数学一题多解

SHU XUE YI TI DUO JIE

重庆市中区教师进修学校编

一九七九年七月

数学一题多解

重庆市中区教师进修学校

說　明

为了启发学生思维，培养学生的解题能力，我们编印了《数学一题多解》。有些题目在解法上，省略了一些步骤，学生解题时应按步骤详细写出。由于我们水平有限，此材料仅供学生课外参考，错误之处，敬请读者批评指正。

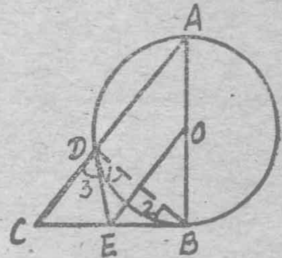
重庆市中区教师进修学校数学教研组

（冯霖生老师执笔）

数　学

一　题　多　解

1．已知△ABC是直角△，∠ABC=90°，以AB 为直径作元，交AC于D，从D引元O的切线交CB于E，求证OE∥AC，



证法一：考虑OE是否为△BAC的中位线　∵ED，EB均是切线

∴ED=EB，∠1=∠2　但

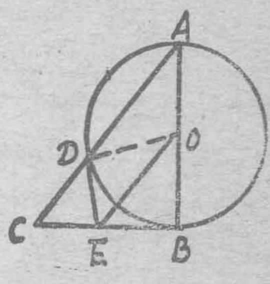
∠BDC=90°

∴∠C=∠3　ED=EC

∴EB=EC 而OB=OA

∴OE∥AC。

证法二：考虑同位角是否相等



易证∠BOE=∠EOD=$\frac{1}{2}$∠BOD

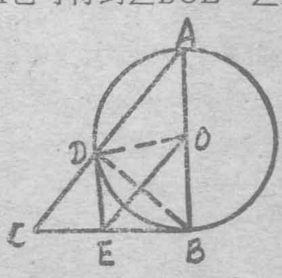
而∠BOE及∠A的度数均为$\overset{\frown}{DB}$度数的一半

∴∠BOE=∠A　∴OE∥AC。

若连接BD，则因O,D,E,B四点共元

∠BOE=∠BDE ∠BDE=∠A也可得到∠BOE=∠A

证法三：考虑OE，AC是否同垂直于一直线



∵∠BDA=90°　∴BD⊥AC

而OD=OB　ED=EB

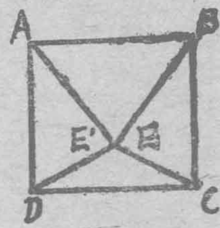
∴OE是DB的垂直平分线

BD⊥OE

∴OE∥AC

2．已知ABCD是正方形，∠CDE=∠ECD=15°，E在正方形内部。

求证：△EAB是正三角形，



证法一：用同一法，

以AB为边向内侧作等边△ABE'

则∠CBE'=∠DAE'=30°

又因BC=BE'，AD=AE'

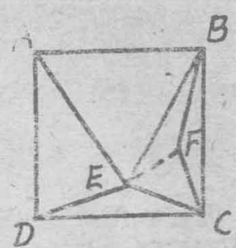
∴∠BCE'=75°　∠ADE'=75°

∴∠CDE'=15°　∠E'CD=15°

而两角夹边唯一确定△，∴E和E'重合

即△EAB是等边三角形

证法二：考虑将BE，BC放在两个△中，观察是否为两全等△的对应边。



作∠BCF=∠CBF=15°

则△BCF≅△DCE

∴CF=CE　又因∠FCE=60°

∴△CEF是等边△

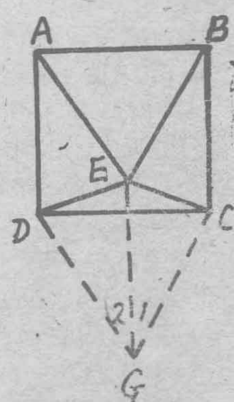
∵∠BFC=150°　∴∠BFE

=360°-150°-60°=150°

△BFE≅△BFC　∴BE=BC

同理AE=AD

∴△EAB是等边△



证法三：考虑∠CBE是否为30°。以CD为边向形外作等边△GCD

∵∠BCE=∠ECG=75°

易知△BCE≅GCE

∴∠CBE=∠CGE

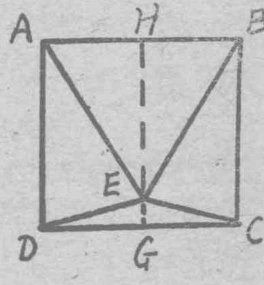
但 GE为DC的垂直平分线

$\therefore \angle 1=\angle 2=30°$　　$\angle CBE=30°$

$\therefore \angle ABE=60°$　　同理$\angle BAE=60°$

$\therefore \triangle EAB$为等边△

证法四：若△EAB为等边△，则AB边上的高应为$\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，考虑计算AB边上的高



过E作 HG⊥DC，并设正方形之边长为a

$\because ED=EC$,

$\therefore EG$是DC边的中垂线

$$EG=\frac{a}{2}tg15°=\frac{a}{2}tg(45°-30°)$$

$$=\frac{a}{2}\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$$

$\therefore EH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$　显然EH也是AB的中垂线

$\therefore AE^2=EH^2+AH^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=a^2$　$AE=a$

同理$BE=a$　　$\therefore \triangle EAB$是等边△

证法五：考虑用余弦定理计算EB，EA之长

设正方形之边长为a，则$CG=\frac{a}{2}$

$$\because \cos15°=\sqrt{\frac{1+\cos30°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\therefore EC=\frac{\frac{a}{2}}{\cos 15^\circ}=\frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$$

$$BE^2=BC^2+EC^2-2BC\cdot EC\cos 75^\circ$$

$$\therefore \cos 75^\circ=\sin 15^\circ=\sqrt{1-\cos^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

代入得$BE^2=a^2+(2-\sqrt{3})a^2-(2-\sqrt{3})a^2=a^2$

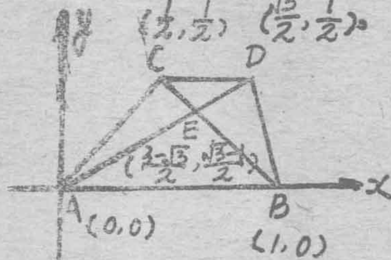
$\therefore BE=a$，同理$AE=a$

$\therefore \triangle ABE$是等边$\triangle$

3．已知$\triangle CAB$是等腰直角$\triangle$，$\angle ACB=90^\circ$，过C作AB的平行线，且取AD＝AB，AD与CB交于E，

求证$\triangle BDE$是等腰$\triangle$

证法一：考虑建立坐标系，定出各点的坐标，计算BD及BE的长。



在直角坐标系中，以A为原点，B的坐标为(1,0)

C的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

则D 的坐标为$\left(b,\frac{1}{2}\right)$

$\because AB=AD\quad \therefore b^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$

$\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}$即D 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

AD的方程为$y=\sqrt{3}x$，CB的方程为$y=1-x$

解得 $x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

即E 的坐标为 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

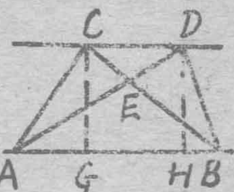
用距离公式知$BD^2=\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=2-\sqrt{3}$

$$BE^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=2-\sqrt{3}$$

$\therefore BD=BE$　　即$\triangle BDE$是等腰$\triangle$

证法二：因$\triangle ABD$是等腰$\triangle$，考虑求$\angle BAD$的度数

作$CG\perp AB$，$DH\perp AB$



易见$DH=CG=\frac{1}{2}AB$

而$AD=AB$

$\therefore DH=\frac{1}{2}AD$ $\therefore \angle BAD=30°$

$\therefore \angle BDA=\angle DBA=75°$

但$\angle CBA=45°$　$\therefore \angle DBE=30°$

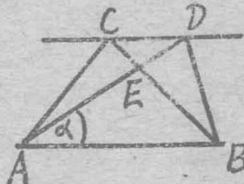
$\therefore \angle DEB=180°-75°-30°=75°$　即$\angle BDE=\angle DEB$

$\therefore BD=BE$

证法三：由边角关系考虑用正弦定理求$\angle BAD$的度数

令$\angle BAD=\alpha$　在$\triangle ACD$中

用正弦定理



$$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle CDA}$$

而$\angle ACD=135°$　$\angle CDA=\alpha$

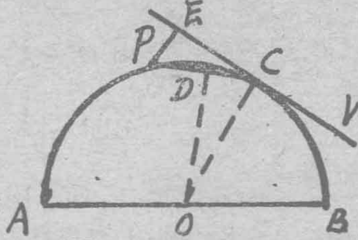
$$\frac{\sin\angle ACD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=30°$　　下略

4．直线L与以AB为直径的半元相切于C，P为半元上任 意点，$PE\perp L$，E是垂足，

求证：$PC^2=PE\cdot AB$



证法一：考虑先证$\frac{1}{2}PC\cdot PC$

$=PE\cdot OC$

作$OD\perp PC$则$DC=\frac{1}{2}PC$

易知$\angle COD=\angle PCE$

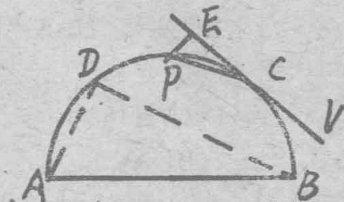
而$\angle PEC=\angle ODC$

$\therefore \triangle PEC\backsim\triangle ODC$

$\therefore PE:CD=PC:OC$　　$PE:PC=PC:AB$

$\therefore PC^2=PE\cdot AB$

证法二：考虑将PC移动位置



$\because \overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{PC}$取$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{PC}$

则$AD=PC$

$\because \angle ADB=\angle PEC=90^\circ$

$\angle ECP=\angle ABD$

$\therefore \triangle ECP\backsim\triangle ABD$　$\therefore PE:PC=AD:AB$

即$PE:PC=PC:AB$　$\therefore PC^2=PE\cdot AB$，

证法三：因$\frac{PE}{PC}=\sin\angle PCE$考虑$\frac{PC}{AB}$是否也等于$\sin\angle PCE$

从图一中知$DC=OC\cos\angle OCD$

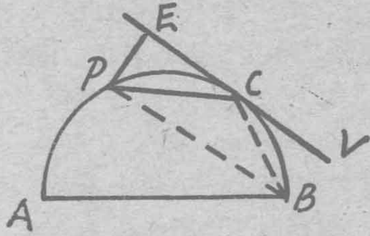
$\therefore PC=2OC\cos\angle OCD$

即$PC=AB\sin(90^\circ-\angle OCD)=AB\sin\angle PCE$

$\therefore \frac{PC}{AB}=\sin\angle PCE$　但$\frac{PE}{PC}=\sin\angle PCE$

$\therefore \frac{PE}{PC}=\frac{PC}{AB}$　　$\therefore PC^2=PE\cdot AB$

证法四：考虑用正弦定理



$\frac{a}{\sin A}=d$(外接元直径)

在△PCB中$\frac{PC}{\sin\angle PBC}$

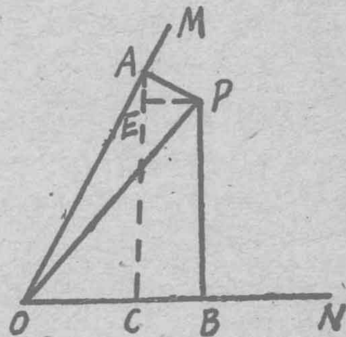
$=AB$

但$\angle PBC=\angle PCE$

$\therefore \frac{PC}{AB}=\sin\angle PBC=\sin\angle PCE$但$\frac{PE}{PC}=\sin\angle PCE$

$\therefore PC^2=PE\cdot AB$

5．已知$\angle MON=60°$，$\angle MON$内有一点P到OM边之距离为2，到ON边之距离为11，求OP长。



证法一：用代数知识，

作AC⊥ON，PE⊥AC

令OA＝x则因$\angle OAC$

$=30°$　$\therefore OC=\frac{1}{2}x$

$\because \angle EAP=60°$

$\therefore BC=PE=\sqrt{3}$

$OP^2=x^2+2^2$　$OP^2=\left(\frac{x}{2}+\sqrt{3}\right)^2+11^2$

$\therefore x^2+4=\left(\frac{x}{2}+\sqrt{3}\right)^2+121$

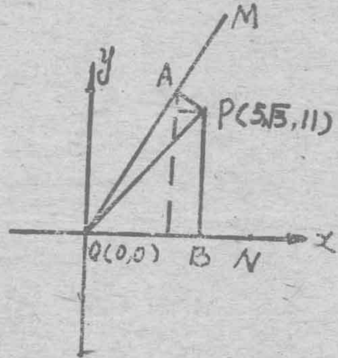
化简得$3x^2-4\sqrt{3}x-480=0$

$x=\frac{4\sqrt{3}\pm 44\sqrt{3}}{6}$　取正值$x=8\sqrt{3}$

$OP^2=x^2+2^2=196$　　$\therefore OP=14$

证法二：定出各点坐标，用距离公式求OP，

以O为原点，ON方向为x轴正向，建立直角坐标系，则O点坐标为(o，o)，B点坐标为(a，o) P点坐标为(a,11)A点坐标为$(a-\sqrt{3},12)$(参阅证法一)



由$OP^2=OA^2+PA^2$

$\because OA^2=(a-\sqrt{3})^2+12^2$　　$PA^2=2^2$

$\therefore OP^2=a^2-2\sqrt{3}a+151$

又$OP^2=OB^2+PB^2=a^2+11^2$

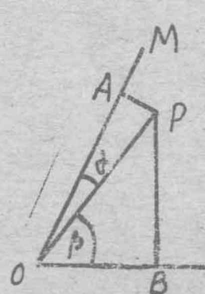
$\therefore a^2-2\sqrt{3}a+151=a^2+121$，$2\sqrt{3}a=30$

$a=5\sqrt{3}$ $\therefore$P点坐标为$(5\sqrt{3}, 11)$

$\therefore OP^2=(5\sqrt{3})^2+11^2=196$　　$\therefore OP=14$

证法三：用三角知识

令$\angle AOP=\alpha$，$\angle POB=\beta$



则$\sin\alpha=\frac{PA}{OP}=\frac{2}{OP}$

$\sin\beta=\frac{PB}{OP}=\frac{11}{OP}$

$\therefore \sin\alpha=\frac{2}{11}\sin\beta$

但$\alpha+\beta=60°$　$\therefore \sin\alpha=\frac{2}{11}\sin(60°-\alpha)$

即$\sin\alpha=\frac{2}{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{11}\cos\alpha-\frac{1}{11}\sin\alpha$

化简得$12\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$

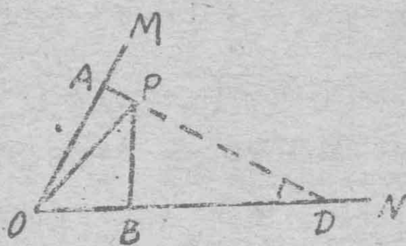
$144\sin^2\alpha=3\cos^2\alpha=3-3\sin^2\alpha$

$147\sin^2\alpha=3$　　$\sin\alpha=\pm\frac{1}{7}$

$\because \alpha$是锐角　　$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{7}$

$\therefore OP=\frac{2}{\sin\alpha}=14$

证法四：用平面几何知识。



延长AP与ON交于D。

则$\angle ODA=30°$，$PD=2PB=22$

$\therefore AD=AP+PD=24$　　$\therefore OA=\frac{24}{\sqrt{3}}$

而$OP^2=OA^2+AP^2$

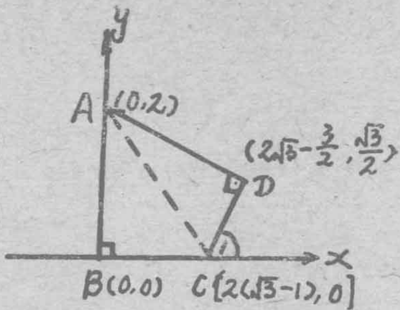
$=\frac{576}{3}+4=196$

$\therefore OP=14$

6．已知元内接四边形ABCD中，$\angle A=60°$，$\angle B=90°$ $AB=2$，$CD=1$，求BC和DA。

证法一：考虑定出各点坐标

以B点为原点，BC，BA方向分别为x轴，y轴之正向，则



B点坐标为(o,o)，

C点坐标为(a,o)，

A点坐标为(o,2)，

由于$\angle 1=60^\circ$，

故D点坐标为$\left(a+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\because AC^2=AB^2+BC^2=2^2+a^2$

$AC^2=AD^2+DC^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)^2+1$

$\therefore 2^2+a^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)^2+1$

解得$a=2(\sqrt{3}-1)$即C点坐标为$(2\sqrt{3}-2,\ O)$

D点坐标为$\left(2\sqrt{3}-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore BC=2\sqrt{3}-1)$

而$DA^2=\left(2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=19-8\sqrt{3}$

$=(4-\sqrt{3})^2$

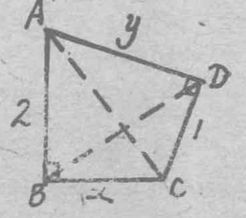
$\therefore DA=4-\sqrt{3}$

证法二：考虑用余弦定理，

设$BC=x$，$DA=y$

则$AC^2=x^2+4=y^2+1$

$\therefore x=\sqrt{y^2-3}$ ①



而在△ABD中$BD^2=y^2+4-2y$

在△CBD中$BD^2=x^2+1+x$

$\therefore y^2+4-2y=x^2+1+x$得$x=6-2y$ ②

①②联解得$y^2-3=36-24y+4y^2$

$3y^2-24y+39=0 \quad y^2-8y+13=0$

$y=4\pm\sqrt{3}$

若$y=4+\sqrt{3}$ 则$x=6-2y$为负值，不合题意

故取$y=4-\sqrt{3}$ 而$x=2\sqrt{3}-2$

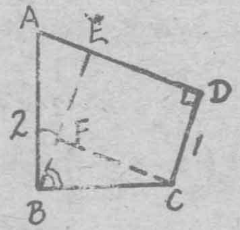
$\therefore BC=2(\sqrt{3}-1)$，$DA=4-\sqrt{3}$

证法三：考虑用30°所对直角边等于斜边之半的知识

作BE⊥AD，CF⊥BE

将 ABCD 分割成直角△ABE，

△CBF及矩形CDEF



则因$\angle ABE=30°$，$\therefore AE=\frac{AB}{2}=1$，

$BE=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

而$BF=BE-EF=BE-CD=\sqrt{3}-1$

又因$\angle CBF=60°$，$\therefore BC=2BF=2(\sqrt{3}-1)$

而$CF=BF\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{3}=3-\sqrt{3}$

$\therefore DA=DE+EA=CF+EA=3-\sqrt{3}+1=4-\sqrt{3}$

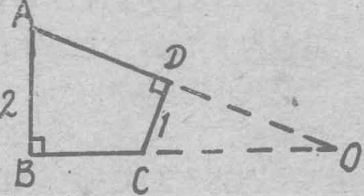
证法四：上述证法的简化

延长AD，BC 交于O，

则$\angle O=30°$

$\therefore OA=2AB=4$

而$OB=2\sqrt{3}$



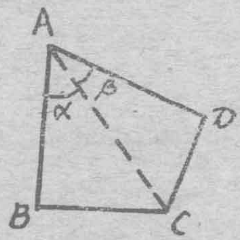
但在直角△ODC中，可知

$OC=2CD=2$，$OD=CD\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\therefore BC=OB-OC=2(\sqrt{3}-1)$

$DA=OA-OD=4-\sqrt{3}$

证法五：用三角知识



$\because AC=\dfrac{AB}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$，

$AC=\dfrac{CD}{\sin\beta}=\dfrac{1}{\sin\beta}$

$\therefore \cos\alpha=2\sin\beta$

但$\alpha+\beta=60°$

$\therefore \cos\alpha=\cos(60°-\beta)$

即$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta=2\sin\beta$

$\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\beta=\dfrac{1}{2}\cos\beta$，　$(4-\sqrt{3})\sin\beta=\cos\beta$

$\therefore \operatorname{ctg}\beta=4-\sqrt{3}$，　但 $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{DA}{CD}$，$\therefore DA=4-\sqrt{3}$

而$BC^2=AC^2-AB^2=DA^2+CD^2-AB^2$

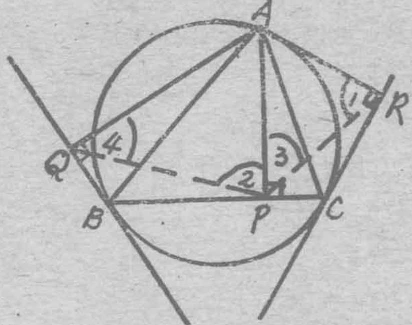
$=(4-\sqrt{3})^2+1-4$

$BC^2=16-8\sqrt{3}$，　$BC=\sqrt{16-8\sqrt{3}}=2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$BC=2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=2|\sqrt{3}-1|=2(\sqrt{3}-1)$

7．从内接于元的△ABC的顶点A，向底边BC及过 B、C 的二切线作垂线AP，AQ，AR，则AP为AQ与 AR 的比例中项。

证法一：考虑△APQ与△APR 能否相似。



连PQ,PR,

因APCR，APBQ均为元内接四边形。

$\therefore \angle 1 = \angle ACP, \angle 2 = \angle ABQ$

.但$\angle ACP = \angle ABQ$，$\therefore \angle 1 = 2$，

仿此可证$\angle 3 = \angle 4$，$\therefore \triangle APQ \backsim \triangle APR$

$\therefore AQ:AP = AP:AR$

即AP为AQ与AR的比例中项

证法二：用三角知识

$\because AP = AB\sin\angle ABP$，$AP = AC\sin\angle ACP$

$AQ = AB\sin\angle ABQ = AB\sin\angle ACP$

$AR = AC\sin\angle ACR = AC\sin\angle ABP$

$\therefore AP^2 = AQ \cdot AR$

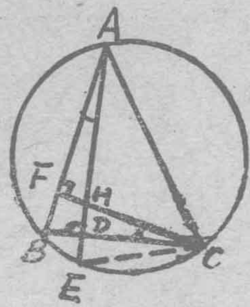
8．$\triangle ABC$中$\angle A = 45°$，垂线AD将BC分为2cm，3cm，求△面积。

解法一：考虑用△全等，先求出AH及AD。

延长AD与外接元交于E引垂线CF交AD于H，

则$\angle ACF = 45°$　　$\therefore FC = FA$

又$\angle FAD = \angle BCF$



$\therefore Rt\triangle AFH \cong Rt\triangle BCF$

$\therefore AH = BC = 2(cm) + 3(cm)$

$= 5(cm)$

$\because \angle E = \angle B = \angle CHD$

易知$Rt\triangle CDH \cong Rt\triangle CDE$

$\therefore HD = DE$　设$HD = x$

则$AD = x + 5$,

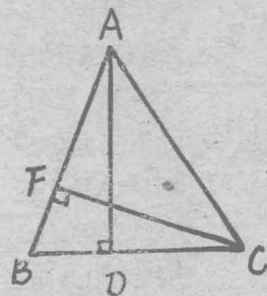
但$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$\therefore (x+5)x = 6$　　$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(x+6)(x-1) = 0 \therefore x = 1\,(cm) \therefore AD = 6\,(cm)$

$\therefore \triangle ABC$面 积$= \frac{1}{2} \times 6 \times (2+3) = 15(cm^2)$

解法二：考虑藉相似△求出AD



设$AD = x$从$\triangle ADB \backsim \triangle BFC$

则$\frac{x}{CF} = \frac{AB}{BC}$，即$CF \cdot AB = BC \cdot x$

而$CF = AC\sin 45$。

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2 + 3^2}$

$AB = \sqrt{x^2 + 2^2}$

代入得$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4} = 5x$

两边平方，化简得$x^4 - 37x^2 + 36 = 0$　$x = \pm 1$，或$x = \pm 6$

因$x = AD$为正值，且$\angle BAD < 45°$　$\therefore \angle B > \angle BAD$，

$AD > BD = 2$，$\therefore x = 6$

$\therefore \triangle ABC$面积$= \frac{6 \cdot 5}{2} = 15(cm^2)$