普通高等教育“十二五”规划教材

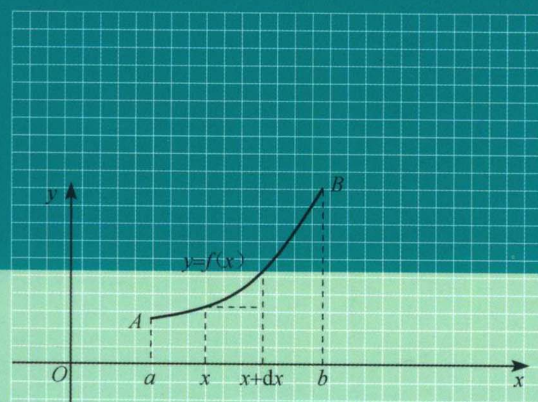
大学数学教学丛书

丛书主编　潘庆年　庄容坤

高等数学

（下册）

主编　罗　辉　邬振明



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
大学数学教学丛书
丛书主编　潘庆年　庄容坤

高等数学

（下册）

罗　辉　邬振明　主编
庄容坤　吴红叶　刘玉彬
李文波　杨　莹　陈国培　参编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书分为上、下两册. 上册内容包括极限，一元函数微积分学，向量代数与空间解析几何（共 7 章）；下册内容包括多元函数微分学，重积分，曲线积分与面积分，级数理论，常微分方程（共 5 章）. 每章都给出 A，B 两类复习题，A 类题为基本题，学生必须掌握；B 类题有一定的难度，具有综合性强的特点，适合学有余力并准备考研的学生使用. 本书在教育思想、教育观念上，强调培养学生的创新精神和应用能力；并继承传统教材中的结构严谨、逻辑清晰的优点，做到突出重点、详略得当、通俗易懂、便于自学.

本书适合普通高等学校理工类、经济管理类等非数学专业的学生使用，也可供自学者及有关教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：全 2 册/罗辉，邬振明主编. —北京：科学出版社，2012
（大学数学教学丛书/潘庆年，庄容坤主编）
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-034626-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①罗…②邬… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 198006 号

责任编辑：姚莉丽　王胡权 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：阎　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2012 年 8 月第一次印刷　印张：31 1/2
字数：681 000

定价：56.00 元（上、下册）
（如有印装质量问题，我社负责调换）

目录 CONTENTS

第 8 章　多元函数微分法及其应用

8.1　多元函数的极限与连续 …… 2
一、平面点集　n 维欧氏空间及多元函数 …… 2
二、二元函数的极限 …… 7
三、二元函数的连续性 …… 10
习题 8.1 …… 12
8.2　偏导数与全微分 …… 13
一、偏导数的定义及其计算 …… 13
二、全微分 …… 17
习题 8.2 …… 20
8.3　方向导数与梯度 …… 21
一、方向导数 …… 21
二、梯度 …… 24
习题 8.3 …… 25
8.4　多元复合函数的微分法 …… 26
一、多元复合函数的求导法则 …… 26
二、全微分形式不变性 …… 30
习题 8.4 …… 31
8.5　隐函数的求导公式 …… 32
一、一个方程的情形 …… 32
二、方程组的情形 …… 34
习题 8.5 …… 36
8.6　高阶偏导数 …… 37
一、高阶偏导数 …… 37
二、高阶全微分 …… 40
习题 8.6 …… 41
8.7　多元微分学在几何上的应用 …… 42
一、空间曲线的切线与法平面 …… 42
二、曲面的切平面与法线 …… 45
习题 8.7 …… 48

8.8 多元函数的极值 …… 49
一、多元函数的极值 …… 49
二、条件极值 拉格朗日乘数法 …… 53
习题8.8 …… 57
复习题A …… 57
复习题B …… 59

第9章 重积分

9.1 二重积分的概念与性质 …… 62
一、二重积分实际背景(实例) …… 62
二、二重积分的定义 …… 64
三、二重积分的性质 …… 65
习题9.1 …… 67
9.2 二重积分的计算 …… 67
一、直角坐标系下化二重积分为二次积分 …… 67
二、极坐标系下化二重积分为二次积分 …… 75
习题9.2 …… 81
9.3 三重积分概念 …… 83
一、三重积分的定义 …… 83
二、三重积分的物理意义 …… 84
三、化三重积分为累次积分进行计算 …… 84
习题9.3 …… 90
9.4 重积分的应用 …… 91
一、曲面的面积 …… 92
二、引力 …… 94
三、质心 …… 95
四、转动惯量 …… 97
习题9.4 …… 99
复习题A …… 100
复习题B …… 103

第10章 曲线积分与曲面积分

10.1 第一类的曲线积分 …… 106
一、第一类的曲线积分的概念与性质 …… 106
二、第一类的曲线积分的计算 …… 108
习题10.1 …… 110

10.2 第二类的曲线积分 …… 110
一、第二类的曲线积分的概念与性质 …… 110
二、第二类的曲线积分的计算方法 …… 113
三、两类曲线积分之间的联系 …… 115
习题 10.2 …… 116
10.3 格林公式和曲线积分与路径无关的条件 …… 117
一、格林公式 …… 117
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 …… 121
三、二元函数的全微分求积 …… 123
习题 10.3 …… 125
10.4 对面积的曲面积分 …… 126
一、对面积的曲面积分的概念与性质 …… 126
二、对面积的曲面积分的计算 …… 127
习题 10.4 …… 129
10.5 对坐标的曲面积分 …… 130
一、对坐标的曲面积分的概念与性质 …… 130
二、对坐标的曲面积分的计算 …… 134
三、两类曲面积分之间的联系 …… 136
习题 10.5 …… 139
10.6 高斯公式 斯托克斯公式 …… 139
一、高斯公式 …… 139
二、斯托克斯公式 …… 142
三、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式之间的关系 …… 144
习题 10.6 …… 144
复习题 A …… 145
复习题 B …… 146

第 11 章 无穷级数

11.1 常数项级数 …… 149
一、常数项级数的基本概念 …… 149
二、收敛级数的基本性质 …… 151
三、正项级数及其审敛法 …… 154
四、交错级数及其审敛法 …… 159
五、绝对收敛与条件收敛 …… 161
习题 11.1 …… 164
11.2 幂级数 …… 166

一、幂级数及其收敛性 …… 166
二、幂级数的运算 …… 170
三、幂级数的和函数 …… 171
习题 11.2 …… 172
11.3 函数展开成幂级数及幂级数展开式的应用 …… 172
一、函数展开成幂级数 …… 172
二、幂级数展开式的应用 …… 178
三、欧拉公式 …… 180
习题 11.3 …… 182
11.4 傅里叶级数 …… 182
一、正弦级数和余弦级数 …… 188
习题 11.4 …… 193
复习题 A …… 193
复习题 B …… 195

第 12 章 微分方程

12.1 微分方程的概念 …… 198
习题 12.1 …… 199
12.2 变量分离方程与齐次方程 …… 200
一、变量分离方程 …… 200
二、齐次方程 …… 202
习题 12.2 …… 203
12.3 一阶线性微分方程与伯努利方程 …… 204
一、一阶线性微分方程 …… 204
二、伯努利方程 …… 206
习题 12.3 …… 207
12.4 全微分方程 …… 208
习题 12.4 …… 210
12.5 可降阶的高阶微分方程 …… 211
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 211
二、$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 212
三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 213
习题 12.5 …… 215
12.6 高阶线性微分方程 …… 215
习题 12.6 …… 219
12.7 常系数齐次线性微分方程 …… 219

习题 12.7 …… 222
12.8 常系数非齐次线性微分方程与欧拉公式 …… 222
一、常系数非齐次线性微分方程 …… 222
二、欧拉方程 …… 225
习题 12.8 …… 226
复习题 A …… 227
复习题 B …… 228
参考文献 …… 230

CHAPTER

第 8 章　多元函数微分法及其应用

第 1～6 章中，我们讨论的函数都只含有一个自变量，也就是一元函数. 但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是含有两个或更多个自变量的函数，这种函数称为多元函数.

本章将讨论多元函数的基本概念、多元函数微分法及其应用. 讨论中我们将以二元函数为主.

8.1 多元函数的极限与连续

一、平面点集 n 维欧氏空间及多元函数

一元函数是定义在数轴 $\mathbf{R}^1$ 的一个子集上的函数，在讨论一元函数时，经常会使用一维的区间和邻域等概念. 为了能将有关一元函数的微分、积分等重要概念推广到多元函数的情况，我们首先把区间和邻域的概念加以推广，同时还涉及其他一些概念.

1. 邻域

我们知道，集合 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$就表示坐标平面.

平面点集是指坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 具有性质 }P\},$$

例如，平面上以点(a,b)为圆心，r 为半径的圆内所有点的集合为

$$E=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a^2)+(y-b)^2}<r\}.$$

下面，我们引入关于平面点集的一些基本概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体，称为**点 P_0 的 δ 邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid\rho(P,P_0)<\delta\},$$

其中 $\rho(P,P_0)$表示 P 到 P_0 的距离，也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在点 P_0 的 δ 邻域中除去点 P_0 后所得的点集称为**点 P_0 的去心 δ 邻域**，记作 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<\rho(P,P_0)<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为中心、δ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$的全体，而 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$则是圆内部去掉圆心 P_0 的点的全体.

如果不强调邻域的半径，则用 $U(P_0)$表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\overset{\circ}{U}(P_0)$.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

2. 内点、外点和边界点

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下 3 种关系中的一种：

(1) **内点**：设点 P 是平面点集 E 中的一点，若存在点 P 的某邻域 $U(P)$，使得

$U(P)\subset E$,则称点 P 为点集 E 的**内点**. 如图 8.1 所示,点 P_1 为点集 E 的内点;

(2) **外点**:设对平面上的点 P 及平面点集 E,若存在点 P 的某邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称点 P 为点集 E 的**外点**. 如图 8.1 所示,点 P_2 为点集 E 的外点;

(3) **边界点**:如果点 P 的任一邻域内既含有属于平面点集 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称点 P 为点集 E 的**边界点**. 如图 8.1 所示,点 P_3 为点集 E 的**边界点**.

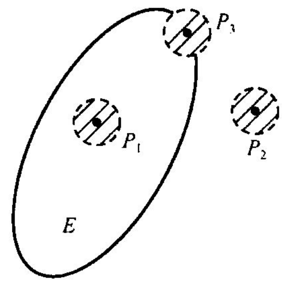


图 8.1

点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**,记作 ∂E.

E 的内点必属于 E,E 的外点必不属于 E,而 E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E.

3. 聚点

点集 E 中有一种很重要的点,下面给出它的定义.

定义 8.1.1 如果对于任意给定的 $\delta>0$,点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内总有 E 中的点,则称点 P_0 是 E 的**聚点**.

由聚点的定义可知,点集 E 的聚点 P,可以属于 E,也可以不属于 E.

例如,设 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是平面点集. 满足 $1<x^2+y^2<2$ 的点 (x,y) 是 E 的内点;满足 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 是 E 的边界点,但它们不属于 E;而满足 $x^2+y^2=2$ 的点 (x,y) 也是 E 的边界点,它们都属于 E;该点集 E 以及它的边界上的一切点都是 E 的聚点.

4. 区域

如果点集 E 中的点都是由其内点组成,则称 E 为**开集**,如集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开集.

如果点集 E 的余集 E^C 为开集,则称 E 为闭集,如集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是**闭集**.

有的集合既非开集,也非闭集,如 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 既非开集也非闭集.

如果集合 E 中的任意两点 P_1,P_2,都可用折线连接起来,且该折线上的点都属于 E,则称集合 E 为**连通集**.

如果集合 E 是一个连通的开集,则称开集 E 为**开区域**或**区域**.

例如,集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<9\}$ 是一个开区域.

开区域连同它的边界一起组成的集合,称为**闭区域**. 例如集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$ 是一个闭区域.

如果集合 E 可以包含在以原点为中心的某个圆内,则称 E 为**有界集**,否则就称

该区域 E 为**无界集**. 若区域 D 为有界集，则称 D 为**有界区域**. 例如，集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是有界闭区域，而集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$ 是无界开区域，集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$ 是无界闭区域.

5. *n* 维欧氏空间

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离记作 $\rho(P,Q)$，规定

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

我们把 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所组成的集合，称为 **n 维空间**.

可以证明，这样定义的距离满足下述三个条件：

(i) $\rho(P,Q)\geqslant 0$，当且仅当 P 与 Q 重合时，等号成立；

(ii) $\rho(P,Q)=\rho(Q,P)$；

(iii) $\rho(P,Q)\leqslant\rho(P,R)+\rho(R,Q)$，$P,Q,R$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的任意三点.

具有这种距离性质的 n 维空间称为 n 维欧几里得(Euclid)空间，简称 **n 维欧氏空间**，记作 $\mathbf{R}^n$.

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 常用单个字母 x 来表示，即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，x_i 称为该点的第 i 个坐标. 当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，称该元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$. 特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**坐标原点**或 **n 维零向量**.

对集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素定义如下的线性运算：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

(1) 向量的加法运算

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n);$$

(2) 向量的数乘运算

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集是指具有某种性质 p 的 n 元实数组的集合，即

$$E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{ 具有性质 }p\},$$

且前面关于二维空间 $\mathbf{R}^2$ 中点集的所有概念都可以推广到 n 维空间. 例如，可类似地定义 n 维空间中点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^n\mid\rho(P,P_0)<\delta\}.$$

以邻域为基础，可以定义 n 维点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念，不再一一赘述.

6. 多元函数

在实践中常常会遇到因变量依赖于多个自变量的情形，举例如下.

例 8.1.1 圆锥体的体积 V 和它的高 h 及底面半径 r 之间具有关系 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. 当 r 和 h 在点集 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就随之确定.

例 8.1.2 设有两个电阻 R_1,R_2，并联后总电阻为 R，由电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

当 R_1,R_2 在点集 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

例 8.1.3 设某种产品每件的销售价格为 x 元，总销售量为 y 件，则该产品的销售利润为 $z=\frac{1}{3}xy-p$，当 x,y 在某个范围中给定以后，由上式就可以确定 z.

上面三个例子虽然来自不同的实际问题，但都说明，在一定条件下，变量之间存在着一种依赖关系. 这种关系给出了一个因变量与几个自变量之间的对应法则，依照这个法则，当自变量在允许的范围内取一组数时，因变量有确定的值与之对应. 将这种共性抽象成二元函数的定义如下：

定义 8.1.2 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),\quad P\in D,$$

其中点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**.

上述定义中，与自变量 x,y 的一对值（即二元有序实数组）(x,y) 相对应的因变量 z 的值，也称为 f 在点 (x,y) 处的函数值，记作 $f(x,y)$，即 $z=f(x,y)$. 函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

一元函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 可以看作 x 轴上一点 P 的坐标，定义域 D 可以看作 x 轴上的一个点集. 类似地，二元函数 $z=f(x,y)$ 的自变量 x,y 可以看作 xOy 平面上一点 P 的坐标，定义域 D 可以看作 xOy 平面上的一个点集，三元函数也类似. 因此，无论是一元函数还是多元函数，都可以把自变量看作一点 P 的坐标，于是一元函数与多元函数可以统一地记为 $u=f(P)$，它表示对于定义域 D 中的任意一点 P，函数 u 都有一个唯一的值与之对应.

与一元函数类似，一个多元函数如果是从实际问题中产生的，则这一函数的定义域应根据实际问题来确定. 对于由算式表示的函数 $z=f(x,y)$，我们约定：如果未说

明自变量的变化范围,则它的定义域就是使该算式有意义的那些自变量值的全体组成的点集,称为这个多元函数的**自然定义域**.

例 8.1.4 求下列二元函数的定义域:

(1) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad(a>0)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

解 (1) 容易看出,当且仅当自变量 x,y 满足不等式 $a^2-x^2-y^2\geqslant 0$ 时函数 z 才有定义,因此函数 z 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$,$D$ 的几何表示是平面上以原点为圆心、a 为半径的圆内部及圆周上的点的全体(图 8.2). 这是一个有界闭区域.

(2) $\sqrt{4-x^2-y^2}$ 作分母,因此函数 z 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 4-x^2-y^2>0\}$,即

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\},$$

D 的图形是不包括边界的以原点为圆心、2 为半径的圆内部(图 8.3). 这是一个有界开区域.

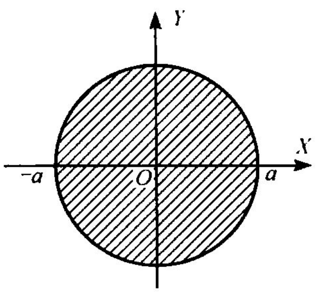


图 8.2

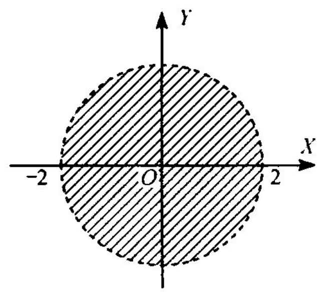


图 8.3

例 8.1.5 求下列函数的定义域:

(1) $z=\ln(x+y)$;

(2) $z=\arcsin(x^2+y^2)$.

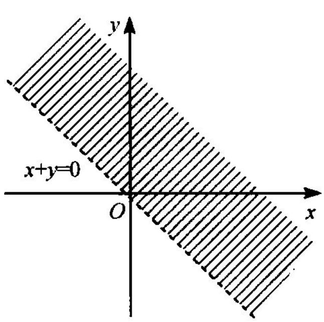


图 8.4

解 (1)函数 z 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\},$$

其几何图形是 xOy 平面上位于直线 $y=-x$ 上方的半平面,不包括直线在内(图 8.4). 这是一个无界开区域.

(2)函数 z 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},$$

其几何图形是 xOy 平面上以原点为圆心的单位圆(包括圆周)这是一个有界闭区域.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=$

$f(x,y)$为竖坐标在三维空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当(x,y)遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$的**图形**(图 8.5 或图 8.6). 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

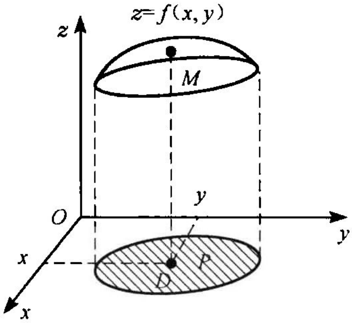


图 8.5

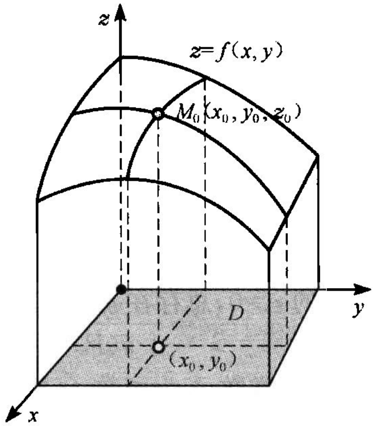


图 8.6

例如，由空间解析几何知道，线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面，而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

二、二元函数的极限

我们知道，一元函数 $y=f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的意义是：点 x 无限趋近于点 x_0 时，函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A. 由于数轴上点 x 可以从点 x_0 的左边或者右边趋近于点 x_0，因而我们有左极限与右极限的概念.

现在要考虑二元函数 $z=f(x,y)$的极限，这就要考察当平面上的点 $P(x,y)$无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$时，函数 $z=f(x,y)$的变化趋势. 在平面上，点 $P(x,y)$趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$的方式可以是多种多样的，例如，点 P 可以沿着经过点 P_0 的任意一条直线趋近于点 P_0，也可以沿经过点 P_0 的任意一条曲线趋近于点 P_0. 由点 P 趋近于点 P_0 的方式的多样性可知，对二元函数不可能有左、右极限的概念. 但是，不管采取哪种方式，只要点 $P(x,y)$趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$，则点 P 与点 P_0 的距离 $\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$趋于零. 因此，总可以用 $\rho\to 0$ 来表示 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的变化过程.

因此，二元函数的极限概念可描述如下：设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某去心邻域内有定义，如果动点 $P(x,y)$按任意方式无限趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$时，函数的对应值 $f(x,y)$无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$当$(x,

$y)\to(x_0,y_0)$时的极限.下面用"ε-δ"语言描述这个极限概念.

定义 8.1.3 设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点.如果存在常数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么就称常数 A 为**函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限**,记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0),\text{也记作}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

为了区别一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫做**二重极限**.三元及三元以上的多元函数的极限可以类似地定义:

设 n 元函数 $f(P)$的定义域为 D,P_0 是 D 的聚点且 $P_0\in D$.如果存在常数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,$0<\rho(P,P_0)<\delta$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么就称常数 A 为函数 $f(P)$当 $P\to P_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

例 8.1.6 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证:$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证法一 函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}$的定义域为 $D=\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$,点 $O(0,0)$为 D 的聚点.由于

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以,对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)}-0\right|<\varepsilon,$$

只需 $x^2+y^2<\varepsilon$,故取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$,即点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(O,\delta)$时,总有

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

成立,所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

求一元函数极限的四则运算法则、夹逼定理等法则可以推广到多元函数.在进行多元函数极限的证明和计算时,这些法则是很有用的.例如,例 8.1.6 还有以下两种证法:

证法二 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}+\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y^2\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}$,由于函数 x^2 与 y 无关,因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.可见当

$(x,y)\to(0,0)$时，$x^2\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}$是无穷小与有界函数的乘积，其极限为零. 类似地有$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y^2\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}=0$.

因此，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)}=0+0=0$.

证法三 令$u=x^2+y^2$，则$(x,y)\to(0,0)$等价于$u=x^2+y^2\to 0$. 因此，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

这里我们通过变量代换将二元函数的极限化成了一元函数的极限问题.

例 8.1.7 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证法一 因为$x^2+y^2\geqslant 2|x||y|$，于是

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant|x|\frac{|xy|}{2|xy|}=\frac{1}{2}|x|,$$

即

$$-\frac{1}{2}|x|\leqslant\frac{x^2y}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|x|.$$

而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\pm\frac{1}{2}|x|=\lim_{x\to 0}\pm\frac{1}{2}|x|=0,$$

于是由夹逼定理，得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证法二 本例也可以利用极坐标证明：令$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则$(x,y)\to(0,0)$等价于$\rho\to 0$. 因此，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\sin\theta=0$.

必须注意，所谓二重极限存在，是指$P(x,y)$按任意方式无限趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$都无限趋近于A. 因此，如果P以某些特殊方式趋近于P_0时函数趋于某一确定值，这样尚不能断定函数的极限存在. 但是，只要发现P以两种不同方式趋于P_0时函数趋于不同的值，则立即可以断定函数在P_0的极限不存在.

例 8.1.8 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

当$P(x,y)\to O(0,0)$时极限是否存在.

解 显然，当点$P(x,y)$沿x轴趋近于点$O(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0;$$