经济科学译库

经济

Mathematics for Economics and Finance

经济数学与金融数学

迈克尔·哈里森
Michael Harrison
帕特里克·沃尔德伦
Patrick Waldron
/著

谢远涛 /译

中国人民大学出版社

经济科学译库

经济数学与金融数学

Mathematics for Economics and Finance

迈克尔·哈里森
Michael Harrison
帕特里克·沃尔德伦
Patrick Waldron
/著

谢远涛 /译

中国人民大学出版社
·北京·

Mathematics for Economics and Finance by Michael Harrison and Patrick Waldron
ISBN：978-0-415-57304-7

北京市版权局著作权合同登记号：01-2012-1484

图书在版编目（CIP）数据

经济数学与金融数学/哈里森，沃尔德伦著；谢远涛译．—北京：中国人民大学出版社，2012.11
（经济科学译库）
ISBN 978-7-300-16689-6

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①哈…②沃…③谢…　Ⅲ．①经济数学②金融-经济数学　Ⅳ．①F224②F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 278934 号

经济科学译库
经济数学与金融数学
迈克尔·哈里森（Michael Harrison）
帕特里克·沃尔德伦（Patrick Waldron）　著
谢远涛　译
Jingji Shuxue yu Jinrong Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2012 年 12 月第 1 版
印　　张	32.25　插页 2	**印　　次**	2012 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	694 000	**定　　价**	65.00 元

序　言

本书包含两篇，第Ⅰ篇是数学，第Ⅱ篇是应用，具体说来，是经济应用和金融应用。在前言中，作者迈克尔·哈里森（Michael Harrison）和帕特里克·沃尔德伦（Patrick Waldron）建议本书写给“数学或者经济学高年级学生”。对数学接触不是很多的经济学高年级学生而言，本书的第Ⅰ篇的内容有一定难度。数学高年级学生会发现本书在以下几个方面非常适合：温习理论经济学与金融学中的各数学分支；学习这些数学分支中没有涵盖到但是在经济与金融应用中有用的内容，然后接触基于这些数学知识导出的经济与金融理论综合概论。

经济学高年级学生可以把本书第Ⅰ篇的内容当作第Ⅱ篇要用的数学知识的一览表。如果学生有足够的数学背景知识，那么第Ⅰ篇的内容就足够了。但正如作者所写的那样，“知识讲得非常快”。因此如果学生发现某邻域的材料过于紧凑，他（或她）可以找一本讲解的节奏慢点的合适的替代教材，然后再看本书。

总体上看，本书的两篇，综合有序地讲解了经济理论与金融理论所需的大量重要的数学知识，以及经济理论与金融理论。勤勉的学生通过本书的学习将会汲取大量数学和经济金融理论知识。

任何一本书都有所取舍。本书中应用空间有限的一个议题是不等约束优化，例如，在线性等式约束和/或（弱）不等约束（一些或者全部变量非负）下寻找均值—方差效率集。Markowitz 和 Todd（2000）致力于该议题的研究。如果读者

在读完本书后继续读该文献，会发现本书中讲解的向量与矩阵扩展知识大有裨益。也就是说，本书提供的数学背景可以让学生顺利过渡到数理金融及金融理论领域。

Harry M. Markowitz
哈里·马科维茨
(San Diego，California)
圣地亚哥，加利福尼亚
2010 年 10 月

前　言

本书是经济与金融学学生的中级数学教程，是在给都柏林大学圣三一学院商学、经济学、社会学以及数学学院的大三学生的讲稿基础上整理得到的。本书的主要目的是为学生最后一学年课程中的计量经济学、经济理论、数量金融以及数理经济学提供所需的数学知识。本书的内容同样适用于研究生一年级的学习。而且，也可以用作数学系学生的经济与金融导论教材。

最近几年，我们越来越期望数学系的毕业生能具备一些实践技能，比如经济学和金融学等，同样我们也希望经济学的毕业生具备更好的数学基础。很多其他领域的教科书中都强调，数学基础在经济和金融行业中的地位是越来越重要了，如 Ridley（1993）、Kelly（1994）、Davidson（1996）、Bass（1999）、Poundstone（2005）以及 Bernstein（2007）。从某种程度上说本书是对这一趋势的响应，面向经济与金融高年级学生提供一个扩展其他学科知识的机会。

适合经济学的数学教材，无论是导论层次的还是高级层次的都有很多。但是，缺少一些中级教材。我们所认为的中级，当然包括证明和应用，但是又不追求纯数学教科书中的抽象和严谨。事实上，我们还找不到单独的一本书来涵盖中级层次教学所需的材料，特撰写此书。

本书的目的不在全面，而是要打好基础，书中内容能在一个标准学年中讲授完。其他专题可以在后期教学中涵盖，比方说，在我们的教学计划中可以放在最

后一学年中来教学。因此，在第Ⅰ篇我们主要聚焦在线性代数、差分方程、向量计算与优化等数学。这些内容的数学表述很详细，同时提供了大量整理过的例子。本书第Ⅱ篇精选了一些经济与金融中的应用，包括确定性和随机动态宏观经济模型、投入产出分析、概率、统计、二次规划和计量经济方法，确定性下单期与跨期选择（包括一般均衡和利率期限结构），不确定性下选择，以及投资组合理论的一些内容（如资本资产定价模型）。

大多数读者应已完成数学、经济学和（或）金融学导论课程的学习。符号和预备知识部分列举了该领域中大多数读者应该熟悉的基本内容。

这些虽然不是严格的预备知识，但本书还是提供了部分内容。然而，本书的知识讲得很快，进度也很超前。因此，我们觉得，大多数学生会感到有一定的难度，但是，如我们所望，付出的越多回报也就越多。在数学、经济与金融方面有较好基础的读者不要因为学过一些章节而掉以轻心；而没学过这些预备课程的读者应不断地补充背景知识。每章后面的练习对本书中的一些证明以及数学方法的运用提供了额外的见解。本书还将配套解题手册。

经济学可以定义为如何在资源约束和不确定性条件下制定优化决策的科学。经济学很少去做预测，而是对未来所有的可能进行最优选择。宏观经济学关注总体经济，它寻求对以下问题的解释：总产出（国民收入）水平的确定、总产出增长率、一般价格水平和通货膨胀，也即价格增长率。微观经济学从根本来讲是关注财富和支出在不同商品和劳务上的分配，通过消费者和生产者之间的交互作用来确定相对价格。基础金融学，或者金融经济学，主要关注资金在不同时期内的分配，得出利率的期限结构。金融学中的另外一个问题是资金在（有限的或者连续的）自然状态上的分配，产生了一个随机变量，叫风险资产回报率。简单地说，我们尝试把微观经济学和金融学的概念结合起来，产生一个更复杂的问题，数学方法在解决这个问题中扮演了重要角色。

可以这样说，近年来经济学，特别是金融经济学已经和理论物理学一样成为一个重要的应用数学领域。有人称它是应用数学的另外一个分支。数学系讲授线性代数时，不仅要按照传统引入物理学，而且也应顺应现在的趋势，加入一些与经济学和金融学相关联的知识。本书可以作为所有学生学习线性代数的一般性基础教材。前言中提到的作者，在他们的著作中已经给出数学和物理学技术在经济学与金融学中成功应用的例子。希望本书能为大家成功地在经济与金融中运用数学方法提供必要的帮助。

迈克尔·哈里森
爱尔兰都柏林4号，都柏林大学经济学院
帕特里克·沃尔德伦
爱尔兰都柏林2号，都柏林大学圣三一学院经济学系
2010年10月

致　谢

我们分别要感谢兰卡斯特大学（University of Lancaster）的数量经济学与数理金融学老师，特别是 Alan Airth、Anna Koutsoyiannis 和 Tin Nguyen，感谢圣三一学院和宾夕法尼亚大学的数量经济学与数理金融学老师，特别是 Adrian Raftery、David Simms、John Woods、Angel de la Fuente、Bob Litzenberger 和 Krishna Ramaswamy。

感谢圣三一学院的一些本科生的协助，在用本书作为教材的过程中，他们注意到早期版本的一些排印错误，感谢 Vahagn Galstyan 对线性代数章节提出的一些有用的评论。

同时感谢匿名评阅人对本书原稿早期版本提出的有用的评论和建议，我们根据其中一位评阅人的意见改进了斯坦（Stein）引理（定理 13.7.1）和西格尔（Siegel）悖论（定理 13.10.2）。当然，我们仍然对本书本版负全责。

我们把一些用到的文献注释放在网站上，包括：诺贝尔奖（Nobel Prize）的官网（http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates）；圣安德鲁斯大学（University of St. Andrews）的 Mac Tutor 数学史档案馆（http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/）；部分数学词汇用法早知道（Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics）网站（http://jeff560.tripod.com/mathword.html）以及数学家谱项目（Mathematics Genealogy Project）。

感谢 Routledge 出版社人员让本书得以出版，特别是感谢 Simon Holt、Robert Langham、Lisa Salonen、Emily Senior 和 Thomas Sutton。感谢我们的版面编辑 Geoff Amor，我们的封面设计 Gareth Toye 和 Jessica Stock 以及她在 Sunrise Setting Ltd 的团队。

对 Donald Knuth 提供的 TEX 排版系统和全球 TEX 和 LATEX 群成员，我们表示深深的谢意，特别是感谢 Leslie Lamport 提供了 LATEX、Till Tantau 提供了 TikZ 包和 PGF 以及 Christian Feuersänger 提供了 PGFPLOTS。

特别感谢 Harry M. Markowitz 教授和 Nobel Laureate 为我们写序言。

最后，感谢 June Harrison 提供的餐点。

缩略语表

AR 自回归
BLUE 最优线性无偏估计
CAPM 资本资产定价模型
CARA 绝对风险规避不变
cdf 累积分布函数
CES 不变替代弹性
CRRA 相对风险规避不变
DARA 绝对风险规避递减
DCF 折现现金流
DRRA 相对风险规避递减
EMH 有效市场假设
EU 欧盟
EUR 欧元
GBP 英镑
GLS 广义最小二乘
HARA 双曲绝对风险规避
$I(0)$ 0阶单整

IARA　绝对风险规避递增
iff　当且仅当
iid　独立同分布
IRR　内部回报率
IRRA　相对风险规避递增
IS　投资与储蓄均衡
ISO　国际标准化组织
LM　流动性偏好与货币供给均衡
m　百万
MVN　多元正态（分布）
NPV　净现值
OLS　普通最小二乘
pdf　概率密度函数
RLS　受限最小二乘
rv　随机变量或随机向量
s. t.　使得（so that、subject to 或 such that）
UK　英国
US（A）　美国
VAR　向量自回归
VNM　冯·诺依曼-摩根斯顿（von Neumann-Morgenstern）
WLS　加权最小二乘

符号和预备知识

读者须熟悉萨摩斯岛（Samos）的毕达哥拉斯（Pythagoras）（c. 569—c. 475BC）的基本数学知识和著名定理，若有概率统计、宏观经济学、微观经济学特别是金融学等基本知识则更好。本书第 13 章中的概率统计材料供没有学过相关领域知识的读者自学，具有经济与金融相关知识的读者可以快速浏览相关的应用章节。

为了讲清楚，本书符号和预备知识部分整理了一些需要读者预先掌握的重要的数学和统计学概念，特别讲解了各种常规教科书中表述不同的符号。

数学和技术术语在第一次出现的时候用黑体字表示。

没有接触过金融数学的经济学专业的学生须注意常见的逻辑不严谨的缺点，特别注意要以正确的顺序给出定义，证明一个定理应该从假设到结论。读者需要熟悉证明的不同方法，如反证法、反命题证明法（contrapositive）和归纳法，本书第一次使用这些方法时我们进行了详细的讲解。[①] 同样，数学专业的学生可能对本书涵盖的数学知识很熟悉，在看书之前需要思考经济学的本质、主旨以及科学方法。

读者需要熟悉“such that”、“subject to”（缩略语都是 s. t.）和“if and only

① Solow（2009）是一本很好的入门教材，对有关的重要概念给出了正式证明。

if”（缩略语是 iff）等表述、含义和用法。速记符号 $\forall$ 表示“任意”，$\exists$ 表示“存在”。“iff”表示充分必要条件（充要条件）或者等价条件。“P 可以推导出 Q”，则称 Q 是 P 的**必要条件**，或者 P 是 Q 的**充分条件**。“P 可以推导出 Q”与逆否命题“非 Q 可以推导出非 P”是**充要条件**。有时候用类似的符号 $\Leftrightarrow$ 来表示充要条件，表示左边可以推导出右边，同时右边也可以推导出左边。类似地，符号 $\Rightarrow$ 表示可以推导出，符号 $\Leftarrow$ 表示可以被推导出。

本文常用到恒等符 $\equiv$，特别是定义中；$\approx$ 表示近似等于，$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 和 $\prod_{j=1}^{n} x_j$ 分别表示 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的求和与乘积。即：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

当根据上下文可以清晰地看出上下限时，我们偶尔记为 $\sum_i$ 和 $\prod_j$。

首项为 a，**公比**为 ϕ 的**几何级数**前 n 项和为：

$$\sum_{i=1}^{n} a\phi^{i-1} = a + a\phi + a\phi^2 + \cdots + a\phi^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-\phi^n)}{1-\phi} = \dfrac{a(\phi^n - 1)}{\phi - 1}, & \text{若 } \phi \neq 1 \\ n \times a, & \text{若 } \phi = 1 \end{cases}$$

如果 $-1<\phi<1$，级数的无穷和为 $\frac{a}{1-\phi}$。如果 $\phi \leqslant -1$（$a \neq 0$），当 $n \to \infty$ 时，前 n 项和摆动而不收敛。如果 $\phi \geqslant 1$，当 $n \to \infty$ 时，和依赖于 a 的符号而趋于正负无穷。

$n!$ 表示 n 的**阶乘**，是从 1 到 n 的整数的乘积。0! 定义为 1。即，$n! \equiv \sum_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$，$0! \equiv 1$。

读者需要掌握基本的集合符号和维恩（Venn）图。[①] 如果 X 表示**全集**，$B \subseteq X$，即 B 是 X 的**子集**，那么 $X \setminus B$ 表示 B 的**补集**，$X \setminus B \equiv \{x \in X: x \notin B\}$。如果 $B \cap C = \{\}$，称 B 和 C **不相交**，即 B 和 C 的交集为**空集**。n 个集合 X_1，X_2，…，X_n 的**笛卡儿乘积**（Cartesian product）是一个有序的 **n 元组集**（x_1，x_2，…，x_n），每个 n 元组第 i 个分量是集合 X_i 的第 i 个元素。

另外，需要掌握集合知识和自然数 $\mathbb{N}$、整数 $\mathbb{Z}$、实数 $\mathbb{R}$ 和复数 $\mathbb{C}$ 的应用。本书中，斜体字母如 x 表示 $\mathbb{R}$ 中的一个特定数。笛卡儿集 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ 记为 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$，称为 **$n$ 维（欧氏）**空间。$\mathbb{R}^n$（或任意向量或测度空间）中的点用小写黑体字母来表示，如 $\boldsymbol{x}$，而大写黑体字母，如 $\boldsymbol{X}$，常表示矩阵。任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都可以写成 n 元组形式（x_1，x_2，…，x_n），

① 维恩（Venn）图能展示集合和它们的交集与并集，是由英国逻辑学家和哲学家 John Venn（1834—1923）在 1880 年左右提出的。

其中x_1，x_2，…，x_n 表示 $\mathbf{x}$ 的**笛卡儿坐标**。[①] 符号上面的波形符表示随机变量（例如 $\tilde{x}$）或者随机向量（例如 $\tilde{\mathbf{x}}$）。$\mathbb{R}^n_+ \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$表示 $\mathbb{R}^n$ 的**非负象限**，而$\mathbb{R}^n_{++} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_i > 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$表示**正象限**。

$[a,\ b] \equiv \{x \in \mathbb{R}: a \leqslant x \leqslant b\}$称为**闭区间**，$(a,\ b) \equiv \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$称为**开区间**。根据上下文，读者可以区分 2 元组$(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ 和开区间$(a,\ b) \subset \mathbb{R}$。

复数中最重要的结论是棣莫弗（De Moivre）定理[②]，该定理使$(\cos\theta + i\sin\theta)^t$可以写为 $\cos t\theta + i\sin t\theta$，$(\cos\theta - i\sin\theta)^t$ 可以写为 $\cos t\theta - i\sin t\theta$，$i \equiv \sqrt{-1}$。

复数 $z=a+ib$ 的**共轭**为$\bar{z}=a-ib$。和的共轭等于共轭的和，乘积的共轭等于共轭的乘积。z 的**模**是正的平方根$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$。

代数基本定理表明，实系数（或复系数）n 阶多项式有 n 个根（可能为复数），复根以共轭形式出现，并且一些根可以相等。

下面给出的函数与关系的定义非常重要。

定义 0.0.1 从**定义域** X 到**上域**（co-domain）Y 的**函数**（或**映射**）$f: X \to Y: x \mapsto f(x)$指把集合 X 的每个元素分配给集合 Y 中的唯一元素 $f(x)$的规则，$f(x)$称为 x 的**像**。

定义 0.0.2 如果 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，那么**复合函数** $g \circ f: X \to Z$ 定义为$g \circ f(x): g(f(x))$。

定义 0.0.3 从**定义域** X 到**上域** Y 的**对应**（correspondence）$f: X \to Y$ 指把集合 X 中的每个元素分配给集合 Y 中的非空子集的规则。

定义 0.0.4 函数 $f: X \to Y$ 的**值域**为集合 $f(X) = \{f(x) \in Y: x \in X\}$。

定义 0.0.5 函数 $f: X \to Y$ 是**单射的**（一对一）当且仅当 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$。

定义 0.0.6 函数 $f: X \to Y$ 是**满射的**当且仅当 $f(X) = Y$。

定义 0.0.7 函数 $f: X \to Y$ 是**双射**（或**可逆**）的当且仅当同时为单射而且满射。

可逆函数 $f: X \to Y$ 有良好定义的反函数 $f^{-1}: Y \to X$，对任意 $y \in Y$ 有 $f(f^{-1}(y)) = y$，对任意 $x \in X$ 有 $f^{-1}(f(x)) = x$。

对任意函数 $f: X \to Y$，若 $A \subseteq X$，则

$$f(A) \equiv \{f(x): x \in A\} \subseteq Y$$

若 $B \subseteq Y$，则 f^{-1}表示

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in X: f(x) \in B\} \subseteq X$$

① 笛卡儿积和笛卡儿坐标都是以法国数学家 René Descartes（1596—1650）的名字命名的，他是第一个以这种方式使用坐标的人。现在常将 $\mathbb{R}^n$ 称为欧氏空间（我们从 5.3 节开始一直沿用）是为了纪念古代数学家欧几里得（Euclid）（c. 325—c. 265BC），而这个惯例实际上是有问题的，称它为笛卡儿空间同样是有道理的。欧几里得范数（定义 5.2.11）也同样以欧几里得的名字命名。

② 棣莫弗定理是以法国胡格诺（Huguenot）派的数学家 Abraham de Moivre（1667—1754）的名字命名的。1722 年他首次将该定理出版。进一步的了解，参阅 Sydsæter 等（2008，附录 B.3）。

如果 f 可逆，且 $y\subseteq Y$，那么 $f^{-1}(\{y\})=\{f^{-1}(y)\}$。如果 f 不可逆，那么 $f^{-1}(\{y\})$ 可以是空集，或者包含至少一个元素，但 f^{-1}：$f(X)\rightarrow X$ 仍定义了一个对应。

定义 0.0.8 函数 f：$X\rightarrow Y$ 是一个可微的函数（X，$Y\subseteq\mathbb{R}$），那么 f'：$X\rightarrow\mathbb{R}$ 表示 f 的**导数**，即 $f'(x)$ 是 f 在 x 处的导数，也记为 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ 或 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，其中 $y=f(x)$。

定义 0.0.9 函数 f：$X\rightarrow Y$ 是 k（$k\in\mathbb{R}$）**次齐次**的当且仅当对任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 有 $f(\theta x)=\theta^k f(x)$。

当 $k=1$ 时，称 f 是一次齐次的，有时也称为**线性齐次**的。

定义 0.0.10 集合 X 上的**二元关系**（binary relation）是 $X\times X$ 上的一个子集 R，或者 (x, y) 的集合，其中 $x\in X$，$y\in X$。

如果 $(x, y)\in R$，常记为 xRy。[①]

定义 0.0.11 集合 X 上的二元关系 R 的性质如下：

(a) 关系 R 是**自反**的当且仅当对任意 $x\in X$ 有 xRx。

(b) 关系 R 是**对称**的当且仅当 $xRy\Rightarrow yRx$。

(c) 关系 R 是**传递**的当且仅当 xRy，$yRz\Rightarrow xRz$。

(d) 关系 R 是**完备**的当且仅当对任意 x，$y\in X$，xRy 或 yRx 至少有一个成立。

(e) **等价关系**指具有自反性、对称性和传递性的关系。等价关系把 X 划分为不相交的等价类。

在消费理论中会用到弱偏好关系 $\succeq$，$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 表示消费束 $\boldsymbol{x}$ 比 $\boldsymbol{y}$ 更受偏好，或者两者无差异，即消费束 $\boldsymbol{x}$ 至少与 $\boldsymbol{y}$ 一样好。

读者需要具备扎实的微积分基础知识，包括极限、单变量微分和积分；熟悉导数的极限形式定义、单变量求导的链式法则和乘积法则；还有洛必达（L'Hôpital）法则[②]，即如果分式的分子和分母同为无穷小或者无穷大，则该分式的极限等于分子和分母同时求导后所得商的极限。

同时应掌握换元法积分、分部积分、微分法则和标量函数积分，特别是多项式函数和三角函数。[③]

常用的三角恒等式包括：

- 余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

- 二倍角公式

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1$$

---

① 二元关系的更多细节参阅 Simmons（1963，1.5 节和 1.8 节）。

② 洛必达法则由法国数学家 Guillaume François Antoine，Marquis de l'Hôpital（1661—1704）在 1696 年出版的书中发表。

③ Binmore（1982，第 7～16 章）的书中包含了单变量微积分。本书的优势在于，作者是一个前沿的经济学家。也可以参考 Simon 和 Blume（1994，第 2～4 章）或者 Stewart（2008，第 1～8 章）。

● 基本恒等式

$$\cos^2 A+\sin^2 A=1$$

从包含 n 个元素的集合中选出 r 个，按照一定顺序进行安排称为**排列**。从包含 n 个元素的集合中选出 r 个，得到不同排列的数目记为 ${}^nP_r$：

$${}^nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

从包含 n 个元素的集合中选出 r 个但忽略其顺序称为**组合**。从包含 n 个元素的集合中选出 r 个元素的不同组合的数目记为 ${}^nC_r$：

$${}^nC_r=\frac{{}^nP_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

读者需要熟悉指数函数的性质 e：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{++}$：$x\mapsto e^x$，其中 $e\approx 2.718\,2\cdots$，其反函数为自然对数函数：ln：$\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$：$x\mapsto \ln x$。使用任意正数为底数得到对数函数。特别地，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=e^r$$

该公式有时也用作 e 的定义公式，也有学者[①]偏好用下式：

$$e^r\equiv 1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r^j}{j!}$$

$|X|$ 表示集合 X 中元素的个数，或者 X 的**基数**，$|z|$ 表示（复）数 z 的模，$|\boldsymbol{X}|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式，常记为 $\det(\boldsymbol{X})$。当 z 是实数而非复数时，模为绝对值。同一个符号表示三种概念有时可能混淆，但根据上下文常常可以区分开。

集合 X 的所有可能子集的集合称为集合 X 的**幂集**，记为 2^X，$|2^X|=2^{|X|}$。

实数集合 X 的最小的上界或**上确界**，记为 $\sup(X)$，表示大于等于集合中每一个数的最小的实数。例如，$\sup\{1,2,3,4\}=4$，$\sup\{x\in\mathbb{R}^n: 0<x<1\}=1$。第二个例子说明上确界可以不是集合中的最大实数。

实数集合 X 的最大的下界或**下确界**，记为 $\inf(X)$，表示小于等于集合中每一个数的最大的实数。例如，$\inf\{1,2,3,4\}=1$，$\inf\{x\in\mathbb{R}^n: 0\leqslant x\leqslant 1\}=0$，$\inf\{x\in\mathbb{R}^n: x^3>2\}=2^{1/3}$。下确界可以不是集合中的最小实数。

① 例如，见 Chiang 和 Wainwright（2005，10.2 节）。