圣才考研网
www.100exam.com

【圣才考研】—考研考博专业课辅导中国第一品牌

国内外经典教材辅导系列•理工类

运筹学教材编写组《运筹学》

（第3版）

笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·理工类

运筹学教材编写组《运筹学》(第3版)

笔记和课后习题(含考研真题)详解

主编：圣才考研网

www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是国内经典教材《运筹学》（第3版，《运筹学》教材编写组主编，清华大学出版社）的学习辅导书。本书遵循第3版的章目编排，共分17章，每章由三部分组成：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分是课后习题详解，对该书的课后习题进行了详细解答；第三部分为考研真题详解，精选名校近年考研真题，并提供了详细的解答。

圣才考研网（www.100exam.com）提供《运筹学》教材编写组主编的《运筹学》网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、经典教材视频课程（图书）（详细介绍参见本书书前彩页）。随书赠送大礼包增值服务【100元网授班+20元真题模考+20元圣才学习卡】。本书适用于参加研究生入学考试指定考研参考书目为《运筹学》教材编写组主编的《运筹学》的考生，也可供各大院校学习运筹学的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学教材编写组《运筹学》（第3版）笔记和课后习题（含考研真题）详解/圣才考研网主编．—北京：中国石化出版社，2013.2
ISBN 978-7-5114-1943-9

Ⅰ．①运… Ⅱ．①圣… Ⅲ．①运筹学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ．①022

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第0158559号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：（010）84271850
读者服务部电话：（010）84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京东运印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本20印张4彩页477千字
2013年2月第1版 2013年2月第1次印刷
定价：48.00元

《国内外经典教材辅导系列》

编　委　会

主编： 圣才考研网（www. 100exam. com）

编委： 刘　琳　刘会峨　邸亚辉　赵国会　傅芬贵

东方飞　冯汉方　黄骅港　公积发　封都亭

丰国云　刘一方　管贷方　飞山东　李于燕

序 言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，整理了各章的笔记，并提供配套的名师讲堂和题库。

《运筹学》教材编写组主编的《运筹学》(清华大学出版社)是我国高校采用较多的运筹学权威教材之一，也被众多高校(包括科研机构)指定为运筹学考研参考书目。作为该教材的学习辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 整理名校笔记，浓缩内容精华。每章的复习笔记以该教材为主，并结合国内外其他运筹学教材对各章的重难点进行了整理，因此，本书的内容几乎浓缩了经典教材的知识精华。

2. 解析课后习题，提供详尽答案。本书参考大量相关辅导资料对该教材的课后习题进行了详细的分析和解答，并对相关重要知识点进行了延伸和归纳。

3. 精选部分名校近年考研真题。为了强化对重要知识点的理解，本书精选了名校近年考研真题，并提供了详细的解答。所选考研真题基本体现了各章的考点和难点，特别注重联系实际突现当前热点。

与本书相配套，圣才考研网提供《运筹学》教材编写组主编的《运筹学》网授精讲班【教材精讲＋考研真题串讲】、经典教材与考研真题解析视频课程(图书)(详细介绍参见本书书前彩页)。

圣才考研网(www.100exam.com)是圣才学习网旗下的考研考博专业网站，提供全国所有高校国际商务硕士考研辅导班【保过班、一对一辅导、网授班、题库、光盘、图书(含网络学习版)等】、外贸类国内外经典教材名师讲堂、考研题库(免费下载，免费升级)、全套资料(历年真题及答案、笔记讲义等)、考研教辅图书等。购书享受大礼包增值服务【100元网授班＋20元真题模考＋20元圣才学习卡】。

考研考博辅导：www.100exam.com(圣才考研网)
职称资格考试：www.100xuexi.com(圣才学习网)

圣才学习网编辑部

目　录

第1章 线性规划与单纯形法

1.1 复习笔记

1. 线性规划模型的概念及其一般形式

线性规划问题的共同特征：

(1)每一个问题都用一组决策变量(x_1，x_2，…，x_n)表示某一方案，这组决策变量的某一确定值就代表一个具体方案。一般这些变量的取值是非负且连续的。

(2)存在有关的数据，同决策变量构成互不矛盾的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示。

(3)都有一个要求达到的目标，它可用决策变量及其有关的价值系数构成的线性函数(称为目标函数)来表示。按问题的不同，要求目标函数在决策变量取值范围内实现最大化或最小化。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。

线性规划模型的一般形式为：

目标函数 $$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

满足约束条件 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \tag{1-3}$$

在上述模型中，式(1-1)称为目标函数 c_j 为价值系数；式(1-2)、式(1-3)称为约束条件；a_{ij}称为技术系数，b_i 称为限额系数；式(1-3)称为变量的非负约束条件。

2. 线性规划问题的标准型及标准化

(1)线性规划的标准型

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

或

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots\cdots,m \quad (1-4) \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots\cdots,n \quad (1-5) \end{cases}$$

线性规划的标准型要求：目标函数是 max 型；约束条件是等式约束；决策变量非负。

(2)线性规划的标准化方法

①若要求目标函数实现最小化，即 $\min z = CX$，这时只需将目标函数最小化变换求目标函数最大化，即令 $z' = -z$，于是得到 $\max z' = -CX$。这就同标准型的目标函数的形式一致了。

②约束方程为不等式。这里有两种情况：一种是约束方程为"≤"不等式，则可在"≤"不等式的左端加入非负松弛变量，把原"≤"不等式变为等式；另一种是约束方程为"≥"不等式，则可在"≥"不等式的左端减去一个非负剩余变量(也可称松弛变量)，把不等式约束条件变为等式约束条件。

③若决策变量 $x_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为自由变量，则令 $x_k = x_k' - x_k''$，其中 x_k'，$x_k'' \geqslant 0$。

④若原模型中某决策变量 $x_r(1 \leqslant r \leqslant n)$ 有下界或上界，即 $x_r \geqslant u$ 或 $x_r \leqslant u$，则在标准型中，令 $x_r' = x_r - u$，即用 $x_r' + u$ 取代原 x_r，其中 $x_r' \geqslant 0$；或 $x_r' = u - x_r$，即用 $u - x_r'$ 取代 x_r，其中 $x_r' \geqslant 0$。

3. 线性规划问题解的概念

(1)可行解：满足约束条件(1-4)式、(1-5)式的解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。

(2)最优解：使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

(3)基：若 A 是约束方程组的 $m \times n$ 维系数矩阵，其秩为 m。B 是矩阵 A 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵($|B| \neq 0$)，则称 B 是线性规划问题的一个基。

(4)基向量、非基向量：基中的列向量称为基向量，系数矩阵中基以外的其余$(n-m)$个列向量就称为非基向量。

(5)基变量与非基变量：与基向量对应的变量称为基变量；与非基向量相对应的变量称为非基变量，显然，基变量有 m 个，非基变量有 $n-m$ 个。

(6)基解：令所有非基变量为 0，求出满足约束条件式(1-4)的解称为基解。

(7)基可行解：满足(1-5)式的基解称为基可行解。

(8)可行基：对应于基可行解的基，称为可行基。

4. 线性规划问题解的几何意义

(1)凸集的概念：设 K 是 n 维欧氏空间中的一点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$ 的连线上的所有点 $aX^{(1)} + (1-a)X^{(2)} \in K$，$(0 \leqslant a \leqslant 1)$，则称 K 为凸集。

(2)关于线性规划的几个定理：

定理 1　若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集。

引理 1　线性规划问题的可行解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

定理 2　线性规划问题的基可行解 X 对应于可行域 D 的顶点。

引理 2　若 K 是有界凸集，则任何一点 $X \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。

定理 3　若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

定理 4　若线性规划问题在至少两个顶点上到达最优，则该问题有无穷多最优解，最优解即是这些顶点的凸组合。

5. 线性规划问题的求解方法

(1)图解法

图解法是一种使用作图的方法直接在图上找到线性规划问题的最优解的方法，简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，适用于决策变量为二维的情况。

图解法的求解步骤为：

①建立平面直角坐标系；

②根据约束条件画出约束直线，找出可行域；

③图示出目标函数，作出一条直线；

④将目标函数直线沿其法线方向在可行域中平移至边界，直至找到使目标函数达到最优的边界点为止，该边界点即为线性规划的最优解。

注意：

①有时目标函数可能在多个顶点处达到最大值，此时在这些顶点的凸组合处也达到最大值，称这种线性规划问题有无限多个最优解。

②若可行域无界，则可能无最优解，也可能有最优解，但若有，必在顶点处取得。

(2)单纯形法

单纯形法求解线性规划的思路：一般线性规划问题具有线性方程组的变量数大于方程个数，这时有不定的解。但可以从线性方程组中找出一个个的单纯形，每一个单纯形可以求得一组解，然后再判断该解使目标函数值是增大还是变小，并决定下一步选择的单纯形。这就是迭代，直到目标函数实现最大值或最小值为止。

单纯形法的基本步骤为：

①找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表。

②检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$,若所有 $\sigma_j \leqslant 0(j = m+1,\cdots,n)$,则已经得到最优解,计算停止;否则,转下一步。

③在 $\sigma_j > 0(j = m+1,\ \cdots,\ n)$ 中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $P_k \leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算；否则，转下一步。

④根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量，再根据 θ 法则

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

可以确定 x_l 为换出变量，转下一步。

⑤以 a_{lk} 为主元素进行迭代(即用高斯消去法或旋转运算进行矩阵的行变换)，使 P_k 变换为第 l 行的元素为 1，其余元素为 0 的列向量；并将基 B 对应的基变量 X_B 列中的 x_l 换为 x_k，从而得到新的单纯形表；重复步骤② ~ ⑤，直到终止。

(3)单纯形法的进一步讨论——人工变量法

分别给(1-4)中每一个约束方程加入人工变量 x_{n+1}，x_{n+2}，$\cdots$，x_{n+m}，可得到

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geqslant 0(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+m) \end{cases}$$

①大 M 法

在一个线性规划问题的约束条件中加入人工变量后，要求人工变量对目标函数的取值没

有影响，则当目标函数为极大化时，人工变量在目标函数中的系数为 $-M$（其中 M 为任意大的正数）；反之，当目标函数为极小化时，人工变量在目标函数中的系数为 $+M$，即

$$\max z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m}$$

或

$$\min z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + Mx_{n+m}$$

②两阶段法

第一阶段：不考虑原问题是否存在基可行解；给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。

$$\min \omega = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 \cdots + 0x_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geqslant 0 (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n+m) \end{cases}$$

然后用单纯形法求解上述模型，若得到 $\omega=0$，这说明原问题存在基可行解，可以进行第二阶段计算。否则原问题无可行解，应停止计算。

第二阶段：将第一阶段计算得到的最终单纯形表，除去人工变量。将目标函数行的系数换原问题的目标函数的系数，作为第二阶段计算的初始单纯形表。继续使用单纯形法求解，以得到最优解。

6. 线性规划问题解的情况及解的判别

(1)线性规划问题解的几种情况

①有惟一最优解；

②有无穷多最优解；

③无可行解；

④无限最优解(即无界解)。

(2)解的判别

①最优解的判别定理：若 $X^{(0)}=(b_1',\ b_2',\ \cdots,\ b_m',\ 0,\cdots,\ 0)^T$ 为对应于基 B 的一个基可行解，且对于一切 $j=m+1,\ \cdots,\ n$，有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $X^{(0)}$ 为最优解。

②无穷多最优解的判别定理：若 $X^{(0)}=(b_1',\ b_2',\ \cdots,\ b_m',\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 为一个基可行解，对于一切 $j=m+1,\ \cdots,\ n$，有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$，且存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

③无界解的判别定理：若 $X^{(0)}=(b_1',\ b_2',\ \cdots,\ b_m',\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 为一基可行解，有一个 $\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，有 $a_{i,m+k}' \leqslant 0$，那么该线性规划问题具有无界解（或称无最优解）。

7. 求解线性规划问题时应注意的几个问题

(1)在极大化问题中，若令 $\sigma_j=c_j-z_j$，则 $\sigma_j \leqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为解的判别准则；若令 $\sigma_j=z_j-c_j$，则 $\sigma_j \geqslant 0$ 为解的判别准则；

(2)在极小化问题中，若令 $\sigma_j=c_j-z_j$，则 $\sigma_j \geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为解的判别准则；若令 $\sigma_j=z_j-c_j$，则 $\sigma_j \leqslant 0$ 为解的判别准则；

(3)在极大化问题中，若有几个检验数 $\sigma_j>0$ 且最大，则取其下标最小的非基变量 x_k 作为换入变量，极小化问题对应成立；

(4)在极大化问题中，若按 θ 法则计算时存在两个或两个以上的最小比值，则应选其中下标最小的基变量 x_l 为换出变量，极小化问题对应成立。

1.2 课后习题详解

1.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

(1)

$$\max z=x_1+3x_2$$

$$s.t.\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\ x_1+x_2\geqslant 1\\ x_2\leqslant 4\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：如图 1-1 所示，该问题的可行域为有界域。目标函数 $z=x_1+3x_2$ 在点 A_3 处取得最大值，求解方程组 $\begin{cases}5x_1+10x_2=50\\ x_2=4\end{cases}$ 可得 A_3 的坐标为(2，4)，所以 $X^*=(2,\ 4)^T$，$z^*=14$，该线性规划问题具有惟一最优解。

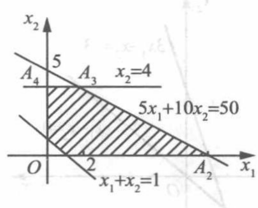

图 1-1

(2)

$$\min z=x_1+1.5x_2$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：如图 1-2 所示，该线性规划问题的可行域无界。目标函数 $z=x_1+1.5x_2$ 在点 A 处取得最小值，求解方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2=3\\ x_1+x_2=2\end{cases}$ 得 A 点的坐标为(3/2，1/2)，所以 $X^*=(3/2,\ 1/2)$，$z^*=9/4$，该问题具有惟一最优解。

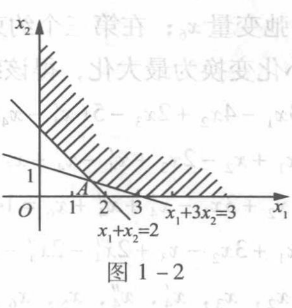

图 1-2

(3)
$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：如图 1 - 3 所示，该问题的可行域无界。目标函数可以增加到无穷大，因此该问题无最优解或称为无界解。

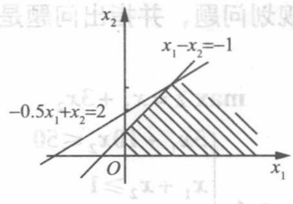

图 1 - 3

(4)
$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant -3 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：如图 1 - 4 所示，该问题的可行域为空集，因此该线性规划无可行解。

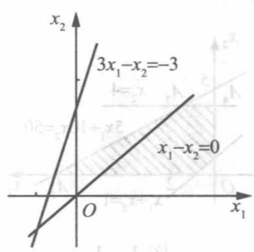

图 1 - 4

1.2　将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

(1)
$$\min z = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$s.t.\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解：令 $x_4 = x_4' - x_4''$，且 x_4'，$x_4'' \geqslant 0$；在第一个约束条件两边同时乘以 -1 后引入人工变量 x_5，在第二个约束条件右端加上松弛变量 x_6；在第三个约束条件右端减去剩余变量 x_7，同时加入人工变量 x_8，将目标函数最小化变换为最大化，得该线性规划的标准型

$$\max z' = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5(x_4' - x_4'') - Mx_5 - Mx_8$$
$$s.t.\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4' - x_4'' + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4' + x_4'' + x_6 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4' - 2x_4'' - x_7 + x_8 = 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4',\ x_4'',\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，M 为充分大的正数，对应的初始单纯形表如表 1－1 所示。

表 1－1

$c_j \to$			3	-4	2	-5	5	$-M$	0	0	$-M$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4'	x_4''	x_5	x_6	x_7	x_8
$-M$	x_5	2	-4	1	-2	1	-1	1	0	0	0
0	x_6	14	1	1	3	-1	1	0	1	0	0
$-M$	x_8	2	-2	3	-1	2	-2	0	0	-1	1
σ_j			$-6M+3$	$4M-4$	$-3M+2$	$3M-5$	$-3M+5$	0	0	$-M$	0

(2)
$$\max s = z_k / p_k$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} z_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}x_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} -x_{ik} = -1, \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ x_{ik} \geqslant 0, \quad (i=1,2,\cdots,n; k=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

解：在上述约束条件两边同时乘以 -1，然后分别引入人工变量 x_1，x_2，…，x_n，得该线性规划的标准型

$$\max s = \frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_{ik} - Mx_1 - Mx_2 - \cdots - Mx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_i + \sum\limits_{k=1}^{m} x_{ik} = 1 \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ x_{ik} \geqslant 0, x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n; k=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

其中，M 为充分大的正数。对应的初始单纯形表如表 1－2 所示。

表 1－2

$c_j \to$			$-M$	$-M$	$\cdots$	$-M$	a_{11}/p_k	$\cdots$	a_{1m}/p_k	$\cdots$	a_{n1}/p_k	$\cdots$	$a_{n,m}/p_k$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{11}	$\cdots$	x_{1m}	$\cdots$	x_{n1}	$\cdots$	$x_{n,m}$
$-M$	x_1	1	1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$-M$	x_2	1	0	1		0	0		0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				
$-M$	x_n	1	0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
σ_j			nM	0	$\cdots$	0	a_{11}/p_k+M	$\cdots$	a_{1m}/p_k+M	$\cdots$	a_{n1}/p_k+M	$\cdots$	$a_{n,m}/p_k+M$

1.3　在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基解。指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

(1)
$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：在第二个约束条件两边同时乘以 -1，得到该线性规划问题的系数矩阵

$$A = (P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

① 因为 P_1、P_2 线性无关，故有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4\\-x_1+2x_2=3+6x_3-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3=x_4=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=2$，故有基可行解 $X^{(1)}=(1,2,0,0)^T$，$z_1=8$。

② 因为 P_1、P_3 线性无关，故有

$$\begin{cases}2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4\\-x_1-6x_3=3-2x_2-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_4=0$，解得 $x_1=\frac{45}{13}$，$x_3=-\frac{14}{13}$，故 $X^{(2)}=\left(\frac{45}{13},0,-\frac{14}{13},0\right)^T$ 不是可行解。

③ 因为 P_1、P_4 线性无关，故有

$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8-3x_2+x_3\\-x_1+7x_4=3-2x_2+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_2=x_3=0$，解得 $x_1=\frac{34}{5}$，$x_4=\frac{7}{5}$，故有基可行解 $X^{(3)}=\left(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5}\right)^T$，$z_3=\frac{117}{5}$。

④ 因为 P_2、P_3 线性无关，故有

$$\begin{cases}3x_2-x_3=8-2x_1+4x_4\\2x_2-6x_3=3+x_1-7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_4=0$，解得 $x_2=\frac{45}{16}$，$x_3=\frac{7}{16}$，故有基可行解 $X^{(4)}=\left(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0\right)^T$，$z_4=\frac{163}{16}$。

⑤ 因 P_2、P_4 线性无关，故有

$$\begin{cases}3x_2-4x_4=8-2x_1+x_3\\2x_2+7x_4=3+x_1+6x_3\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_3=0$，解得 $X^{(5)}=\left(0,\frac{68}{29},0,-\frac{7}{29}\right)^T$ 不是可行解。

⑥ 因 P_3、P_4 线性无关，故有

$$\begin{cases}-x_3-4x_4=8-2x_1-3x_2\\-6x_3+7x_4=3+x_1-2x_2\end{cases}$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，解得 $X^{(6)}=\left(0,0,-\frac{68}{31},-\frac{45}{31}\right)^T$ 不是可行解。

在 z_1，z_2，z_3 中，z_3 为最大值，所以最优解 $X^*=X^{(3)}=\left(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5}\right)^T$，$z^*=z_3=\frac{117}{5}$。

(2)
$$\max z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：其系数矩阵为
$$A = (P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

① 因为 P_1、P_2 线性无关，故有
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 - 3x_3 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_3 = x_4 = 0$，解得 $X^{(1)} = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{11}{3},\ 0,\ 0\right)^T$ 不是可行解。

② 因为 P_1、P_3 线性无关，故有
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 3 - x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2 = x_4 = 0$，解得 $X^{(2)} = \left(\frac{2}{5},\ 0,\ \frac{11}{5},\ 0\right)^T$ 为基可行解，$z_2 = \frac{43}{5}$。

③ 因为 P_1、P_4 线性无关，故有
$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 7 - 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_4 = 3 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

令非基变量 $x_2 = x_3 = 0$，解得 $X^{(3)} = \left(-\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{11}{6}\right)^T$ 不是可行解。

④ 因为 P_2、P_3 线性无关，故有
$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ x_2 + x_3 = 3 - 2x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1 = x_4 = 0$，解得 $X^{(4)} = (0,\ 2,\ 1,\ 0)^T$ 为基可行解，$z_4 = -1$。

⑤ 因为 P_3、P_4 线性无关，故有
$$\begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

令非基变量 $x_1 = x_2 = 0$，解得 $X^{(4)} = (0,\ 0,\ 1,\ 1)^T$ 为基可行解，$z_5 = -3$。

⑥ 因为 P_2、P_4 线性相关，故 x_2，x_4 不能构成基变量。

在 z_2，z_4，z_5 中，z_2 为最大值，所以最优解 $X^* = X^{(2)} = \left(\frac{2}{5},\ 0,\ \frac{11}{5},\ 0\right)^T$，$z^* = z_2 = \frac{43}{5}$。

1.4 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图形上哪一个顶点。

(1)
$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：①图解法

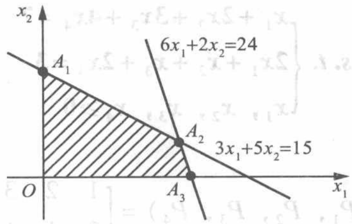

图 1－5

该线性规划问题的可行域如图 1－5 所示。由图可知该线性规划的惟一最优解为 $X^*=(15/4,\ 3/4)^T$，对应于图上的点 A_2，其最优目标函数值 $z^*=33/4$。

②单纯形法

引入松弛变量 x_3，$x_4\geqslant 0$，得该线性规划问题的标准型

$$\max z=2x_1+x_2$$

$$s.t.\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3=15\\6x_1+2x_2+x_4=24\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法逐步迭代，求解过程如表 1－3 所示。

表 1－3

$c_j\rightarrow$			2	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	24	[6]	2	0	1	4
	σ_j		2	1	0	0	
0	x_3	3	0	[4]	1	－1/2	3/4
2	x_1	4	1	1/3	0	1/6	12
	σ_j		0	1/3	0	－1/3	
1	x_2	3/4	0	1	1/4	－1/8	
2	x_1	15/4	1	0	－1/12	5/24	
	σ_j		0	0	－1/12	－7/24	

故问题的最优解 $X^*=(15/4,\ 3/4,\ 0,\ 0)^T$，最优目标函数值 $z^*=33/4$。

单纯形表第一步迭代得 $X^{(0)}=(0,\ 0,\ 15,\ 24)^T$，对应于图 1－5 中的的坐标原点；

单纯形表第二步迭代得 $X^{(1)}=(4,\ 0,\ 3,\ 0)^T$，对应于图 1－5 中的点 $A_3(4,\ 0)$；

单纯形表第三步迭代得 $X^{(2)}=(15/4,\ 3/4,\ 0,\ 0)^T$，对应于图 1－5 中的点 $A_2(15/4,\ 3/4)$。

（2）

$$\max z=2x_1+5x_2$$

$$s.t.\begin{cases}x_1\leqslant 4\\2x_2\leqslant 12\\3x_1+2x_2\leqslant 18\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$