现象是非决定性现象. 因为条件“向桌上任意抛掷一枚硬币”不能完全决定结果“某一面向上”,落下后它可能“正面向上”,也可能“反面向上”. 又如,“从一副扑克牌中任选两张,所得两张牌的花色”是非决定性现象. 因为任选的两张扑克牌花色可能是“黑桃、黑桃”,“黑桃、方块”,……“梅花、梅花”等等. 由此可见,非决定性现象实际上就是事前不能预言结果的现象,这类现象只有事后才能确切知道它所发生的结果. 在概率论中,把非决定性现象称为**随机现象**. 值得注意的是,随机现象不能理解为杂乱无章的现象. 通常说某种现象是随机的,有两方面的意思:第一,对这种现象进行观察,其结果不是唯一的,可能会发生这种结果,也可能会发生那种结果,究竟出现哪一种结果,事前是不能预言的,只有事后才能得知;第二,在一次观察中,这种现象发生哪一种结果常带有偶然性,但通过对这种现象的大量观察,我们会发现这种现象的各种可能结果在数量上呈现出一定的规律性. 例如,考察“掷一枚硬币,落下后某一面向上”这个随机现象,我们将硬币向桌上抛掷一次观察它所发生的结果,可能是“正面向上”,也可能是“反面向上”. 若试验结

果是“正面向上”，这是偶然的. 然而我们如果大量重复进行抛掷硬币的试验，可以发现，即使各次试验结果没有什么规律性，但“正面向上的次数”与“反面向上的次数”各接近于总试验次数的一半，这就是所述随机现象内部存在的统计规律性. 又如，我们研究“存放在容器里的占有一定体积的气体的分子运动速度”这个随机现象，由于气体分子间的相互碰撞，气体分子运动的速度时刻都在发生变化，某时刻气体分子运动的速度取某值是带有偶然性的. 然而通过大量重复的观察，我们发现气体分子运动的速度在数量上遵从一定的规律，即气体分子运动速度的绝对值服从麦克斯韦(Maxwell)分布，它就是“存放在容器里的占有一定体积的气体的分子运动速度”这个随机现象内部存在的统计规律性.

概率论与数理统计的任务就是要揭示随机现象内部存在的统计规律性. 概率论的特点是根据问题提出相应的数学模型，然后去研究它们的性质、特征和规律性；数理统计则是以概率论的理论为基础，利用对随机现象的观察所获得的数据资料，来研究数学模型.

概率论与数理统计的发展历史悠久. 14 世纪，随着商业贸易日益发展，航海事业日新月异，出现了海上保险事业. 到 16 世纪时，人寿保险事业及水灾、火灾等保险事业也相继出现，它们都向数学提出了新的要求，需要应用数学来分析和研究随机现象中蕴涵的规律，估计事故发生的可能性大小，这就促进了数学家们对概率与数理统计的研究. 因此可以说，概率论与数理统计的兴起是由保险事业的发展而产生的. 但最初激发数学家们思考概率与数理统计问题的由头却来自掷骰子游戏.

17 世纪中叶，欧洲贵族们盛行掷骰子游戏，当时法国有一位热衷于掷骰子游戏的贵族德·梅耳(De Mere)，他在掷骰子游戏中遇到了一些使他苦恼的问题. 譬如，他发现掷一枚骰子 4 次至少出现一次六点是有利的，而掷一双骰子 24 次至少出现一次双六是不利的. 他找不到解释的原因，于是他把遇到的问题向当时的法国数学家帕斯卡(Pascal)请教. 帕斯卡接受了这些问题，并把它提交给另一位法国数学家费马(Fermat). 他们频繁地通信，开始了概率论和组合论的研究. 他们的通信被从荷兰来到巴黎的荷兰科学家惠更斯(Huygens)获悉. 他独立地研究了这些问题，结果写成了《论掷骰子游戏中的计算》，时间是 1657 年. 这是迄今被认为有关概率论最早的论著. 因此可以说早期概率与数理统计的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯. 这一时期(17～18 世纪初)称为组合概率时期，计算各种古典概率.

18 世纪初，伯努利(Bernoulli)发现了大数定律，这是概率论中一个重要结果. 从 18 世纪初到 19 世纪，母函数、特征函数引入概率论的研究中，成功地解决了许多问题，特别是对中心极限定理的研究，在这方面棣莫弗(De Moivre)、拉普拉斯(Laplace)、李雅普诺夫(Ляпунов)等都有出色的工作，这时期也称作分析概率时期.

1900 年皮尔逊(Pearson)发表了著名的 $\chi^2$ 统计量，用于检验经验分布与某个理论分布是否相符. 从 20 世纪初到 20 世纪中叶(1900～1940)，概率论主要的研究

工作一方面是极限理论的发展，随机过程理论的建立；另一方面是系统地研究概率的基本概念. 有许多人在这方面作过努力，特别是柯尔莫哥洛夫（Колмогоров）于1933年在苏联科学院院报上发表了“概率的公理化结构”的论文，为理论概率奠定了严格的逻辑基础. 在这一时期，完成了概率论与数理统计的分家，1930年创办的《数理统计年刊》（Annals of Mathematical Statistics）可看成是这一分家的标志.

从1940年开始，概率论有了自己的研究方法，重点是研究过程的样本函数的性质，即研究过程随时间变化的轨道性质. 在这期间，一方面逐渐地出现了理论概率与应用概率分家的趋势. 术语“应用概率”大约首次出现于美国数学会1955年的会议上，这次会议以“应用概率”为标题发表了一组文章；另一方面也出现了蒙特卡罗（Monte Carlo）方法，其思想早在18世纪法国学者布丰（Buffon）用投针游戏估计 $\pi$ 值时就已形成，但真正定名的却是在1946年. 当时美国两位学者冯·诺伊曼（von Neumann）和乌拉姆（Ulam）首先用数学程序在计算机上模拟中子连锁反应，并用概率统计的方法研究反应后的结果，他们把第一个这样的程序命名为“蒙特卡罗程序”. 自此兴起了蒙特卡罗方法，它是一种建立在概率统计基础上的计算方法，在核物理、表面物理、电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中有着重要的应用.

现在，概率论与数理统计已成为最重要和最活跃的数学学科之一. 它既有严密的数学基础，又与各学科联系紧密. 在自然科学、社会科学、管理科学、技术科学和工农业生产等各个学科和领域中都得到了广泛的应用.

# 第 1 章 事件与概率

## §1.1 随机事件及其概率

### 1.1.1 事件的概念

#### 1.1.1.1 随机试验

为了研究随机现象内部存在的数量规律性，必须对所述随机现象进行观察或试验. 今后我们把对随机现象所进行的观察或试验统称为试验. 例如，为了研究"向桌上抛掷一枚硬币，落下后出现某一面向上"，必须做"向桌上抛掷一枚硬币"的试验；又如，为了考察"从一副扑克牌中任摸两张所出现的花色"，必须做"从一副扑克牌中任摸两张牌"的试验. 这类试验有两个特点：一是在相同条件下可以重复进行；二是每次试验出现什么结果事前不能确定，试验的可能结果是多种的. 我们称这种试验为**随机试验**，以下所说的试验都是指随机试验.

对于一个试验，总有一个试验目的. 根据这个目的，将会得到试验可能出现的各种结果. 例如，抛掷一枚硬币，目的是要考察它哪一面向上. 考察的结果只有两种可能：一是"正面向上"；二是"反面向上". 又如，从一副扑克牌中任摸一张，目的是要考察它是什么花色. 考察的结果只有四种可能："黑桃"、"红心"、"方块"、"梅花". 今后，凡谈及试验的结果时，都是指某一确定的试验目的而言的.

#### 1.1.1.2 事件的直观意义

若某件事情在一次试验中一定发生，称这件事情为**必然事件**. 例如，"在一副扑克牌中任摸 14 张，其中有两张花色是不同的"这件事件就是必然事件.

若某件事情在一次试验中一定不发生，称这件事情为**不可能事件**，例如，"在一副扑克牌中任摸 14 张，其中没有两张花色是不同的"是不可能事件.

从必然事件和不可能事件的意义可以看到，必然现象的结果是必然事件，不可能现象的结果是不可能事件，必然事件与不可能事件互为相反面. 必然事件和不可能事件都是事前可以预言的事情.

若某件事情在一次试验中可能发生也可能不发生，称这件事情为**随机事件**，简

称为**事件**. 例如,"掷一硬币,出现正面向上"、"从一副扑克牌中任摸两张,所得花色是相同的"都是事件.

根据事件的意义容易明白,试验的每一个可能结果是事件,因为这种事件不可能再分解为更为简单的事件,所以我们特别称这种事件为**基本事件**. 而一般的事件是由若干个基本事件复合而成的. 例如,考察在 0、1、2、3、4、5 六个数字中任取一个的试验,可能发生的结果有六种:"取得一个数是 0","取得一个数是 1",……,"取得一个数是 5",这些都是基本事件. 而事件"取得一个奇数"是由"取得一个数是 1"、"取得一个数是 3"及"取得一个数是 5"三个基本事件复合而成的.

从上述事件的构成来看,在一次试验中,一个事件"发生",当且仅当它所含的一个基本事件发生,一个事件"不发生",当且仅当它所含的所有基本事件都不发生. 这里,需要注意的是,一个事件是否称为基本事件是相对于试验的目的来说的. 例如,一射手打靶,如果考察命中的环数,那末"命中 0 环","命中 1 环",……,"命中 10 环"都是基本事件,共有 11 个;如果考察命中还是不命中,那末此时只有两个基本事件了,即"命中"、"不命中". 又如,测量人的体重,如果关心的是重量,那末一般说来,区间$(0, \infty)$中的任一实数都可以是一个基本事件,这时,基本事件有无穷个;但如果测量体重的目的是为了举重比赛中分等级的话,这时就只有"52 公斤","56 公斤","60 公斤",……以及"110 公斤以上"等 10 个基本事件了.

通常,用符号 $\Omega$ 表示必然事件,用符号$\varnothing$表示不可能事件,用符号 $A, B, C, \cdots$及带下标的 $A_0, A_1, \cdots$表示事件,用符号 $\omega$ 及带下标的 $\omega_0, \omega_1, \cdots$表示基本事件.

必然事件、不可能事件不是事件(即随机事件),但为便于讨论问题起见,我们也把它们算作事件.

## 1.1.2 事件的集合论定义

20 世纪 30 年代初,冯·米泽斯(von Mises)开始用集合论的观点来研究事件. 由于这个概念的引进,使得以后概率论的研究走上了严格化的道路. 下面我们介绍事件的集合论定义.

### 1.1.2.1 样本空间

称试验的每一种可能结果即基本事件为**样本点**,因样本点就是基本事件,故样本点仍记为 $\omega$ 或带下标的 $\omega_0, \omega_1, \cdots$. 样本点的全体称为**样本空间**. 因任一次试验必然出现样本空间中的某一样本点,故样本空间作为一个事件是必然事件,仍以 $\Omega$ 表示.

**例 1.1** 掷一枚硬币,考察出现向上的面,试验的可能结果有两个:"正面向上"和"反面向上". 样本点有两个,样本空间是

$$\Omega = \{\text{“正面向上”}, \text{“反面向上”}\}.$$

如采用记号

$$\omega_1 = \text{“正面向上”},\ \omega_2 = \text{“反面向上”},$$

则

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2\}.$$

**例 1.2** 任意抛一枚骰子两次，观察前后两次出现的点数，试验的可能结果共有 36 个：

$$\omega_{ij} = (i,\ j),\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6,$$

样本空间

$$\Omega = \{\omega_{ij} : 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\}.$$

**例 1.3** 观察某电话交换台在上午 9 点钟内所接到的呼唤次数，试验的可能结果是：$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i,\ \cdots$；样本点是 $\omega_i =$ “接到 $i$ 次呼唤”，$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，样本空间 $\Omega = \{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\}$.

**例 1.4** 在单位正方形（$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$）内均匀地投针，观察针落点的坐标. 样本点是 $(x,\ y)$，$0 < x,\ y < 1$；样本空间 $\Omega = \{(x,\ y) : 0 < x,\ y < 1\}$，它含有无限不可列个样本点.



### 1.1.2.2 事件的集合论定义

前面已提出，事件是由若干个基本事件复合而成，而基本事件就是样本点，所以事件是由若干个样本点组成的，故事件可看作是样本空间 $\Omega$ 的子集.

我们把不包括任何样本点的空集也看作是一事件，因为一次试验必然要出现一个样本点，空集是不可能发生的，所以把空集作为一个事件就是一个不可能事件，仍用 $\varnothing$ 表示.

有了上面事件的集合论定义，容易理解，所谓在一次试验中事件 $A$ 发生，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega \in A$；所谓在一次试验中事件 $A$ 不发生，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega \overline{\in} A$.

为便于比较事件的直观意义与集合论定义，现把各符号的两种解释列表如下.

**表 1.1**

| 符　　号 | 集合论解释 | 概率论解释 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 空间 | 必然事件、样本空间 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega$ | 点（元素） | 基本事件、样本点 |
| $A$ | $\Omega$ 的子集 $A$ | 事件 $A$ |
| $\omega \in A$ | $\omega$ 是 $A$ 中的点 | 事件 $A$ 发生 |
| $\omega \overline{\in} A$ | $\omega$ 不是 $A$ 中的点 | 事件 $A$ 不发生 |

对于初学概率的人来说，善于对事件作出概率论解释尤为重要，对事件直观意义的理解将有助于学习概率论.

一个试验与一个样本空间相联系，反过来，一个样本空间又是许多同类型的试验模型的抽象化. 例如，对只含有两个样本点的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 来说，用于气象预报中，$\omega_1$ = "晴天"，$\omega_2$ = "非晴天"；用于人口普查中，$\omega_1$ = "男性"，$\omega_2$ = "女性"；用于产品质量检查中，$\omega_1$ = "合格品"，$\omega_2$ = "不合格品" 等等.

在今后的讨论中都假定样本空间是给定的，并且是在同一样本空间下，讨论事件的种种性质及其概率.

## 1.1.3 事件的关系与运算

我们用事件的集合论定义来引进事件间的关系与运算，然后根据事件的集合论定义与直观意义的对应关系，作出它们的概率论解释. 在此基础上再研究事件间的简单性质，这些将有助于把复杂事件分解成简单事件，对今后复杂事件的概率计算是极其有益的.

### 1.1.3.1 事件间的关系

(1) 事件的包含　若 $A$ 是 $B$ 的子集即 $A \subset B$，称**事件 $B$ 包含事件 $A$**. 因 $A \subset B \Leftrightarrow$ "若 $\omega \in A$，则 $\omega \in B$"，所以 $A \subset B$ 表示事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生. 例如，在 1, 2, …, 9 这九个数中任取一数(以下简称取数试验)，记 $A$="取得数 2"，$B$="取得偶数"，显然 $A \subset B$，即 $A$ 的发生必导致 $B$ 的发生.

如以平面上某一矩形表示样本空间 $\Omega$，矩形内的每一点表示样本点，用画在 $\Omega$ 内的两个小圆形表示事件 $A$ 和 $B$，关系 $A \subset B$ 可用如图 1.1 中的几何图形来表示，它称为文氏图(Venn 图).

$A \subset B$

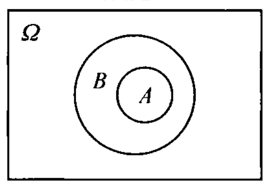



图 1.1

(2) 事件的相等　若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称**事件 $A$ 与事件 $B$ 相等**，记为 $A = B$，它表示若 $A$ 发生 $B$ 必然发生，反之 $B$ 发生 $A$ 也必然发生. 如在上例取数试验中，令 $A$ = "取得 2 或 4 或 6 或 8 诸数"，而 $B$ = "取得偶数"，显然 $A = B$.

(3) 事件的对立(逆)　$A$ 的补集 $\overline{A} = \Omega - A$ 称为**事件 $A$ 的对立事件或逆事件**. 因 $\omega \in \overline{A} \Rightarrow \omega \,\overline{\in}\, A$，$\omega \in A \Rightarrow \omega \,\overline{\in}\, \overline{A}$，由此可知，$\overline{A}$ 发生则 $A$ 不发生，反之，若 $A$ 发生则 $\overline{A}$ 不发生，所以 $\overline{A}$ 表示与 $A$ 性质相反的事件. 如取数试验中，令 $A$="取得偶数"，则与之相反的事件 $\overline{A}$ = "取得奇数".

$\overline{A}$

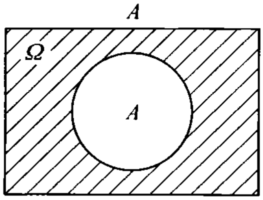



图 1.2

$\overline{A}$ 的几何图形如图 1.2，图中的阴影部分是事件 $\overline{A}$.

### 1.1.3.2 事件间的运算

(1) 事件的和(并)　$A$ 与 $B$ 的和集 $A\cup B$ 称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的和**. 因 $\omega\in A\cup B \Leftrightarrow \omega\in A$ 或 $\omega\in B$, 所以事件 $A\cup B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生或 $B$ 发生 $\Leftrightarrow A$、$B$ 中至少有一个发生. 故事件 $A\cup B$ 发生表示 $A$、$B$ 中至少有一个发生. 例如在取数试验中,令 $A=$"取得 1 或 3",$B=$"取得 2 或 6 或 8",则 $A\cup B=$"取得 1 或 2 或 3 或 6 或 8". $A\cup B$ 对应图 1.3 中的阴影部分.

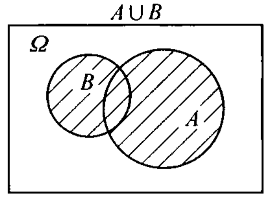



图 1.3

类似的 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和集 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生. 同样,可列个事件和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生.

(2) 事件的交(积)　$A$ 与 $B$ 的交集 $A\cap B$(或记为 $AB$)称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的交**. 因 $\omega\in A\cap B \Leftrightarrow \omega\in A$ 且 $\omega\in B$, 所以事件 $A\cap B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生且 $B$ 发生 $\Leftrightarrow A$、$B$ 同时发生,故事件 $A\cap B$ 发生表示 $A$、$B$ 同时发生. 例如在取数试验中,令 $A=$"取得奇数",$B=$"取得 1 或 2 或 3",则 $A\cap B=$"取得 1 或 3". $A\cap B$ 对应图 1.4 中的阴影部分.

类似的 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$)称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生,同样,可列个事件交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

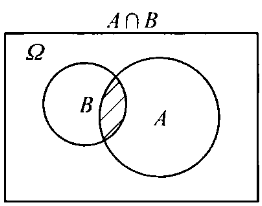



图 1.4

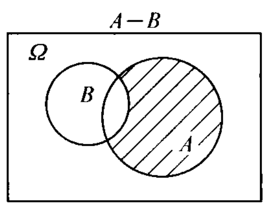



图 1.5

(3) 事件的差　$A$ 与 $B$ 的差集 $A-B$ 称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的差**. 因 $\omega\in A-B \Leftrightarrow$"$\omega\in A$ 但 $\omega\overline{\in}B$", 所以, $A-B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生但 $B$ 不发生,故事件 $A-B$ 发生表示 $A$ 发生但 $B$ 不发生. 例如在取数试验中, $A=$"取得 1 或 3 或 5 或 8",$B=$"取得 2 或 3 或 5",则 $A-B=$"取得 1 或 8". 图 1.5 中的阴影部分表示了 $A-B$.

(4) 事件的互不相容(互斥)　若 $A$ 与 $B$ 的交集是空集即 $AB=\varnothing$, 则称**事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容**. 因 $AB=\varnothing$, 所以若 $\omega\in A$, 则 $\omega\overline{\in}B$, 反之若 $\omega\in B$ 则

$\omega \,\overline{\in}\, A$，这表示互不相容的两事件 $A$、$B$ 不会同时发生. 例如在取数试验中，令 $A=$“取得偶数”，$B=$“取得 1 或 3”，则 $A$、$B$ 互不相容. 易见，$A$ 与它的对立事件 $\overline{A}$ 是互不相容的. 图 1.6 表示了 $A$ 与 $B$ 互不相容.

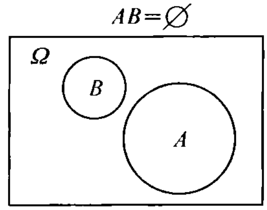



图 1.6

事件的关系与运算的两种解释可列表对照如下.

**表 1.2**

| 符　　号 | 集合论解释 | 概率论解释 |
|---|---|---|
| $A\subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子集 | 事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生 |
| $A=B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 相等 | 两事件 $A$ 与 $B$ 相等 |
| $\overline{A}$ | $A$ 的补集 | $A$ 的对立事件 |
| $A\cup B$ | $A$ 与 $B$ 的和集 | 事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生 |
| $AB$ | $A$ 与 $B$ 的交集 | 事件 $A$ 与 $B$ 同时发生 |
| $A-B$ | $A$ 与 $B$ 的差集 | 事件 $A$ 发生但事件 $B$ 不发生 |
| $AB=\varnothing$ | $A$ 与 $B$ 没有公共点 | 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容 |

**例 1.5**　设 $A$、$B$、$C$ 为三个事件，那么

(1) 因 $A$ 发生而 $B$ 与 $C$ 不发生$\Leftrightarrow\omega\in A$，$\omega\,\overline{\in}\,B$，$\omega\,\overline{\in}\,C\Leftrightarrow\omega\in A-B-C$；另一方面 $\omega\in A$，$\omega\,\overline{\in}\,B$，$\omega\,\overline{\in}\,C\Leftrightarrow\omega\in A$，$\omega\in\overline{B}$，$\omega\in\overline{C}\Leftrightarrow\omega\in A\overline{B}\overline{C}$. 故“$A$ 发生，$B$ 与 $C$ 不发生”的事件可表示为 $A-B-C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}$.

进行类似的分析可得以下的结论：

(2)“$A$、$B$、$C$ 同时发生”的事件是 $ABC$.

(3)“$A$、$B$、$C$ 同时不发生”的事件是$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$(请注意不是$\overline{ABC}$).

(4)“$A$ 与 $B$ 发生而 $C$ 不发生”的事件是 $AB-C$ 或 $AB\overline{C}$.

(5)“$A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生”的事件是 $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$. 这两种表示的区别在于前者 $A$、$B$、$C$ 三个事件可能是相容的，而后者 $A\overline{B}\,\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\,\overline{B}C$、$AB\overline{C}$、$A\overline{B}C$、$\overline{A}BC$、$ABC$ 等七个事件是互不相容的.

(6)“$A$、$B$、$C$ 中不多于一个发生”的事件是$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$.

(7)“$A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生”的事件是 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(8)“$A$、$B$、$C$ 中至多有两个发生”的事件是$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 或 $A\cup B\cup C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}-ABC$.

**例 1.6**　设袋中有红、白、黄各一球，有放回地抽三次，每次抽一个球(有放回的意思是抽出球后仍把抽出的球放回原袋中)，试说明下列各组事件是否相容？如不相容，还要说明是否对立？

(1) $A$="三次抽取，颜色全不同"，$B$="三次抽取，颜色不全同"；

(2) $A$="三次抽取，颜色全同"，$B$="三次抽取，颜色不全同"；

(3) $A$="三次抽取，无红色球"，$B$="三次抽取，无黄色球"；

(4) $A$="三次抽取，无红色球也无黄色球"，$B$="三次抽取，无白色球".

**解** (1) 因为三次抽取颜色不全同包括了颜色全不同的事件，所以 $A$ 与 $B$ 相容.

(2) 颜色全同的反面就是颜色不全同，所以 $A$、$B$ 是对立的. 自然 $A$ 与 $B$ 互不相容.

(3) 三次抽取无红色球包括了颜色全白的事件，而三次抽取无黄色球也包括了颜色全白的事件，所以 $A$ 与 $B$ 相容.

(4) 三次抽取无红色球且无黄色球的事件是一个三次抽取颜色全白的事件，而三次抽取无白色球与三次抽取颜色全白的事件不能同时发生，所以 $A$ 与 $B$ 互不相容；但无白色球不等于不全白，故 $A$ 与 $B$ 不对立.

### 1.1.3.3 事件运算的基本性质

事件运算具有下面的基本性质：

(1) 否定律：$\overline{\overline{A}} = A$，$\overline{\Omega} = \varnothing$；

(2) 幂等律：$AA = A$，$A \cup A = A$；

(3) 交换律：$AB = BA$，$A \cup B = B \cup A$；

(4) 结合律：$A(BC) = (AB)C$，$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

(5) 分配律：$A(B \cup C) = AB \cup AC$，$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$；

(6) 德·摩根(De Morgan)公式(对偶原则)：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

更一般地有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

对可列个事件上式也成立.

以上性质容易通过文氏图看出，也可运用事件的关系与运算的定义证明之. 作为例子，我们证明 $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$.

用概率论语言证明：若 $A \cup BC$ 发生，则 $A$ 与 $BC$ 中至少有一个发生. 若 $A$ 发生，则 $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 同时发生，即 $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ 发生；若 $BC$ 发生，则 $B$ 与 $C$ 同时发生，从而 $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 同时发生，即 $(A \cup B)(A \cup C)$ 发生. 综上所述，$A \cup BC$ 发生必导致 $(A \cup B)(A \cup C)$ 发生，故 $A \cup BC \subset (A \cup B)(A \cup C)$. 反过来，仿前可证：$(A \cup B)(A \cup C) \subset A \cup BC$，由此得 $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$.

用集合论语言证明：若 $\omega \in A \cup BC \Rightarrow \omega \in A$ 或 $\omega \in BC$. 如 $\omega \in A \Rightarrow \omega \in A \cup$