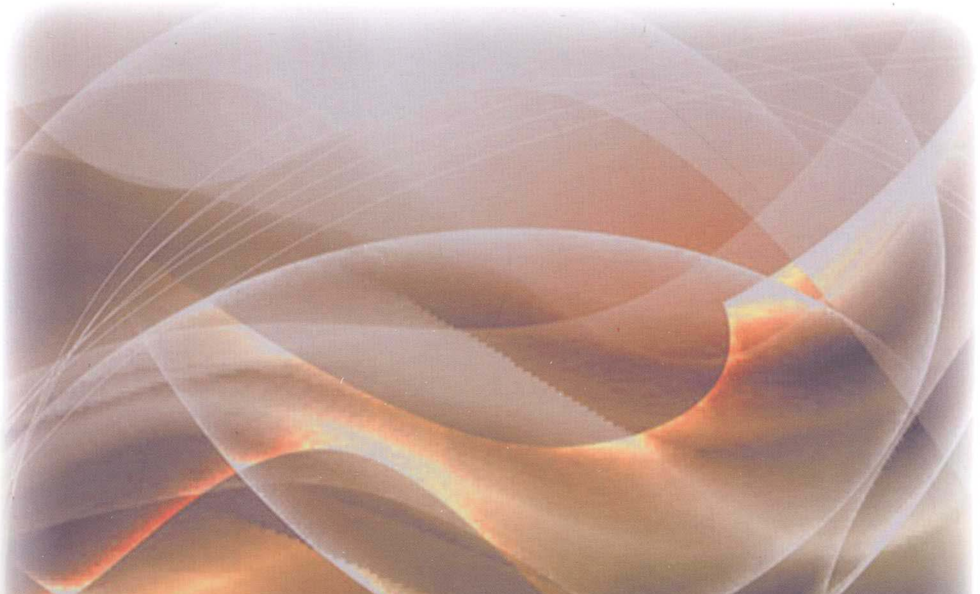
高维弯曲空间

——历史与思想

黄勇 著

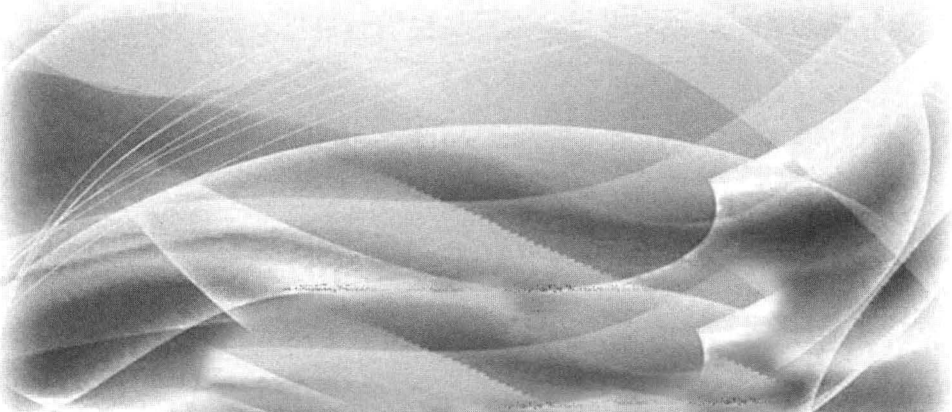


中国社会科学出版社

高维弯曲空间

——历史与思想

黄勇 著



中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高维弯曲空间：历史与思想／黄勇著．—北京：中国社会科学出版社，2012.9

ISBN 978-7-5161-1354-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①黄…　Ⅲ.①黎曼几何—研究　Ⅳ.①O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 205090 号

出 版 人 赵剑英
选题策划 刘 艳
责任编辑 刘 艳
责任校对 邓晓春
责任印制 戴 宽

出　　版 中国社会科学出版社
社　　址 北京鼓楼西大街甲 158 号（邮编 100720）
网　　址 http://www.csspw.cn
中文域名：中国社科网　　010-64070619
发 行 部 010-84083685
门 市 部 010-84029450
经　　销 新华书店及其他书店

印　　刷 北京市大兴区新魏印刷厂
装　　订 廊坊市广阳区广增装订厂
版　　次 2012 年 9 月第 1 版
印　　次 2012 年 9 月第 1 次印刷

开　　本 710×1000　1/16
印　　张 9.25
字　　数 206 千字
定　　价 38.00 元

总　　序

2012年，太原科技大学将迎来60周年华诞。值此六秩荣庆之际，我校的专家学者推出了这套学术丛书，以此献礼，共襄盛举。

六十年前，伴随着新中国的成立，伟业初创，百废待兴，以民族工业为先锋的社会主义现代化建设蓬勃兴起，太原科技大学应运而生。六十年来，几代科大人始终心系民族振兴大业，胸怀制造强国梦想，潜心教书育人，勇担科技难题，积极服务社会，为国家装备制造行业发展壮大和社会主义现代化建设做出了积极贡献。四万余名优秀学子从这里奔赴国民经济建设的各个战场，涌现出一大批杰出的科学家、优秀的工程师和知名的企业家。作为新中国独立建设的两所“重型机械”院校之一，今天的太原科技大学已发展成为一所以工业为主，“重大技术装备”领域主流学科特色鲜明，多学科协调发展的教学研究型大学，成为国家重型机械工业高层次人才培养和高水平科技研发的重要基地之一。

太原科技大学一直拥有浓郁的科研和学术氛围，众位同仁在教学科研岗位上辛勤耕耘，硕果累累。这套丛书的编撰出版，定能让广大读者、校友和在校求学深造的莘莘学子共享我校科技百花园散发的诱人芬芳。

愿太原科技大学在新的征途上继往开来、再创辉煌。

谨以为序。

太原科技大学校长　郭勇义

二零一二年六月

前　　言

19 世纪的数学，尤其是几何学，极大地改变了人们对世界的认识，拓展了人们刻画世界的知识范围。当直线坐标系中的微分方程过于复杂的时候，通过坐标变换转换到曲线坐标系中之后，很可能更加便于计算。而曲线坐标系的出现，以及曲线坐标系中的微分运算之所以成为可能，都是因为我们的空间观念从欧几里得几何学向黎曼几何学的转变。另一方面，向量，乃至张量概念的建立，得益于高维空间观念的形成。而向量分析帮助麦克斯韦构架了电磁学理论，张量分析为电磁现象找到了广义协变性。这一切都源自思想的解放、内容的拓展。

19 世纪的数学在空间观念、微分运算、抽象符号等方面极大地进步了，这被数学史家称为“数学的解放”。弯曲空间概念的建立有两个重要的理论基础，分别由凯莱和西尔维斯特在矩阵论、黎曼在微分几何领域，提出革命性的观点和理论，他们改变了传统数学的发展方向：凯莱将矩阵论从方程论转向了变换理论，并开始了 n 维向量空间的研究；黎曼将内蕴几何对三维曲面的研究转向了 n 维流形的性质，从而将微分几何对曲线、曲面等几何对象的研究渐渐摆脱了直角坐标系，形成了直接在曲面上寻找基向量建立坐标系的方法，进而建立了弯曲空间的概念。张量分析的产生一方面是向量分析的推广，另一方面是微分几何的发展推动的。

19 世纪初非常活跃的研究领域是这种转变的源动力，这些领域包括：

1. 爱森斯坦、柯西关于方程论的理论，简洁地表达了方程组，为向量的代数化准备了工具。另一条线索是哈密顿提出四元数理论之后，由泰特和麦克斯韦发展出的向量分析，即建立在向量基础上的微积分运算，是解析几何之后，几何的代数化方面实质性的突破。这些领域的研究打破了三维、平直的欧几里得空间观念，为后来引进高维、弯曲的坐标系，以及曲线坐标系中的微分运算，奠定了基础。凯莱在前人的基础上研究不变量

理论（invariant theory），建立了矩阵的完整理论，引进了现代意义上的行列式的代数表达方式。凯莱运用矩阵理论对线性变换的研究引进了向量的代数定义，而这正是张量概念的先导。

2. 高斯建立在内蕴微分几何基础上的非欧几何理论。高斯不同于萨凯里、兰博特、波尔约、罗巴切夫斯基等人对非欧几何的研究，他从微分几何关于曲面的研究中自然地得出他的非欧几何概念，而不是和他的同辈一样局限在建立非欧几何的逻辑基础上，高斯开拓了非欧几何的更有意义的研究方向。黎曼继承高斯的内蕴几何思想，提出n维流形的概念，从而提出了深入研究代数形式的课题。黎曼的几何思想在拓展几何学的同时，提高了代数在表达几何对象方面的抽象程度。黎曼之后，在克里斯托弗、里奇和列维-契维塔等人的努力下，形成了张量分析这样的数学方法，黎曼几何学也因此而建立起来了。

1840—1849年期间，“数学的解放”开始了，解放的结果是代数与几何高度融合，其中的一个方向发展出被称为“张量演算”（即曲线坐标系中广义向量的微分运算）的数学方法，这使得建立方程的能力大大提高了。

19世纪的几何学和代数学开发了极强的数学功能，使得任何自然现象都可以用数学来描绘和计算。数学越来越紧密地与物理学相结合，尤其在关于空间和时间的理论方面。数学对象是客观存在的还是一些非物理的对象？实在论者认为，数学实体是独立存在，我们的数学理论是真正世界的真实描述，而相反的观点则认为数学对象是不存在的，它们仅仅是人类发明的结果。

古希腊时期发现的抛物线、椭圆、双曲线，到19世纪的时候，成为黎曼几何的基本要素。在当代，其他的非欧几里得几何应用到了相对论物理中，19世纪初的数学理论，有了直接的应用。

由于19世纪的数学历史太短、难度又比较大，迄今为止，研究的成果不是太多，大致有这么几本专著与此相关：The road to reality——A complete guide to the laws of the universe，Penrose著；Concepts of space——The history of theories of space in physics，Jammer著；Worlds out of nothing——A course in the history of geometry in the 19th century，Gray著。这三本书详细研究了黎曼几何学的历史，内容详实、论证精辟。另外有几本数学哲学的专著，讨论现代几何学的真理观问题。另外，外尔也写过一个小

册子，叙述了黎曼几何的历史，尤其是20世纪50年代以后的发展历程。

在前人工作的基础上，本书从黎曼几何学发展的全部历史过程中，选取了一个侧面的问题——高维弯曲空间观念的历史与思想，试图能够将新的几何学精髓介绍给非数学专业的读者，扩大数学文化的传播领域。

目　　录

第一章　空间哲学

几何学追求的是不依赖直观和经验，仅仅使用逻辑推理，得出关于空间的知识。这种理想源自欧几里得的《几何原本》，然而，欧几里得经常运用直觉，《几何原本》中的许多定义，并非逻辑形式的，而是几何形象的直观描述。从柏拉图开始，为了使几何学的基础更为稳固，不断地寻找与现实经验相区别的“理念”经验，这就是“柏拉图主义”的发端，形成早期的数学实在论。

第一节　柏拉图主义的空间观念

数学实在论认为数学理论是对真实世界的真实描述，而反实在论则认为数学没有一个本体（即，没有确定的对象，被我们的数学理论所左右），因此，这些理论不提供对世界的真实描述。数学实在论包含三种形态：柏拉图主义（认为存在抽象的数学对象，数学理论为对象提供了真实的描述）、心理主义（认为数学理论是对精神对象的真实描述）和数学物理主义（认为数学理论是对物理现实的非精神部分的真实描述）。同样，关于空间的几何学也存在实在论与反实在论的争论。空间是真实存在的本体（抽象的实体），还是心理建构的对象（思维中的存在），抑或是纯粹符号的构造？

柏拉图认为数学对象具有“客观存在性”，人们研究几何学就是要探求客观存在着的理想事物。宇宙间有两种存在，经验的存在和理念的存在。数学对象即存在于理念世界中，数学的“理念世界”是独立于人们经验之外的世界，是一种客观存在着的永恒世界。比如几何中的“圆”是一种理想的、完美的圆，而现实世界中的各种圆形物体都不是完美的圆。柏拉图主义强调数学的对象是抽象的存在，这种抽象存在是现实的，虽在我

们的感觉之外，但具有客观性。数学理论是对抽象的数学境界的描述，也就是说，它是一个非物质的、非精神的、非现实的时空中存在的对象，例如数字和集的概念。

反对柏拉图主义的结构主义认为：数学理论是抽象的结构描述，结构是类似的模式，或无对象的模板。数学中最重要的是结构，即数学对象之间的关系。但是，把关系——抽象对象之间的连接——作为抽象对象是不恰当的。关系无法定义对象的内部结构，而且结构性特征本身就是非结构性的，结构主义造成了本质的矛盾。

反柏拉图主义的另一个流派是心理主义，心理主义倡导数学家构建自己的对象和反现实的主张，心理主义提供了另一种模式的数学本体。它说，数学的对象，是精神的对象，数学是心理构建的产物。这种观点受到弗雷格、布劳威尔的批评，如果心理主义是正确的，那么数学证明是如何进行，并由什么来保证其正确性？

贝纳塞拉夫也反对柏拉图主义的认识论观点，他认为柏拉图主义不正确，因为它排除了数学知识的可能性。贝纳塞拉夫论证过程大致如下：(1) 人类存在于时空中；(2) 如果存在任何抽象的数学对象，那么它们存在于时空之外；(3) 如果存在任何抽象的数学对象，人类不能达到对他们的认识；(4) 如果数学柏拉图主义是正确的，那么人类不能获得数学知识；(5) 人类具有数学知识。因此，数学柏拉图主义是不正确的。

如果数学是时空以外存在的对象，那么他们不会有因果关系，因此，不能与我们有因果关系，因为他们不可能有任何因果关系。(1) 和 (2) 暗示，数学对象是人类完全无法进入的，也就是说，信息不能从数学对象传递给人类。

奎因，施泰纳，帕森斯、赖特、夏皮罗和卡茨认为 (3) 是错的，我们可以获得对数学对象的认识，信息可以通过数学对象，使我们能够取得这样的对象的知识。下面我们将解释像我们这样的生物如何能掌握抽象的数学知识对象。

我们从数学对象收到信息，由于数学对象是抽象和不承载因果关系的，所以不能产生承载信息的信号，但是可能存在这样的信号，它以某种方式通过非时空数学传递到我们身上。只要我们有数学直觉触及的跨领域接触，信息即使存在于非时空内，如果我们保持人类思维本身是无形、非时空的属性，也能够建立一个视图，根据我们从数学对象获取的信息，把

信号传递到真实时空的数学领域。

研究空间自然特征的几何学，涉及本体论，几何学的抽象对象是物体的空间性。在空间的几何化过程中，“人们完全信赖那些作为精确地得到规定的构成物之应用模式的操作方法[①]”，按康德的观点来说，几何学的本质已经从一切经验现实中释放出来了。

“一种理论什么时候才是真的?”维特根斯坦在他的《逻辑哲学论》里面表明，一切形而上学的命题实际上都是假命题，它们是没有意义的。一切真正的命题都是可以用观察肯定的事实。维特根斯坦为科学与哲学的划界提供了依据，他把自然科学看作是和哲学对立的，“全部的真命题就是整个的自然科学”。因此，凡属于科学的命题都是可以从观察得来的。

与此相反，休谟指出归纳在逻辑上不能成立。他指出不存在正确的逻辑论证，可使我们确认那些我们不曾经验过的事例。因此，即使观察到对象之间的对应，我们也没有理由对自己不曾经验过的对象作出任何推论。企图靠诉诸经验为归纳找根据，必然导致无穷的倒推，结果我们不能用观察为理论寻找证据。

休谟强调，我们的理论不可能从我们能够知其为真的东西中推出来——不可能从观察中推论出来。他由此得出结论：我们对理论的信念是非理性的。一切定律和理论本质上都是试探性、猜测性或假说性的，即使我们感到不能怀疑它们。

莱布尼茨曾和克拉克对空间的性质进行过讨论，中心问题是：空间有无本体论地位，它们具有几何或物理结构吗？与此相关，自然界中存在真空吗，真空问题与空间结构的关系如何？讨论中，克拉克强调物理空间，而莱布尼茨试图建立形而上学的终极空间。

对种种疑问，胡塞尔提出了解决方案。关于空间性质的数学——几何学——是根据经验产生的想象力所形成的形象。空间就是物质的广延，物质在空间中特征由其位置、体积和形状决定。而位置也就是没有广延的“点”的处所，因此体积表示了这种广延。胡塞尔在空间构造问题上的思考角度，就是阐释与空间观念的起源问题直接相关的几何学起源问题。

一切知识的合理性都由数学公理的自明性保证。在胡塞尔那里，这种

① 胡塞尔：《欧洲科学的危机与超越论的现象学》，王炳文译，商务印书馆 2001 年版，第 40 页。

自明性被称为“明见性”。几何学作为“在这里实际上已经运行的精神活动”，虽然人们对于它的确定来源一无所知，“然而，在这种无知中，本质上永远存在一种隐含的知识、一种因此也需要加以阐明的知识，可它的明见性是不容置疑的”。实现了几何学观念对象的客观化，观念性才走向“客观性”，从而使得“几何学从它被创建时起就具有一种独特的超时间的存在，而且，不论是谁以预先被给予的形式为基础重新构造出来的任何形式都会立即呈现出同样的客观性[①]”。

康德认为数学判断是综合的，因为一切数学知识始于经验。但经验知识又不具有普遍性和必然性，所以康德引进了“先天直观”这一概念，数学中原初的、无法用日常语言定义的概念反映了先天直观。数学中的“空间”——线性空间、赋范空间、算子空间等，已经超越了几何学的范围，到了更为抽象的领域。

几何学研究的对象，是易于表现于理性直观中的事物。几何学揭示的是关于空间的性质的知识，而“空间”的属性到底为何？几何学无法给出明确的说明。更由于空间往往涉及无限，超越了我们的感官感知的范围，因此更加难以在理性中把握。

笛卡尔最初认为空间是物体的广延，广延与物体相联系。不存在没有物体的空间，也无所谓虚空空间。但后来，笛卡尔开始考虑：作为独立实物的空间，可能存在不包含物体的空间。这使他把空间的基本概念应用到了在他的解析几何中。广义相对论以数学物理学的方式间接证明了笛卡尔的空间理想，并推广了三维欧几里得公理结构，实现现实状况的简化处理。

康德认为空间是物的广延，是现象存在的条件，空间并无实在性。康德对此有一个形象的比喻：

> 如乍雨乍晴时之虹可称为现象，而雨则称为物自身。此雨为物自身之概念，若仅在物理的意义言之则正当。盖斯时雨仅被视为在一切经验中，及一切与感官相关之位置中，皆规定其在吾人之直观中常如是而非别一形相者。但若吾人对于此经验的对象，第就其普泛的性

① Edmund Husserl, The Origin of Geometry, J. Derrida, Edmund Husserl, Origin of Geometry: An Introduction University of Nebraska Press, 1989, p. 175.

质，不考虑一切人类之感官对此经验的事物，所感是否相同，而研讨此经验的事物是否表现对象自身（所谓对象自身不能指雨点而言，盖雨点已为经验的对象，乃现象），则此表象与对象相关之问题，立成为先验的。于是吾人知不仅雨点纯为现象，即雨点之圆形，乃至其所降落之空间，皆非物自身而仅为吾人感性直观之变状或其基本的方式，至先验的对象，则永为吾人所不能知者。

几何学的概念，来自感性世界，依赖此感性世界，一切几何学的知识，具有直观的证明。抽象的直线、圆、坐标系等概念，均由可知觉到的外部世界所决定。因此，几何学存在的条件——关于空间的概念——也有同样的演绎要求。

空间作为一切事物存在的条件，之所以可以由数学原理揭示其性质，是由于数学原理具有直观性的缘故。换言之，数学的本质特征在于其经验性，数学的客观效力来自于此，数学公理的自明性亦来自于此，也是数学能够应用于现象的原因。

绝对空间观念在牛顿物理学中被充分表达出来，其特征是空间与物质同样表现为独立而真实的存在，哪怕是虚空空间，也要刻画其物理特性。立足于欧几里得几何的学者们，面对的是点、线、面等抽象对象，这一切来源于原始经验，即使是解析几何也把空间作为一个盛放物体的盒子。物体以某种方式排列在盒子——空间中，因此，空间被充满，成为完整的存在。

柏拉图的实在论观念在数学发展的早期，有着深刻的指导意义。这种指导直到 17 世纪的近代数学，都发挥着巨大的作用。近代数学家伽利略、帕斯卡、笛卡尔、牛顿和莱布尼茨都相信自然界的数学规律都是先天存在的，数学对象是具有客观性的理念实体，需要通过理性的心智活动去把握，而不应受到直观感觉的干扰。这种观念推动了微积分、射影几何学、代数学、复数理论等分支的创建和发展。

自 19 世纪中期开始，由于非欧几何和抽象代数的建立，柏拉图主义逐渐趋于寂静。代之而起的是数学心理主义和数学物理主义，甚至反实在论观点。在这种情况下，形式主义开始盛行，希尔伯特的《几何基础》是代表了这种思潮的重要成果。希尔伯特在给弗雷格的信中写道：“如果任意给定的公理并不矛盾，其后果之一是真正的由公理定义的东西存在。这

是我的真理标准。①”

第二节　空间的数学化

“空间观念”指的是用来概括空间经验的抽象概念，我们把空间想象成与物体不同的东西，是物体存在的外部条件，空间本身是独立的。希腊数学建立之后，随着几何的代数化进程，尤其是坐标系产生之后，空间被作为几何的广延。空间被赋予了数学的性质，它是连续、无限延展、三维、均匀、各向同性、可度量的。这些观念，使空间几何化了。

芝诺曾说：“如果处所存在，它在什么之中呢？因为所有的存在物都在某物之中，而且在某物之中就是在一个处所中。因此，处所将会在一个处所中，如此等等以至无穷。所以，处所不存在。②”

希腊人的空间观念以宇宙论为背景，还没有被数学化。早期的希腊空间观念与中国的“天圆地方”极为类似，认为宇宙是一个球体，地球在圆心的位置上。

爱利亚学派的代表人物巴门尼德明确肯定了宇宙的球状结构：

> 由于有一个最远的边界存在，它各个方面都被封闭，如同一个滚圆的球体，从中心到每一个方向都相等。不应该某些地方大一点，某些地方小一点。因为既没有非存在妨碍存在与它的同类相连结，存在也不可能这里大一些那里小一些，因为它是完好无损的，存在在每个方面都与自己同一，它在自己的界限内保持一致。

从这里开始，数学家和物理学家们踏上了探索空间问题的征程。欧几里得、柏拉图、亚里士多德、阿基米得、托勒密、笛卡尔、伽利略、牛顿、爱因斯坦、外尔等伟大的智者们，逐步形成了用代数和几何相结合的方法表达空间问题的范式。纵观历史，人们最根本的问题是空间观念，即我们存在的尺度。在过去的两千多年的时间里，数学物理学的发展，建立起数学化的空间观念。欧几里得的空间，本质上是平坦宇宙的拓扑。当人

① E. J. Khamara，“莱布尼茨的空间理论：一个重建，”哲学季刊 43［1993］：72－88

② Cornford，*Plato and Parmenides*，Routledes and Paul LTD. 1939，p. 149.

们考虑空间弯曲的维度之后，卡鲁扎形成了五维空间的理论。

这一切理论的起点，是关于三角形内角和的知识。古希腊数学家欧多克索斯提出“三角形内角和等于两直角的和”，毕达哥拉斯证明了这个命题。他的方法是：设三角形 ABC，过 A 作平行线 DE 平行于 BC。则角 DAB 等于角 ABC，角 EAC 等于角 ACB。分别与角 BAC 相加，和等于角 DAB、BAC 和 CAE，即角 DAB 和 BAE（两直角）之和。

这个证明清楚地表明，平行线的性质在关于空间直观的问题中，起着基础作用。毕达哥拉斯定理则给出了用一维量表达二维几何结构的例子，这个思路后来演化成用较低维表达较高维正交维度的方法。此时，距离黎曼表达抽象空间还有两千多年的时间，但这可以看做高维空间的第一次数学实现。

沿着这个思路，将两条正交直线拓展为三条正交直线后，现实的三维空间被真正地数学化了。在人们重新审视平行公理之后，波尔约和罗巴切夫斯基推进了弯曲的几何空间的发展。把时间作为一个维数使用，可以追溯到 19 世纪。然而，当使用时间作为真正的尺度，由长度来代表，并与三维空间尺寸相结合之后，以时间作为一个独立的直角坐标而形成的四维空间，逐渐变为我们的深刻空间观念，并最终形成闵科夫斯基四维空间。

空间和时间四个维度的提出，标示人类感官知觉的限制。这种限制最有可能的原因是两千多年来建立的三维空间尺度和增加时间的类空维度。克服人类感官知觉的限制，便达到更高的概念化维度。从黎曼的最初设想，到卡鲁扎第一个建立五维空间的数学，人类用了 100 年。

空间概念在被数学化之前，是关于位置、运动场所、连续或分立的存在等实体性的观念。这些观念一直存在于人们的意识中，尤其是空间是连续的还是分离的？对这个问题的分析，使古希腊人建立起了原子论理论。然而，连续性空间始终萦绕在人们的脑际，以致到 20 世纪初，人们仍然保留“以太”这种物质，以表达对空间连续性的依赖。以太在西方文化中代表宇宙的弥漫物质，它充满宇宙，并通过物体的孔隙，渗透到物体中。早期的空间观念，认为空间是物质连续分布的一种实体。

坐标系出现之后，坐标系将空间作了定量的处理，牛顿在所谓惯性系的坐标系中，定量刻画了物体的运动，并将惯性系称为绝对空间。而麦克斯韦更将坐标系称为场，连续空间的实体化特征重新被确定下来。

第三节　绝对空间观念

牛顿创造了不同于前人的空间观念。牛顿的方法有一点与前人一致：都依赖几何学。但牛顿没有把几何学看做假想的命题系统，而是认为几何学不仅是公理和定义的逻辑演绎，而且，几何学是力学的分支。

> 几何学基于力学，是普遍力学的一部分。直线和圆构造了几何学，但它们属于力学。几何学没有告诉我们如何画直线和圆，只告诉我们直线和圆的抽象特性。刻画直线和圆不是几何问题，解决这个问题的方法存在于力学。

牛顿赋予了几何曲线以力学的特性，由此，牛顿构造了绝对空间概念，这出于对运动的基本法则的构建需要。牛顿著名的宣言“我不需要假设”，即是对几何学基本性质的深刻认识。牛顿在《自然哲学的数学原理》中定义了绝对空间：

> 绝对空间：其自身特性与一切外在事物无关，处处均匀、永不移动。相对空间是一些可以在绝对空间中运动的结构，或是绝对空间的量度，我们通过它与物体的相对位置感知它。绝对空间与相对空间在形状与大小上相同，但在数值上并不总是相同。

牛顿引入绝对空间，仅仅是为了对空间进行度量，这与现代数学用度量空间表达几何对象是相同的。这种策略避免了对空间性质的直观描述，不再解释它的存在方式。绝对空间观念使牛顿有了逻辑上的必要依据，从而得出了牛顿第一定律。

牛顿第一定律表达了绝对运动的固有性质：

> 绝对运动是物体由一个绝对处所迁移到另一个绝对处所；相对运动是由一个相对处所迁移到另一个相对处所。一艘航行的船中，物体的相对处所是它所占据的船的一部分，或物体在船舱中充填的部分，它与船共同运动；所谓相对静止，就是物体滞留在不动空间的同一部