

空 间 结 构 系 列 丛 书

固体和结构 分析理论及有限元法

钱若军 袁行飞 林智斌

THE ANALYSIS THEORY AND FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLID AND STRUCTURE



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

空间结构系列丛书

固体和结构分析理论 及有限元法

The Analysis Theory and Finite Element Method For Solid and Structure

钱若军 袁行飞 林智斌

东南大学出版社

Southeast University Press

内 容 提 要

作者用新的构思阐述固体和结构分析的有限单元法,概念清晰简单。全书分为五部分。第一部分是1~7章,主要涉及连续介质力学和塑性理论基础以及应用基础,详尽讨论了简单应力状态和复杂应力状态中固体和结构构件的变形关系和物理关系;第二部分是8~9章,简单地讨论有限元的数学基础和物理基础,然后阐述有限单元法的一般过程和方法;第三部分是10~13章,具体地讨论了固体和结构中常用的单元和分析空间及平面问题、板壳、空间杆、空间梁的方法;第四部分是14~15章,讨论自锁和有限单元法的实施;第五部分是16~21章,讨论结构的几何非线性分析、弹塑性分析、动力分析和固体与结构中的几何位移分析等以及有关的算法,此外还涉及一些特殊的问题,如接触与摩擦及随动有限元法。

本书可供结构、桥梁、水工、海工、航天航空、车辆和人体结构等工程技术人员、设计人员、研究人员和大学研究生参考,也可作为大学本科和研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

固体和结构分析理论及有限元法/钱若军,袁行飞,
林智斌编著. —南京:东南大学出版社,2013.1
(空间结构系列丛书)

ISBN 978-7-5641-3692-5

I. ①固… II. ①钱… ②袁… ③林… III. ①建筑结
构-结构分析-有限元分析 IV. ①TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 188751 号

固体和结构分析理论及有限元法

出版发行:东南大学出版社

出 版 人:江建中

社 址:江苏省南京市四牌楼 2 号(210096)

经 销:全国各地新华书店

网 址:<http://www.seupress.com>

邮 箱:press@seupress.com

印 刷:南京京新印刷厂印刷

版 次:2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

开 本:787mm×1 092mm 1/16

印 张:42

字 数:1075 千

书 号:ISBN 978-7-5641-3692-5

定 价:148.00 元

(若有印装质量问题,请与营销部联系。电话 025-83791830)

前 言

有限元法的创始工作主要是由 John Argyris、Ray Clough 以及 O Zienkiewicz 等教授进行的。1960 年, Clough 在 ASCE 一篇有关二维应力问题中第一次提出有限单元法概念。

有限单元法从提出到完善已有六十多年历史, 在这期间美、英及其他国家学者如 J. T. Oden、卞学镛、K. Bathe、Crisfield、Wilson、Ramm 和 Kleiber 等对有限元理论和实施、对有限元法的数学基础和物理基础进行了研究并且取得了卓著成果。国内许多学者和专家也作出了很大贡献。早在 1964 年, 冯康教授就独立地进行了有限单元法的研究。有限单元法成功地应用于各种复杂结构的分析, 现在已用于微观问题、超大规模问题、大转动-大变形问题、弹塑性开裂等问题的分析。

由于有限单元法明显的优点, 显出了经典理论和方法的局限。但是传统的有限单元法主要是作为经典问题的数值方法, 许多著作中所给出的也多是经典问题的有限元解, 即经典问题控制微分方程的积分解。然而, 如经典梁、板、壳的微分方程在很多假定下才能建立, 因此有限元法也因经典理论的局限性而局限。

有限元基本方程可以根据变分原理和能量原理等基本原理解得, 但是至今一些有限元法的基本方程依然带有上述局限性。事实上固体和结构的应力状态十分复杂, 梁、板、壳的应力状态也不是如经典理论中所作的假定那么简单, 所以按照传统的有限单元法分析复杂结构时将产生误差是不言而喻的。

有限单元法应该作为一种固体和结构分析的方法而不仅仅是数值方法, 作者在本书中根据固体和结构的变形规律, 部分放弃和修正常用的基本假定, 根据连续介质的力学理论建立固体和结构的几何变形关系; 根据塑性理论建立固体和结构材料的本构关系。采用能量原理建立固体和结构的有限元基本方程, 并且给出相应的单元刚度矩阵。在刚度矩阵中反映出拉压、弯剪和扭的耦合效应, 使获得的解更为精确, 更接近实际的应力状态。在本书中作者提出的根据变形理论建立有限元基本方程, 可以精确地分析固体和结构, 构思清晰, 概念简单。这是与传统的有限单元法不同之处。

O. C. Zienkiewicz、K. Bathe、J. T. Oden、Crisfield 等及国内学者出版并再版了许多有限元法的专著, 这些专著各具特点。Zienkiewicz 的专著全面系统地介绍了有限单元法的理论和方法, 可谓博大; Bathe 的专著则非常系统地讨论了求解理论和技术, 可谓精深; Oden 的专著则侧重于非线性理论; 而 Crisfield 的专著在总结大量文献资料的基础上具体深入地讨论固体和结构的有限元分析方法和过程。这些专著所涉及的理论和方法是在一个相当长的科学发展阶段中经久不衰的经典, 因此在本书中将予以介绍和引述。出于对知识的系统性和完整性的考虑, 本书的内容组织和安排注意到对知识结构的构筑和方法的介绍, 并且顺应推理规律。全书分为五部分。第一部分主要涉及连续介质力学和塑性基础及高等塑性理论基础、应用基础, 详尽讨论了简单应力状态和复杂应力状态中固体和结构构件的变形关系和物理关系; 第二部分首先简单地讨论有限元的数学基础和物理基础, 然后阐述有限单元法的一般过程和方法; 第三部分具体地讨论了固体和结构中常用的单元和分析空间及平面问题、板壳、空间杆及空间梁的方法; 第四部分讨论自锁和有限单元法的实施和方程的求解技术及快速有限元 (FFE); 第五

部分讨论结构的几何非线性分析、弹塑性分析、动力分析和固体与结构中的几何位移分析等以及有关的算法,此外还涉及一些特殊的问题,如接触与摩擦及随动有限元法。

但是,本书仅限于结构分析所需要的基本知识,更为系统详尽的内容可参照有关专著。因为即使作为基础理论,连续介质力学和塑性理论也已经有相当大的进展。有限元理论已经在数学上得到了充分的证明,这里仅一般性地讨论有限元方程的建立;同样对这些很特殊的问题,读者可以从专门的著作中得到更广更深的理论。本书从理论基础到方程的建立和求解合成为一体,但是理论和方法的关系明确。对于每一类应用均可找到其理论支撑,也可了解问题求解的梗概。

本书涉及的内容中,作者比较侧重于提取具有一般性的规律。对于在有限元发展过程中所涉及的其他问题,如自适应有限元、网格技术、求解器等也未涉及,因为作为有限单元法的系统知识,这些都应作专门的讨论,并且随着所求解问题日趋复杂和精细以及规模越来越大,相应的理论和方法都在不断地推进。

本书在内容上紧紧扣住非线性环节。固体和结构的非线性具体反映在非线性的控制方程上,也即控制方程中的未知数含有二阶以上的高阶量,而任何线性化都是一种近似。所以从非线性着手可以更清晰地知道结构性状,线性化只是一种按假定条件作的简化,当然只要有道理就是可以简化的。所以本书并没有像一般描述的那样从线性进入非线性,而是从非线性有条件地蜕化为线性。

本书是连续介质力学有限元法的一部分,涉及的介质是固体,而流体力学有限元法将另行撰文。连续介质力学有限元法用于问题的宏观分析,而很多问题的微观分析将借助量子力学有限元法。

本书可供结构、桥梁、水工、海工、航天航空、车辆和人体结构等工程技术人员、设计人员、研究人员和大学研究生参考,也可作为大学本科和研究生的教学参考书。

对于刚接触有限单元法的读者,如果对基础理论有一定了解,可以直接从第9章开始阅读。第9章给出了有限元的一般过程,而以后的固体或结构有限元只是重复这个过程。更简单的阅读可以跳过这些章节中的非线性部分,在熟悉有限元以后可以从第5章、第6章中找回本书中所介绍的有限元方程建立的依据,更进一步的基础知识可以从第1章到第7章中获得。

许多研究生做了大量的工作和参与了程序系统 AADS 的调试,对本书作了很多贡献。本书在撰写过程中还得到了同仁和同学的大量帮助,在此谨表谢忱。由于作者的水平有限,谬误之处在所难免,敬请读者批评指正。

钱若军 袁行飞 林智斌

2011年春于上海枝经堂

目 录

前 言	1	2.5 应变	20
引 言	1	2.5.1 应变的定义	20
1 应力状态	2	2.5.2 线元的几何	21
1.1 应力张量及其不变量	2	2.5.3 工程应变	22
1.1.1 应力张量	2	2.5.4 格林(Green)应变	23
1.1.2 应力张量不变量	3	2.5.5 阿尔芒斯(Almansi)应变	25
1.2 应力偏张量及其不变量	4	2.5.6 对数应变	26
1.2.1 应力偏张量	4	2.6 应变之间的关系	27
1.2.2 应力偏张量不变量	5	2.7 应变率	28
1.3 应力强度	6	2.7.1 物质导数和空间导数	28
1.4 应力空间	8	2.7.2 速度梯度张量	29
1.5 应力	9	3 物理关系	31
1.5.1 欧拉(Euler)应力	9	3.1 塑性基础	31
1.5.2 第一类 Piola-Kirchhoff 应力	10	3.1.1 概述	31
1.5.3 第二类 Piola-Kirchhoff 应力	10	3.1.1.1 塑性分析理论概况	31
1.6 应力客观率	11	3.1.1.2 塑性初步	31
2 应变状态	13	3.1.2 梁弯曲及回弹的概念	32
2.1 变形和应变的描述	13	3.1.2.1 一般等截面直梁的纯 弯曲及回弹	32
2.1.1 欧拉(Euler)和拉格朗日 (Lagrange)坐标	13	3.1.2.2 矩形截面梁的纯弯曲 及回弹	35
2.1.2 欧拉(Euler)和拉格朗日 (Lagrange)描述	14	3.1.3 屈服面	36
2.1.3 变形梯度	14	3.2 屈服条件	38
2.1.4 位移、位移梯度	15	3.2.1 屈服条件	38
2.1.5 应变的描述	15	3.2.2 各向同性材料的屈服 条件	38
2.2 应变张量及其不变量	16	3.2.2.1 特雷斯卡(Tresca)屈服 条件	39
2.2.1 应变张量	16	3.2.2.2 米赛斯(Mises)屈服 条件	39
2.2.2 应变张量不变量	17	3.2.2.3 米赛斯(Mises)和特雷斯 卡(Tresca)屈服条件	41
2.3 应变偏张量及其不变量	18	3.2.2.4 斯密特(Schmidt)屈服 条件	42
2.3.1 应变偏张量	18		
2.3.2 应变偏张量不变量	19		
2.4 应变强度	19		

3.2.3 其他各向同性材料的屈服条件	43	3.4.5 混合强化(硬化)理论	65
3.2.3.1 杜洛克-布朗哥(Drucker-Prager)屈服条件	43	3.5 应力-应变关系	67
3.2.3.2 莫尔-库仑(Mohr-Coulomb)屈服条件	43	3.5.1 弹性介质应力-应变的一般关系	67
3.2.3.3 更精确的屈服条件	44	3.5.1.1 单向应力与应变关系	67
3.2.4 正交各向异性材料的屈服条件	46	3.5.1.2 一般应力状态下弹性应力-应变模型(广义Hooke 定律)	68
3.2.5 后继屈服条件的基本概念	48	3.5.1.3 单向应力状态下塑性应力-应变模型	69
3.3 加载和卸载	48	3.5.2 形变理论-弹塑性全量应力应变关系	71
3.3.1 加载方式和加载准则	49	3.5.2.1 形变理论一般概念	71
3.3.2 加载准则	49	3.5.2.2 伊留申(Illyushin)理论	73
3.3.2.1 强化材料的加载准则	49	3.5.2.3 汉基(Hencky)的理论	77
3.3.2.2 理想弹塑性材料的加载准则	51	3.5.2.4 那达依(Nadai)理论	78
3.3.3 按普朗特-路埃斯(Prandtl-Reuss)流动法则的加载准则	51	3.5.3 流动理论-弹塑性增量应力应变关系	79
3.4 强化(硬化)理论	52	3.5.3.1 流动理论一般概念	79
3.4.1 强化(硬化)	52	3.5.3.2 加载过程中的做功	81
3.4.2 各向同性应变强化(硬化)理论	54	3.5.3.3 塑性势理论	82
3.4.2.1 各向同性应变强化(硬化)模型	54	3.5.3.4 应力与应变增量主轴方向重合判定	84
3.4.2.2 一维应力各向同性应变强化(硬化)	56	3.5.3.5 列维(Levy)-米赛斯(Mises)理论	84
3.4.2.3 二维应力各向同性应变强化(硬化)	56	3.5.3.6 普朗特(Prandtl)-路埃斯(Reuss)理论	86
3.4.2.4 各向同性加工硬化	58	3.5.3.7 强化材料增量应力-应变关系	87
3.4.2.5 三维应力状态各向同性应变强化(硬化)	59	3.5.3.8 Mises 条件下各向同性强化材料增量应力-应变关系	87
3.4.3 随动强化(硬化)理论	59	3.5.3.9 特雷斯卡屈服函数为塑性势的流动理论	92
3.4.3.1 随动强化(硬化)模型	59	3.5.4 正交各向异性材料的流动理论	92
3.4.3.2 一维应力随动强化(硬化)	60	3.5.5 流动理论与形变理论的关系	93
3.4.3.3 二维应力随动强化(硬化)	61		
3.4.4 动态强化(硬化)理论	62		

4 大变形、大转动和塑性	95	5.1.1 概述	124
4.1 大转动的基本概念	95	5.1.2 结构理论中的基本假定 ...	125
4.1.1 非线性向量大转动	95	5.1.2.1 小挠度及小应变假定 ...	125
4.1.2 转动矩阵 $\mathbf{R}$	95	5.1.2.2 理想次弹性材料假定 ...	125
4.1.2.1 小转动的转动矩阵	95	5.1.2.3 单向应力假定	126
4.1.2.2 大转动的转动矩阵	96	5.1.2.4 欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)假定	126
4.1.2.3 转动矩阵的指数形式	99	5.1.2.5 静力等效及圣维南(Saint-Venant)原理	126
4.1.2.4 转动矩阵的修正形式	99	5.1.2.6 叠加原理	127
4.1.2.5 转动矩阵的近似形式 ...	100	5.1.2.7 拉压、弯、剪和扭耦合作用及 $P-\Delta$ 效应	128
4.2 复合转动	100	5.2 处于三维应力状态的固体的几何关系	129
4.3 求虚拟速度向量和四元数	102	5.2.1 固体中任意一点的位移 ...	129
4.3.1 由转动矩阵 $\mathbf{R}$ 获得虚拟速度向量	102	5.2.2 固体中任意一点的应变 ...	130
4.3.2 四元数和欧拉参数	103	5.3 处于二维应力状态的固体的几何关系	132
4.3.3 由转动矩阵 $\mathbf{R}$ 获得四元数	104	5.3.1 二维应力状态的固体中任意一点位移	132
4.4 转动矩阵增量	104	5.3.2 二维应力状态的固体中任意一点应变	132
4.4.1 增加和非增加的转动矩阵增量	104	5.4 板-壳的几何关系	134
4.4.2 转动矩阵的导数	106	5.4.1 概论	134
4.5 三维体的旋转	107	5.4.1.1 板-壳及其应力状态	134
4.6 变形梯度乘法分解	108	5.4.1.2 板-壳的基本假定	135
4.6.1 变 α 形梯度 $\mathbf{F}\mathbf{F}_p$ 乘法分解 ...	108	5.4.2 板-壳的位移	135
4.6.2 传统焦曼率和基于 $\mathbf{F}_e\mathbf{F}_p$ 分解的解法	110	5.4.3 剪切变形的影响	137
4.7 大变形中全应变率和算法及极分解	112	5.4.3.1 考虑剪切变形影响的位移一般表达式	137
4.7.1 大变形中全应变率和 Hughes-Winget 算法	112	5.4.3.2 引入剪切位移	138
4.7.2 极分解(Polar Decomposition)	115	5.4.3.3 关于板中位移模式的讨论	139
4.8 中间和现时构形变形梯度乘法分解	119	5.4.4 板-壳中任意一点应变	140
4.8.1 基于中间构形运用 $\mathbf{F}_e\mathbf{F}_p$ 分解	119	5.4.4.1 板-壳中任意一点应变的一般表达式	140
4.8.2 基于现时构形的应力更新	122	5.4.4.2 板-壳中任意一点的线性应变	141
5 固体和结构的变形关系	124	5.4.4.3 板-壳中任意一点的非线性应变	141
5.1 概论	124		

5.4.4.4	关于板-壳中应变 讨论	144	5.6.3	空间梁-柱的位移	171
5.5	空间杆的几何关系	145	5.7	伯努利-欧拉(Bernoulli-Euler) 假定的修正	173
5.5.1	一维问题中任意一点 位移	145	5.7.1	梁截面纵向变形的分析 研究	174
5.5.2	直线空间杆中任意一点 应变	145	5.7.2	转角模型及位移修正	176
5.5.3	曲线元中任意一点应变	146	5.7.2.1	转角模型	176
5.5.3.1	两端不等高曲线元的 几何	146	5.7.2.2	位移修正	178
5.5.3.2	曲线元微元长度	148	5.8	基于修正的伯努利-欧拉 (Bernoulli-Euler)假定的梁- 柱位移	178
5.5.3.3	曲线元的应变	148	5.9	空间梁-柱的应变	179
5.5.4	空间杆中任意一点位移	149	5.9.1	空间梁-柱的正应变	179
5.5.5	空间杆中任意一点应变	149	5.9.1.1	空间梁-柱正应变的 线性部分	180
5.5.5.1	空间杆工程应变及 Green 应变表达式	149	5.9.1.2	空间梁-柱正应变的 非线性部分	181
5.5.5.2	空间杆 Almansi 应变及 对数应变表达式	150	5.9.2	空间梁-柱的剪切应变	184
5.6	空间梁-柱的变形	151	5.9.2.1	空间梁-柱弯曲剪切 应变的线性部分	184
5.6.1	经典梁理论	151	5.9.2.2	空间梁-柱扭转剪切 应变的线性部分	186
5.6.1.1	伯努利-欧拉(Bernoulli- Euler)梁理论	151	5.9.2.3	空间梁-柱弯曲剪切 应变的非线性部分	187
5.6.1.2	铁木辛柯(Timoshenko) 梁理论	151	6	固体和结构的物理关系	192
5.6.1.3	分析空间梁-柱的基本 假定	151	6.1	三维应力状态的物理关系	192
5.6.1.4	梁变形曲线的曲率及 相应的符号规定	152	6.1.1	三维应力状态的应力- 应变关系和弹性矩阵	192
5.6.2	空间梁-柱中任意一点 位移	153	6.1.2	三维应力状态的增量应力- 应变关系和弹塑性矩阵	192
5.6.2.1	轴向力作用下的位移	154	6.2	二维应力状态的物理关系	193
5.6.2.2	弯矩作用下的位移	154	6.2.1	二维应力状态的应力- 应变关系和弹性矩阵	193
5.6.2.3	剪力作用下的位移	155	6.2.1.1	二维应力状态的弹性 矩阵	193
5.6.2.4	轴向力的二阶效应产生 的位移	161	6.2.1.2	二维应力状态中正交异 性材料的弹性矩阵	194
5.6.2.5	薄壁杆件的基本理论	164	6.2.1.3	正交异性材料的弹性 矩阵	194
5.6.2.6	薄壁杆件的自由扭转 产生的位移	165			
5.6.2.7	薄壁杆件的约束扭转 产生的位移	167			

6.2.1.4 膜材的弹性矩阵	195	8.1.3.2 伽辽金(Galerkin)法 ...	214
6.2.2 二维应力状态的增量应力- 应变关系和弹塑性矩阵 ...	196	8.1.4 加权余量法	215
6.3 空间板壳的物理关系	197	8.1.5 标准伽辽金(Standard Galerkin,简称 SG)法	216
6.3.1 空间板壳的应力-应变 关系和弹性矩阵	197	8.1.6 时间离散问题	217
6.3.2 空间板壳的增量应力-应变 关系和弹塑性矩阵	198	8.2 有限单元法的物理基础——能量 原理	219
6.4 空间杆的物理关系	198	8.2.1 功和能	219
6.4.1 空间杆的应力-应变关系 和弹性矩阵	198	8.2.1.1 外力功和外力势能	219
6.4.2 空间杆的增量应力-应变 关系和弹塑性矩阵	199	8.2.1.2 内力功和内力势能	220
6.5 空间梁-柱的物理关系	199	8.2.2 虚位移状态	223
6.5.1 空间梁-柱的应力-应变 关系和弹性矩阵	199	8.2.2.1 虚位移	223
6.5.2 空间梁-柱的增量应力- 应变关系和弹塑性矩阵 ...	200	8.2.2.2 外力的虚功和虚势能 ...	224
6.5.3 空间梁-柱的材料加工硬化 特性参数 H' 的计算	202	8.2.2.3 内力的虚功和虚应 变能	225
7 接触和摩擦	203	8.2.2.4 位移变分方程	225
7.1 概论	203	8.2.3 虚功原理和最小总势能 原理	227
7.1.1 接触与摩擦的分类	203	8.2.4 位移变分法的解法—— 李兹法和伽辽金法	228
7.1.2 接触面积	204	8.2.5 虚应力状态、余功和余能 ...	230
7.2 接触和摩擦理论	205	8.2.6 最小总余能原理	232
7.2.1 古典和现代摩擦理论	205	8.3 有限元基本方程和单元刚度 矩阵	234
7.2.2 库仑(Coulomb)摩擦定律 和粘着理论	206	8.3.1 利用虚功原理推导有限元基 本方程和单元刚度矩阵 ...	234
7.2.3 影响摩擦的因素	208	8.3.2 利用总势能驻值(极值) 原理推导有限元基本方程 和单元刚度矩阵	235
8 有限单元法基础	210	8.3.3 利用卡斯提也诺定理推导 有限元基本方程和单元刚度 矩阵	236
8.1 有限单元法的数学基础—— 变分法	210	8.3.4 利用能量泛函变分原理推导 有限元基本方程和单元刚度 矩阵	237
8.1.1 变分法	210	8.4 位移协调元的变分原理	239
8.1.1.1 边值和初值问题	210	8.4.1 协调元的势能泛函及 变分	239
8.1.1.2 泛函和变分	211	8.4.2 协调元的平衡方程	240
8.1.2 边值问题的变分公式	211	8.5 拉格朗日(Lagrange)格式	241
8.1.3 近似变分法	213		
8.1.3.1 李兹(Ritz)法	213		

8.5.1	完全的拉格朗日(TL)	
	格式	241
8.5.2	更新的拉格朗日(UL)	
	格式	242
8.5.3	增量形式的 TL 和 UL	
	公式的比较	243
8.6	动力问题的有限元基本方程	243
8.6.1	利用达朗贝尔(D'Alembert)	
	原理建立运动方程	244
8.6.1.1	达朗贝尔原理和动力学	
	平衡微分方程	244
8.6.1.2	基于伽辽金法的有限元	
	动力方程	244
8.6.2	利用虚位移原理建立运动	
	方程	245
8.6.2.1	基本概念	245
8.6.2.2	基于虚位移原理的有限	
	元动力方程	245
8.6.3	利用哈密尔顿(Hamilton)	
	原理建立运动方程	246
8.6.3.1	基本概念	246
8.6.3.2	拉格朗日方程	246
9	固体和结构分析的有限单元法	248
9.1	有限单元法的建模	248
9.2	单元的形态和坐标系及变换	248
9.2.1	单元的形状和剖分	248
9.2.2	坐标系	250
9.2.3	固体和结构的整体坐标系	
	及向量定义	251
9.2.3.1	整体坐标系及向量定义	251
9.2.3.2	四面体单元的整体坐标	252
9.2.3.3	空间三角形平面单元的	
	整体坐标	253
9.2.3.4	空间线元的整体坐标	253
9.2.4	四面体单元的局部坐标系	
	及向量定义	253
9.2.4.1	四面体单元的局部和材料	
	坐标系及向量定义	253
9.2.4.2	四面体单元的体积	
	坐标	254
9.2.4.3	四面体单元局部和材料	
	坐标系的构造及变换	
	矩阵	256
9.2.5	三角形平面单元的局部	
	坐标系及向量定义	258
9.2.5.1	三角形平面单元的局部	
	和材料坐标系及向量	
	定义	258
9.2.5.2	三角形平面单元的面积	
	坐标	259
9.2.5.3	三角形平面单元局部和	
	材料坐标系的构造及	
	变换矩阵	261
9.2.6	空间杆单元的局部坐标系	
	及向量定义	263
9.2.6.1	空间杆单元的局部坐标系	
	及向量定义	263
9.2.6.2	空间杆单元局部坐标系的	
	构造及变换矩阵	263
9.2.7	空间梁-柱单元的局部坐标	
	系及向量定义	263
9.2.7.1	空间梁-柱单元的局部	
	和材料坐标系及向量	
	定义	263
9.2.7.2	空间梁-柱单元局部和	
	材料坐标系的构造及	
	变换矩阵	264
9.2.8	固体及结构的斜边界	
	坐标系	266
9.2.9	向量变换	267
9.3	位移插值函数	268
9.3.1	选择位移函数的准则	268
9.3.2	位移插值函数及其基(形)	
	函数	270
9.3.3	Lagrange 偏插值函数及	
	Hermite 插值函数	271
9.4	单元形函数的微分	273
9.4.1	函数微分之间的变换	273

9.4.2	体积微元、面积微元的 变换	275	9.9.3	斜边界	298
9.4.3	四面体和三角形单元形函数 的微分	276	9.9.3.1	斜边界的基本概念	298
9.5	单元的几何关系	277	9.9.3.2	壳体的斜边界	301
9.5.1	单元的位移函数	277	9.10	结构病态	302
9.5.2	单元的应变	278	9.10.1	问题的病态和良态	302
9.5.2.1	应变矩阵	278	9.10.2	病态问题的病态度及其 度量	303
9.5.2.2	应变的变分	279	9.10.3	结构病态	304
9.6	静、动力问题的有限元基本 方程	280	9.11	单元的应力和内力	305
9.6.1	固体和结构中单元的虚功 方程	280	10 三维和二维应力问题的有限 单元法	307	
9.6.2	局部坐标系中单元有限元 方程	281	10.1	三维应力单元	307
9.6.3	局部坐标系中单元动力 有限元方程	282	10.1.1	三维 Lagrange 四面体和 六面体单元	307
9.6.4	局部坐标系中单元刚度 矩阵	283	10.1.2	三维线性 Lagrange 四面 体单元的向量定义	308
9.6.5	整体坐标系中单元有限元 方程及刚度矩阵和荷载	284	10.1.3	三维二次 Lagrange 四面 体单元的向量定义	310
9.6.6	节点自由度及自由度 凝聚	285	10.1.4	四面体单元的向量变换	312
9.7	刚度矩阵的计算	286	10.1.4.1	四面体单元的向量在 材料坐标系与局部 坐标系之间的变换	312
9.7.1	自然坐标系下空间四面体 单元的数值积分	286	10.1.4.2	四面体单元的向量在 局部坐标系与整体 坐标系之间的变换	312
9.7.2	自然坐标系下三角形单元 的数值积分	289	10.1.4.3	四面体单元节点在局部 坐标系中的坐标	313
9.7.3	四面体单元外法线向量	290	10.1.5	三维 Lagrange 六面体 单元	313
9.7.4	空间梁-柱单元的数值 积分	294	10.2	三维 Lagrange 四面体和六面体 单元的位移插值函数	314
9.8	系统有限元基本方程及总刚度 矩阵	294	10.2.1	三维线性 Lagrange 位移 插值函数	314
9.8.1	系统有限元基本方程	294	10.2.2	三维二次 Lagrange 位移 插值函数	316
9.8.2	总刚度矩阵的集成	295	10.2.3	三维三次 Lagrange 位移 插值函数	316
9.8.3	刚度矩阵的特点和物理 意义	297	10.2.4	三维偏线性 Lagrange 位移 插值函数	317
9.9	边界条件	297			
9.9.1	弹性约束	297			
9.9.2	强迫位移	297			

10.3	三维应力单元的应变矩阵	319	10.6.5	二维偏线性 Lagrange 矩形 单元	333
10.3.1	三维应力单元的应变	319	10.7	二维 Lagrange 三角形和矩形 单元的位移插值函数	334
10.3.2	4 节点四面体单元的线性 应变矩阵	320	10.7.1	二维线性 Lagrange 位移 插值函数	334
10.3.3	4 节点四面体单元的非线 性应变矩阵	321	10.7.2	二维二次 Lagrange 位移 插值函数	335
10.4	4 节点四面体单元刚度矩阵	323	10.7.3	二维偏线性 Lagrange 位 移插值函数	335
10.4.1	局部坐标系中 4 节点四面 体单元的线性刚度 矩阵	323	10.8	二维应力单元的应变矩阵	338
10.4.2	局部坐标系中 4 节点 四面体单元的初应力 刚度矩阵	324	10.8.1	二维应力单元的应变	338
10.4.3	整体坐标系中 4 节点四面 体单元的刚度矩阵	325	10.8.2	3 节点三角形单元的线性 应变矩阵	338
10.4.4	4 节点四面体单元的质量 矩阵	325	10.8.3	3 节点三角形单元的非线性 应变矩阵	339
10.4.5	4 节点四面体单元的荷载 移置	325	10.9	3 节点三角形单元刚度矩阵	341
10.5	四面体单元的内力	325	10.9.1	局部坐标系中 3 节点三角 形单元的线性刚度矩阵	341
10.5.1	4 节点四面体单元的 内力	325	10.9.2	局部坐标系中 3 节点 三角形单元的初应力 刚度矩阵	341
10.5.2	4 节点四面体单元的等效 节点力向量	326	10.9.3	局部坐标系中 3 节点三角 形膜单元的刚度矩阵	342
10.6	二维应力单元	326	10.9.4	整体坐标系中 3 节点三角 形单元的刚度矩阵	342
10.6.1	二维 Lagrange 三角形和 矩形单元	326	10.9.5	3 节点三角形单元的质量 矩阵	342
10.6.2	二维线性 Lagrange 三角形 单元的向量定义	327	10.10	二维应力单元的节点力	343
10.6.3	二维二次 Lagrange 三角形 单元的向量定义	329	10.10.1	3 节点三角形单元的等效 节点力	343
10.6.4	三角形单元的向量变换	332	10.10.2	3 节点三角形单元等效 温变节点力向量	344
10.6.4.1	三角形单元的向量在材料 坐标系与局部坐标系之间 的变换	332	10.10.3	3 节点三角形单元的不 平衡力	345
10.6.4.2	三角形单元的向量在局部 坐标系与整体坐标系之间 的变换	332	10.11	二维应力单元的应力	345
10.6.4.3	三角形单元节点在局部 坐标系中的坐标	332	10.11.1	3 节点三角形单元的弹性 应力	345
			10.11.2	3 节点三角形单元的温变 应力	346

11 板壳的有限单元法	347	11.3.3 空间板壳单元的非线性应 变矩阵	373
11.1 板壳单元	347	11.4 空间板壳单元刚度矩阵	375
11.1.1 二维 Hermite 板壳单元 ..	347	11.4.1 局部坐标系中空间板壳单元 的线性刚度矩阵	375
11.1.2 空间三角形板壳单元的 向量定义	348	11.4.2 局部坐标系中空间板壳单元 的初应力刚度矩阵	377
11.1.2.1 二维三角形平板单元 的向量定义	348	11.4.3 局部坐标系中空间板壳单元 的质量矩阵	377
11.1.2.2 二维三角形壳单元的 向量定义	350	11.4.4 整体坐标系中空间板壳单元 的刚度矩阵	377
11.1.3 空间三角形板壳单元的 向量变换	351	11.4.5 荷载的移置	378
11.1.3.1 空间三角形板壳单元的 材料坐标系与局部坐标系 之间的向量变换	351	11.5 空间板壳单元的应力和内力 ..	378
11.1.3.2 空间三角形板壳单元的 局部坐标系与整体坐标系 之间的向量变换	352	11.5.1 空间板壳单元的不平 衡力	378
11.1.3.3 空间三角形板壳单元内 插点法向坐标系与局部 坐标系之间的向量 变换	354	11.5.2 空间板壳单元的应力	379
11.2 空间板壳单元的位移插值 函数	356	12 空间杆的有限单元法	380
11.2.1 协调板元	357	12.1 空间杆单元	380
11.2.2 二维不完全三次 Hermite 位移插值函数	357	12.1.1 一维 Lagrange 空间杆 单元	380
11.2.2.1 非协调板元	357	12.1.2 空间杆单元的向量定义及 变换	380
11.2.2.2 采用面积坐标的插值 函数	358	12.1.2.1 整体坐标系中单元位移 向量和节点力向量	380
11.2.2.3 非协调板壳元	360	12.1.2.2 局部坐标系中单元位移 向量和节点力向量	381
11.2.3 Mindlin 板单元	361	12.1.2.3 空间杆单元的局部坐标 系与整体坐标系之间的 向量变换	382
11.2.4 基于离散 Kirchhoff 理论 (DKT)的二维 Lagrange 位移插值函数	362	12.2 空间直线杆单元的几何关系 ..	382
11.2.4.1 DKT 板元	362	12.2.1 空间直线杆单元位移的 一维线性 Lagrange 插值 函数	382
11.2.4.2 DKT 板壳元	367	12.2.2 空间直线杆单元的应变 矩阵	383
11.3 空间板壳单元的应变矩阵	368	12.3 空间直线杆单元刚度矩阵	384
11.3.1 空间板壳单元的应变	368	12.3.1 局部坐标系中空间直线杆 单元的线性刚度矩阵	384
11.3.2 空间板壳单元的线性应变 矩阵	371	12.3.2 局部坐标系中空间直线杆	

单元的初应力刚度矩阵 ...	384	13 空间梁-柱的有限单元法	395
12.3.3 整体坐标系中空间直线杆 单元的刚度矩阵	384	13.1 空间梁-柱单元	395
12.3.4 空间直线杆单元的质量 矩阵	385	13.1.1 一维三次 Hermite 空间 梁单元	395
12.4 空间直线杆单元的内力	386	13.1.2 空间梁-柱单元的向量 定义	395
12.4.1 空间直线杆单元的不平 衡力	386	13.1.2.1 整体坐标系中单元位移 向量和节点力向量	395
12.4.2 空间直线杆单元的内力 ...	386	13.1.2.2 局部坐标系中单元位移 向量和节点力向量	398
12.5 空间曲线杆单元	387	13.1.2.3 材料坐标系中单元位移 向量和节点力向量	400
12.5.1 空间曲线杆单元的向量定义 及变换	387	13.1.3 空间梁-柱单元主、从节 点局部坐标系及向量 定义	403
12.5.2 局部坐标系中曲线杆单元 位移向量和节点力向量 ...	388	13.1.4 空间梁-柱单元的向量 变换	404
12.5.3 空间曲线杆单元的局部 坐标系与整体坐标系之间 的向量变换	388	13.1.4.1 空间梁-柱单元的材料 坐标系与局部坐标系 之间的向量变换	404
12.6 空间曲线杆单元的几何关系 ...	388	13.1.4.2 空间梁-柱单元的局部 坐标系与整体坐标系 之间的向量变换	405
12.6.1 空间曲线杆单元位移的 一维线性 Lagrange 插值 函数	388	13.1.4.3 空间梁-柱单元主、从 节点向量的变换	406
12.6.2 空间曲线杆单元的应变矩阵 及其变分	389	13.2 空间梁-柱单元的几何关系 ...	410
12.6.2.1 空间曲线杆单元的应变 矩阵	389	13.2.1 空间梁-柱单元的位移 插值函数	410
12.6.2.2 空间曲线杆单元应变的 变分	390	13.2.1.1 一维三次 Hermite 插值 函数	410
12.6.3 局部坐标系中空间曲线杆 单元的线性刚度矩阵	391	13.2.1.2 空间梁-柱单元的位移 插值函数	411
12.6.4 局部坐标系中空间曲线杆 单元的初应力刚度矩阵 ...	392	13.2.1.3 薄壁空间梁-柱单元的 位移插值函数	413
12.6.5 整体坐标系中空间曲线杆 单元的刚度矩阵	392	13.2.2 空间梁-柱单元的应变 矩阵	414
12.6.6 空间曲线杆单元的初应力 向量与不平衡力向量	393	13.2.2.1 2 节点 6 自由度空间梁- 柱单元的应变矩阵	414
12.7 只拉杆单元	393	13.2.2.2 2 节点 8 自由度薄壁 空间梁-柱单元的应变	
12.8 一维三次 Hermite 空间直线杆 单元	394		

矩阵	416	衡力	439
13.2.2.3 2 节点 10 自由度薄壁 空间梁-柱单元的应变 矩阵	419	13.4.2 空间梁-柱单元的应力 ...	439
13.2.2.4 薄壁空间梁-柱单元的 扭转剪切应变矩阵	423	13.4.3 空间梁-柱单元的内力 ...	442
13.3 空间梁-柱单元刚度矩阵	424	13.5 空间梁-柱分析模型的讨论 ...	445
13.3.1 局部坐标系中空间梁-柱 单元的线性刚度矩阵	424	14 自锁	446
13.3.1.1 2 节点 6 自由度空间 梁-柱单元的线性刚度 矩阵	425	14.1 自锁概述	446
13.3.1.2 2 节点 8 自由度薄壁空间 梁-柱单元的线性刚度 矩阵	427	14.2 剪力自锁	446
13.3.1.3 2 节点 10 自由度薄壁 空间梁-柱单元的 线性刚度矩阵	428	14.2.1 Timoshenko 梁单元	446
13.3.2 局部坐标系中空间梁-柱单 元的初应力刚度矩阵	430	14.2.1.1 线性 Timoshenko 梁单元 和缩减积分形式	447
13.3.2.1 2 节点 6 自由度空间 梁-柱单元的初应力 刚度矩阵	430	14.2.1.2 二次 Timoshenko 梁 单元	448
13.3.2.2 2 节点 8 自由度薄壁 空间梁-柱单元的 初应力刚度矩阵	433	14.2.2 Mindlin 板单元	449
13.3.2.3 2 节点 10 自由度薄壁 空间梁-柱单元的初应 力刚度矩阵	434	14.2.2.1 板的自锁现象	449
13.3.3 整体坐标系中空间梁-柱 单元的刚度矩阵	435	14.2.2.2 线性 Mindlin 板单元和 缩减积分形式	450
13.3.4 荷载的移置	436	14.2.3 实体单元	452
13.3.5 局部坐标系中空间梁-柱 单元的质量矩阵	436	14.3 薄膜力自锁和不可压缩自锁 ...	453
13.3.6 局部坐标系中空间梁-柱 单元温度变化、初应变的 等效荷载	438	14.3.1 经典曲线薄梁单元和薄 膜力自锁	453
13.4 空间梁-柱单元的应力和 内力	439	14.3.2 Mindlin 曲梁单元和 薄膜力自锁	455
13.4.1 空间梁-柱单元的不平		14.3.3 不可压缩自锁	456
		14.3.3.1 一维不可压缩空心 球体	456
		14.3.3.2 不可压缩三维实体	458
		14.4 防止自锁的方法	458
		14.4.1 选择性缩减积分技术	458
		14.4.2 “B-Bar”方法	459
		14.4.3 控制沙漏的缩减积分 技术	460
		15 有限单元法的实施	461
		15.1 总刚矩阵和方程组求解中的图 及其算法	461
		15.1.1 图的基本概念和算法	461
		15.1.2 有限元分析中的图	463
		15.1.3 减小带宽的重排序	464
		15.1.4 减小填充率的重排序	465

15.1.5	对称高斯消去法中的图	465	15.8.2	列(行)压缩储存	505
15.1.6	最小度	467	15.8.3	分块列(行)压缩储存	505
15.1.7	嵌套剖分	468	15.9	快速有限元直接求解	506
15.2	总刚度矩阵的一维变带宽紧密储存	469	15.9.1	快速有限元直接求解过程	506
15.3	有限元线性代数方程组的求解	470	15.9.2	数值分解	507
15.3.1	算法的数值稳定性	470	15.9.2.1	基本分解算法	507
15.3.2	因子分解法	471	15.9.2.2	改进的分解算法	507
15.3.3	Cholesky(平方根)法	473	15.10	快速有限元迭代求解	508
15.3.4	三重因子分解法	473	15.10.1	概述	508
15.3.5	减少长操作的方法	474	15.10.2	预条件共轭梯度(PCG)迭代法	508
15.3.6	剔除了与零元素相乘的三重因子分解法	476	15.10.2.1	基本的共轭梯度迭代法	508
15.3.7	大型线性方程组的分块解法	478	15.10.2.2	预条件共轭梯度迭代算法	509
15.4	广义特征值问题	479	15.10.3	预条件技术	510
15.4.1	概述	479	15.10.3.1	概述	510
15.4.2	特征向量的性质	480	15.10.3.2	不完全 Cholesky 分解预条件器	510
15.4.3	广义特征问题和标准特征问题之间的变换	482	15.10.4	多重网格预条件器	513
15.4.4	移位	483	15.10.5	终止迭代	513
15.4.5	零质量	484	16	固体和结构几何非线性分析	515
15.4.6	矩阵收缩和 Gram-Schmidt 正交化	484	16.1	非线性方程及解法	515
15.4.7	Sturm 序列性质	487	16.1.1	荷载增量法	515
15.5	特征问题的解法	487	16.1.2	荷载增量法的一般过程	515
15.5.1	Rayleigh-Ritz 法	487	16.1.3	平衡路线	517
15.5.2	静力凝聚	489	16.2	牛顿法	518
15.5.3	逆迭代法	492	16.2.1	牛顿-拉斐逊(Newton-Raphson)法	518
15.5.4	广义雅可比(Jacobi)法	493	16.2.2	修正的牛顿-拉斐逊法	521
15.6	大型特征问题的解法	497	16.2.3	修正的牛顿-拉斐逊法的加速迭代	522
15.6.1	行列式搜索法	497	16.2.4	发散处理	523
15.6.2	子空间迭代法	499	16.2.5	BFGS 法	524
15.6.3	兰索斯(Lanczos)法	501	16.2.6	纯粹增量近似与牛顿-拉斐逊近似的关系	526
15.7	快速有限元(FFE)概述	502	16.3	Riks 法(弧长法)	527
15.8	快速有限元中大型稀疏矩阵的数据结构	504	16.3.1	弧长法的概念及方法	528
15.8.1	Coordinate 储存	504			