数学分析习题集

（上 册）

吉林师范大学函授教育处

吉林师范大学数学函授教材

数学分析习题集

（上　册）

李世金　肖国鎮
傅沛仁　楊明富　合編

吉林师范大学函授教育处

1960·1·長春

目　　录

第一篇　分析引論习題

第二篇　微分学习題

第一篇　分析引論习題

第一章　函　　数

本章习題有以下四方面內容:

一、判別量y(定义在集合M上)是否为量x的函数. 在作这类习題时, 首先必須弄淸函数的定义, 即如果对于变量x(屬于集合M)的每一个値, 都对应着量y的一个唯一确定的値, 我們就說量y是定义在集合M上量x的函数. 集合M叫做函数的定义域. 对此定义注意以下兩点:

1. 我們所定义的函数是指單値的函数. 也就是对变量x(定义在集合M上)的每一个値, 只能对应量y的一个値, 不能对应兩个或兩个以上的値.

2. 在此課程中我們主要的是在实数領域里边研究函数关系.

二、求函数値. 这里主要的目的是要使讀者熟悉函数的符号.

三、求函数的定义域. 此类习題在本章里占的分量比較多. 这类习題就是給出了函数的对应关系去寻找使对应关系有意义的变量x的全体.

四、作函数的图形. 本章作函数图形的方法和中学一样. 其目的在于使讀者对函数加深理解.

首先我們要考慮如何判別量y是定义在集合M上量x的函数. 这个問題, 我們只能根据定义去考慮, 那就是对于量x

（屬于集合M）的每一个値，看一看是否都对应量y的唯一确定的値（有时M不必限定为数集合）。

例1. $y=x^2$。量y是量x的函数。

例2. $y^2=x$。量y不是量x的函数（非單値对应）。

1. 矩形的面积是否为周長的函数？为什么？

2. 每个人对应一个年龄，試問：

（1）人是否为年龄的函数？

（2）年龄是否为人的函数？

3. 多边形的面积是否为多边形的函数？

下面我們研究函数値的求法。

例3. 已知函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求$f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$。

解：$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$，

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2},$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{x+1}.$$

用类似的方法作下列問題。

4.（1）已知函数 $f(x)=2x^3-3x+4$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(a)$；

（2）已知函数 $f(x)=\frac{x-3}{2+x}$，求 $f(3)$，$f(-3)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(\sqrt{3})$，$f(2a)$；

（3）已知函数 $F(x)=3^{1-x}$，求 $F(0)$，$F(1)$，

$F(2)$，$F(-1)$，$F(2.5)$。

5．已知函数 $F(x)=2^{|x|-2}$，　求$F(0)$，$F(2)$，$F(-1)$，$F(-1)+F(1)$。

6．已知函数 $\varphi(t)=ta^t$，　求 $\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$，$\varphi(a)$，$\varphi(-a)$。

7．$\varphi(t)=t^3+1$，　求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$。

8．已知函数 $\varphi(x)=\frac{2x-1}{3x^2-1}$，試問 $\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$是否存在。

9．已知 $\varphi(x)=2\sin 2x+\cos x$。　求 $\varphi(0)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(a)$。

10．已知函数 $f(x)=\arccos(2x-1)$，　求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1-a)$；$f(2)$ 是否存在。

11．已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，　求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$。

12．已知$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求$f(x)$。

下面我們研究一些証明題。

例 4．已知函数 $F(x)=x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，求証 $F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$。

証明：因为$F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2$，又 $F(x)=x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，所以$F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$。

类似的証明下列問題。

13．（1）$F(x)=x^5-9x$，証明 $F(-x)=-F(x)$；

（2）$F(x)=x^4-2x^2+5$，証明 $F(a)=F(-a)$；

（3）$f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，証明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

14. $\varphi(x)=\lg x$，証明 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi[x(x+1)]$。

15. $F(z)=a^z$，（1）証明 对于任意的 z，关系式 $F(-z)\cdot F(z)-1=0$ 总是正确的；（2）証明 $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$。

16. $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$，証明 $\varphi(-x)=\varphi(x)$。

17. $\varphi(x)=2\sin x-3\cos x$，求証 $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$；$\varphi(x+2n\pi)=\varphi(x)$，其中 n 为整数。

18. 已知 $\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，

証明 $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$。

19. 已知 $f(x)=\sin x$，

証明 $f(x+2h)-f(x)=2\cos(x+h)\cdot\sin h$。

20. 已知 $f(x)=kx$，証明 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。

21. 已知 $f(x)=a^x$，証明 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$。

現在研究函数的定义域。

例 5. 求函数 $y=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+2}+2\cos 3x$ 的定义域。

解： 此函数可以看成兩个函数的和，其中 $y_2=2\cos 3x$ 的定义是实数全体，因而只要求函数 $y_1=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x+2}$ 的定义域就可以了。

要想使 y_1 有意义必須去掉分式中使分母等于 0 的点 x。即 $x=-2$ 点。

同时必須使

$$x^2-2x-3\geqslant 0$$

即 $(x+1)(x-3)\geqslant 0$

解不等式

或 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\end{cases}$， 或 $\begin{cases}x-3\leqslant 0\\x+1\leqslant 0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}x\geqslant 3\\x\geqslant -1\end{cases}$， 得 $\begin{cases}x\leqslant 3\\x\leqslant -1\end{cases}$.

由此得或 $x\geqslant 3$，或 $x\leqslant -1$.

因此，所求的函数的定义域为 $x\geqslant 3$ 及 $x\leqslant -1$. 并去掉 $x=-2$ 点的实数集合。

类似的求下列函数的定义域.

22. $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

23. $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$.

24. $y=\sqrt{7-2x}$.

25. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

26. $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

27. $y=\lg(2-x^2)$.

28. $y=\lg(3x-4)$.

29. $y=\lg(x^2)$.

30. (1) $y=\lg(x^2-4)$;

(2) $y=\lg(x+2)+\lg(x-2)$.

31. $y=\dfrac{\lg(x^2-2x-3)}{x+2}+2\cos 3x$.

32. $y=\lg\sin x$.

33. $y=\lg(1-2\cos x)$.

34. $y=\sin 3x+4\sqrt{\cos x^2}$.

35. $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^3-x}$.

36. $y=a^{3x-2}+a^{\lg x}-1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

37. $y=\operatorname{arc\,sec}x+\operatorname{arc\,sin}x$.

38. $y=(2x)!$.

39. $y=\operatorname{arc\,sin}(\lg 10\frac{x}{10})$.

40. $y=\lg_a\frac{x^2-4}{1+x}+\sqrt{\cos x}$.

作出下列函数的图形：

41. $y=\frac{1}{x}$.

42. $y=\frac{x+1}{x-1}$.

43. $y=\frac{x}{1-x}$.

44. $y=\frac{1}{|x|}$.

45. $y=\frac{x}{|x|}$.

46. $y=\begin{cases} x^2 & \text{当 } x\geqslant 0, \\ -x & \text{当 } x\leqslant 0. \end{cases}$

47. $y=\begin{cases} 2 & \text{当 } x\leqslant -1, \\ 1-x & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1+x & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2 & \text{当 } x\geqslant 1. \end{cases}$

48. $y=\begin{cases} 2x & \text{当 } x\neq 1, \\ 3 & \text{当 } x=1. \end{cases}$

49. $y=\begin{cases} x+1 & \text{当 } x>0, \\ 0 & \text{当 } x=0. \end{cases}$

50. $y=\begin{cases} x & 当\ -\infty<x<1, \\ 2^x & 当\ 4<x<\infty. \end{cases}$

51. $y=[x]$.

52. 設 $y=f(x)$ $(x\geqslant 0)$，表示不超过 x 的質数的数目，对于自变数取 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作这个函数的图形。

第二章 极限理論

我們都知道，数学分析是以极限的理論为主要內容，以这种理論作为工具去研究函数。可見本章在数学分析中的作用。但是由于本章內容繁多瑣碎。所以习題的类型和作題的方法也是形形色色。总的来看，有下列一些內容。

在序列极限的部分中，有給出一个序列写出它的一般項；根据序列极限的定义証明問題和求序列的极限；应用函数在一点极限的定义去証明函数极限是否存在的問題，虽然是比較麻煩的方法，但是对这些定义的掌握和体会是很有帮助的，同时也是培养我們,能够从定义出发去証明問題的一种方法。在本章中也选擇了一些概念題和証明題，并且指出了研究这类問題的一般方法；对于判断一个量在給定的过程中是那一种类型的量和用不等式的方法写极限的精确定义方面也选了一些习題；应用趋向极限的量的运算定理以及常用的几个重要极限，求在給定过程中已知变量的极限,是本章习題中主要內容;应用三个判别极限存在的判別法証明問題，虽然是本章习題中比較难的部分，但是能够把所选擇的几个題全作了，对此类問題的証明方法也会有所了解；本章的最后一部分习題是无穷小量与无穷大量的分級，无穷小量的比較，无穷大量的比較，以及应用等价无穷小函数的性質，求极限和近似計算。

1. 写出下列序列的一般項：

(1) $-2, -2^2, -2^3, \cdots\cdots$;

(2) $2^2, 2^3, 2^4, \cdots\cdots$;

(3) $-2, 2, -2, 2, \cdots\cdots$;

(4) 1, -2, 4, -8,……;

(5) 1, 0, 1, 0,……;

*(6) 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,……;

(7) 1, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$,……;

(8) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$,……;

(9) 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$,……;

(10) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$,……;

(11) $\frac{1}{2}$, $\frac{1\cdot 2}{2^2}$, $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3}$,……,

(12) $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$,……;

(13) $\frac{1}{3}$, $-\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{3}{7}\right)^3$, $-\left(\frac{4}{9}\right)^4$,……;

(14) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$,……;

(15) $\frac{1}{2}$, $\frac{2\cdot 2}{9}$, $\frac{2\cdot 3}{28}$,…….

下面我們根据序列极限的定义（即：如果存在一个数 a，不論預先給定的正数 ε 怎样小，恒有自然数 N，使得对于 $n>N$，的一切 n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，則常数 a 叫做序列 $\{x_n\}$ 的极限.）来研究一些証明題. 此类問題的証明方法主要是通过解不等式求 N.

例 1. 証明序列

$$\frac{2}{2}, \frac{2\cdot 2}{9}, \frac{2\cdot 3}{28}, \ldots\ldots, \frac{2\cdot n}{n^3+1}, \ldots\ldots$$

以 0 为极限.

証明：因为假如此序列是以 0 为极限，則有：不論 $\varepsilon>0$ 怎

样小，总能找到自然数N，当$n>N$时，有不等式

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

成立。

要想求得使不等式（1）成立的n，可从解不等式（1）求出。即：

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|=\left|\frac{2n}{n^3+1}\right|<\left|\frac{2n}{n^3}\right|=\frac{2}{n^2}.$$

满足不等式

$$\frac{2}{n^2}<\varepsilon\text{或}n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

的n，当然也满足不等式（1）。

故不論$\varepsilon>0$怎样小，总存在着$N=\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$，当$n>N$时，不等式（1）成立$\left(\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\text{表示不超过}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\text{的最大整数}\right)$.

或$\lim\frac{n}{n^3+1}=0$。

例2. 証明序列

$$\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2},\cdots\cdots,\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2},\cdots\cdots$$

以$\frac{1}{2}$为极限。

証明：假如此序列是以$\frac{1}{2}$为极限，则必有：不論$\varepsilon>0$怎样小，总能找到自然数N，当$n>N$时，有不等式

$$\left|\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

成立。

要想求得使不等式（2）成立的n，可从解不等式（2）求出。即：

$$\left|\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n^2+n-n^2}{2n^2}\right|=\frac{1}{2n}.$$

滿足不等式

$$\frac{1}{2n}<\varepsilon\text{或}n>\frac{1}{2\varepsilon}$$

的n，当然滿足不等式（2）。

故不論$\varepsilon>0$怎样小，总存在着$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，不等式（2）成立。

或 $$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

类似的証明下列問題。

2. 証明序列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots\cdots$$

以0为极限。

3. 証明序列

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\cdots\cdots,\ \frac{1}{n^2},\cdots\cdots$$

以0为极限。

4. 証明序列

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2^2},\cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{2^n},\cdots\cdots$$

以1为极限。

5. 証明序列

$$\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot4},\cdots\cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\cdots\cdots$$

以0为极限。

6. 証明序列

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\cdots \frac{n+2}{n+1}, \cdots\cdots$$

以1为极限。

*7. 証明收歛序列去掉或添加有限項，并不改变其收歛性及极限值。

8. 証明收歛序列的子序列收歛。

在函数极限的一节里，我們講了以下的定义：

定义 1. 如果存在一个数 b，不論給定的正数 ε 怎样小恒存在一个正数 A，当 $x>A$ 时，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，則称数 b 是当 x 无限增加时 $f(x)$ 的极限。記为：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$。

定义 2. 如果存在一个数 b，不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，恒存在一个正数 A，当 $x<-A$ 时，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，則称数 b 是当 x 无限减小时 $f(x)$ 的极限。記为：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$。

定义 3. 如果存在一个数 b，不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，恒存在一个正数 A，当 $|x|>A$ 时，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，則称数 b 是当 $|x|$ 无限增大时 $f(x)$ 的极限。記为：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$。

定义 4. 如果存在一个数 b，不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，恒存在一个正数 δ，当 $0<|x-a|\delta$ 时，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，則称数 b 是 $f(x)$ 在点 a 的极限。記为：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$。

定义 5. 如果存在一个数 b，不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，恒存在一个正数 δ，当 $a<x<a+\delta$ 时，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，則称数 b 是 $f(x)$ 在点 a 的右极限。記为：$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$。

定义 6. 如果存在一个数 b，不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，