中学数学概率题解

宿迁县教师进修学校编

前言

这是一本根据《中学数学教学大纲（试行草案）》中概率部分的内容而编写的概率题解。它所涉及的内容是概率论中最基本的部分—**事件关系**及**概率计算**，其深度和广度略高于《大纲》的要求。

本书选材内容广泛，题目类型较多，注意到题目的代表性，典型性，每一类型的题解前均有内容提要或基本公式。在内容的编排上，密切结合中学教材，重视解题技巧，由浅入深，适当提高。书末附录有部编高中数学教材第三册第五章（概率）的习题答案和《普阿松分布表》、《对数阶乘表》，本书可作为中学教师教学参考资料，也可作为中学生学习概率的辅导读物，对于师专学生也有一定的参考价值。

在编写本书的过程中，始终得到了南京师范学院数学系概率组教师苏起凡、金炳陶二同志的具体指导和帮助，并由他们审核定稿。借此表示感谢。

宿迁县教师进修学校

一九八〇年七月

目 录

一、事件间的相互关系

内容提要

随机事件简称**事件**，它广泛地存在于客观实际中，由于概率论的研究对象是随机事件，所以研究随机事件及其相互关系将有助于对随机现象的理解和便于对复杂事件的概率计算。事件通常用字母A、B、C、……来表示，它的两个极端情形，**必然事件**与**不可能事件**分别用字母U与V来表示。

事件间主要关系与运算列举如下：

1、如果事件A发生，必然导致事件B发生，则称事件B**包含**事件A，或称A蕴涵B，记作$B\supset A$或$A\subset B$。

例如对于在自然数中任取一数的随机试验来讲，令

A＝{抽得的一数是2、4、6或8}

B＝{抽得的一数是偶数}

显然事件B包含事件A，即$B\supset A$。

2、如果$B\supset A$，$A\supset B$同时成立，则称A与B**等价**，记作$A=B$。

续上例，令

A＝{2、4、6、……、2n、……}（n是自然数）

B＝{偶数}

显然$A\subset B$同时$B\supset A$，故$A=B$。

3、事件A与事件B至少一个发生而构成的事件，称为事件A与事件B的**和或并**，记作$A \vee B$或$A+B$。

续上例，令

$$A=\{1、2、3、4、5\}$$

$$B=\{4、5、6、7\}$$

显然$A+B=\{1、2、3、4、5、6、7\}$

两事件和的概念可以推广到有限个事件的和的情形。事件

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n} A_i$$

表示"事件A_1，A_2，……，A_n至少有一个发生"。

一般更可推广到事件为可列(数)个的情形。事件

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

表示"事件A_1，A_2，……，A_n……至少有一个发生"。

4、事件A与事件B同时发生而构成的事件，称为事件A与事件B的**积或交**，记作$A \cap B$或AB。

续上例，显然有

$$AB=\{4、5\}$$

两事件积的概念也可推广到事件为有限个或可列个的情形。即

$$A_1A_2\cdots\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1A_2\cdots\cdots A_n\cdots\cdots=\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

它们分别表示"事件A_1，A_2，……，A_n同时发生"或"事

件A_1，A_2，……，A_n，……同时发生”。

事件的和，积满足交换律，结合律以及和对积与积对和的分配律。

5、事件A与事件B如不可能同时发生，即如果

$$AB = V$$

则称A与B是**互不相容**的事件或称**互斥**事件。

续上例，令

$$A = \{1、3、5、7、9\}$$

$$B = \{2、4、6、……、2n、……\}$$

因为 $AB = V$

所以A与B是互不相容的事件。

6、两事件A与B，如果两关系

$$A + B = U$$

$$AB = V$$

同时成立，则称A与B是互相**对立**的事件，即**互逆**事件，记A的对立事件为$\overline{A}$。

续上例，令

$$A = \{2n+1\}$$

$$B = \{2n\}$$

显然 $A + B = U$

$$AB = V$$

故A与B是互相对立的事件，即可记$\overline{A} = B = \{2n\}$。

可见，两事件互为对立事件一定互不相容，反之则不一定。

7、事件A发生而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与事件B的**差**，记作$A - B$。

续上例，令

$$A=\{小于10的自然数\}$$

$$B=\{小于15而大于5的自然数\}$$

显然 $A-B=\{1、2、3、4、5\}$

$$B-A=\{10、11、12、13、14\}$$

由于差的运算是不满足交换律的，为方便起见，常常把事件差转化成事件的积来处理，即

$$A-B=A\overline{B}^{*}$$

8、若干个事件A_1，A_2，……，A_n至少必定发生其一，即如果

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=U$$

则称事件A_1，A_2，……，A_n构成一个**完备事件群。**

以后对我们特别重要的是**两两互不相容的完备事件群。**即如果两关系

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=U$$

$$A_iA_j=V\ (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$$

同时满足，则称事件A_1，A_2，……，A_n构成一个两两互不相容的完备事件群。

两两互不相容的完备事件群中的每一个事件A_i称为**基本事件。**

如果其中无论哪一个事件均不比其他任一事件发生的可能更大时，就称这些事件是**等可能事件。**

例如对于一颗骰子掷一次的试验，令

$$A_i=\{掷得的i点\}\ (i=1、2、\cdots\cdots、6)$$

---

* 关于它的证明见第10题。

显然 $$\sum_{i=1} A_i = U$$

$$A_i A_j = V \quad (i \neq j;\ i,\ j = 1、2、\cdots\cdots、6)$$

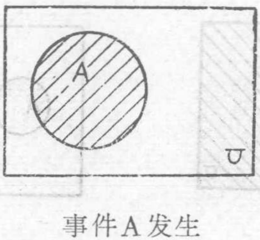
所以一颗骰子掷一次的试验，所构成的事件组

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$$

就是一个由六个等可能事件组成的两两互不相容的完备事件群。

以上列举的事件间的种种关系与集合间的关系相类似，所以运用维恩（Venn）图来表示事件及它们之间的关系，有助于深入理解事件间的相互关系。

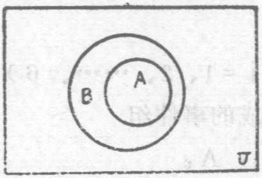
维恩图的作法如图所示，若点取自给定的正方形内表示必然事件U，若点取自其中划有阴影的小区域A则表示事件A发生。



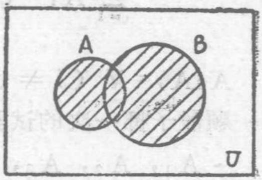
事件A发生

按照上述想法，表示事件间主要关系的维恩图如下：

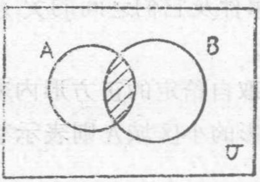
$A \subset B$



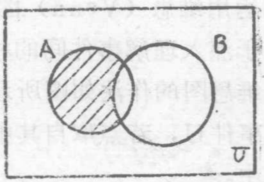
$A + B$



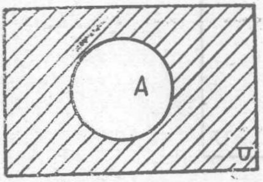
$A \cdot B$



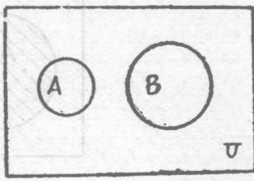
$A - B$



$\overline{A}$



A、B互不相容



（$A + B$，$A \cdot B$，$A - B$，$\overline{A}$分别为图中的阴影部分）

题　　解

1、设事件U、A、B、C为

$U=\{$一切自然数$\}$，

$A=\{1、3、5、7、9\}$，

$B=\{2、4、6、8、10\}$，

$C=\{5、6、7、8、9\}$。

试求下列事件：

(1) $A+C$；(2) AB；(3) $A+B+C$；(4) ABC；

(5) $A+BC$；(6) $A\overline{B}$；(7) $B-C$；(8) $\overline{AB}$。

解：(1) $A+C=\{1、3、5、6、7、8、9\}$；

(2) $AB=V$；

(3) $A+B+C=\{1、2、3、4、5、6、7、8、9、10\}$；

(4) $ABC=V$；

(5) $A+BC=\{1、3、5、6、7、8、9\}$；

(6) $A\overline{B}=\{1、3、5、7、9\}$；

(7) $B-C=\{2、4、10\}$；

(8) $\overline{AB}=U$。

2、设事件U、A、B、C在下列指定区间上取得一切实数，已知

$U=\{0\leqslant x\leqslant 20\}$，$A=\{0\leqslant x<5\}$，

$B=\{3<x\leqslant 10\}$，$C=\{7<x<15\}$。

试求下列事件：

(1) $A+B$；(2) AC；(3) $\overline{A}\,\overline{B}$；(4) $\overline{U}$；

(5) $\overline{A+B}$；(6) $\overline{C}$；(7) $\overline{AB}$；(8) $A+B+C$。

解：（1）$A+B=\{0\leqslant x\leqslant 10\}$；

（2）$AC=V$；

（3）$\overline{A}\,\overline{B}=\{10<x\leqslant 20\}$；

（4）$\overline{U}=V$；

（5）$\overline{A+B}=\{10<x\leqslant 20\}$；

（6）$\overline{C}=\{0\leqslant x\leqslant 7$ 或 $15\leqslant x\leqslant 20\}$；

（7）$\overline{AB}=\{0\leqslant x\leqslant 3\}+\{5\leqslant x\leqslant 20\}$；

（8）$A+B+C=\{0\leqslant x<15\}$。

3、从随机数表*中任意取出一个数，事件A表示取出的数能被5整除，事件B表示取出的数的末位是零。试问事件A－B表示什么意义？

答：由题意知：

A＝｛取出的数被5整除｝即

A＝｛取出的数末位是5或零｝，

B＝｛取出的数末位是零｝，

故　A－B＝｛取出的数末位是5｝。

4、从随机数表中任取两数。事件A为在取出的两个数中的一个为质数，事件B为在取出的两个数中的一个为偶数。试问事件AB及A＋B各表示什么意义？

答：事件AB表示取出的两个数中一个为质数，而另一个为偶数。

事件A＋B表示取出的两个数中有一个是质数或偶数或

---

*随机数表是由0、1、2、……、9十个数字随机地排列而成的。详见《常用数理统计表》P·75表33及其说明。

可能同时有一个为质数而另一个是偶数。

5、设事件A表示在三件被检验的产品中至少有一件是废品，事件B表示三件都是合格品，事件C表示三件中不少于两件是废品。试问

（1）$\overline{A}$；（2）$\overline{\overline{A}}$；（3）$\overline{C}$；

（4）$A-C$；（5）$A+B$；（6）AB

分别表示什么意义？

答：（1）$\overline{A}$——三件都是合格品，即B；

（2）$\overline{\overline{A}}$——三件中至少有一件是废品，即A；

（3）$\overline{C}$——三件中少于二件废品，即三件中恰有一件是废品或无废品；

（4）$A-C$——三件中恰有一件是废品；

（5）$A+B$——必然事件U；

（6）AB——不可能事件V。

6、在打靶比赛时，已知一射手连续射击三次用A_i（i＝1、2、3）表示"第i次命中"的事件，试用事件A_i（i＝1、2、3）表示下列复合事件：

（1）B＝｛三次射击中恰好命中一次｝；

（2）C＝｛三次射击中至少命中二次｝；

（3）D＝｛三次射击中至多命中二次｝。

答：（1）$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

（2）$C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$
$+A_1A_2A_2$或$C=(A_1+A_2+A_3)-B$；

（3）$D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$
$+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3$
$+\overline{A}_1A_2A_3$或

$$D = \bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3 + (A_1 + A_2 + A_3)$$
$$- A_1 A_2 A_3 \text{或} D = \overline{A_1 A_2 A_3}\text{。}$$

7、如果A、B、C为任意三事件，用符号表示下列事件：

(1)只有A发生(B，C不发生)；(2)A与B发生而C不发生；

(3)A，B，C都发生；(4)至少有一个发生；

(5)至少有二个发生；　(6)只有一个发生；

(7)只有二个发生；　(8)没有一个发生；

(9)不多于二个发生。

解：（1）只有A发生（B，C不发生）

$$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C};$$

（2）A与B发生而C不发生

$$A \cdot B \cdot \bar{C};$$

（3）A，B，C都发生

$$A \cdot B \cdot C;$$

（4）至少有一个发生

$$A + B + C;$$

（5）至少有二个发生

$$AB + BC + CA \text{或} AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC;^{*}$$

（6）只有一个发生

$$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C;$$

（7）只有二个发生

---

*关于等价性的证明见第9题。(7)、(9)的等价性可仿第9题。自证。

$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$或$(AB+AC+BC)-ABC$；

（8）没有一个发生

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

（9）不多于二个发生

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+(A+B+C)-ABC$或$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$。

8、设A为任一事件，试问下列事件

(1)$A+A$；(2)$A\cdot A$；(3)$A+\overline{A}$；(4)$A\cdot\overline{A}$；

(5)$U+A$；(6)$U\cdot A$；(7)$V+A$；(8)$V\cdot A$

各表示什么意义？

答：(1)$A+A=A$；　(2)$A\cdot A=A$；

(3)$A+\overline{A}=U$；　(4)$A\cdot\overline{A}=V$；

(5)$U+A=U$；　(6)$U\cdot A=A$；

(7)$V+A=A$；　(8)$V\cdot A=V$。

9、试证A，B，C三个事件中至少有二个发生的两种表示式：$AB+BC+AC$与$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$的等价性。

证：（证法一）

$$AB+BC+AC=ABU+BCU+ACU$$
$$=AB(C+\overline{C})+BC(A+\overline{A})+AC(B+\overline{B})$$
$$=ABC+AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C$$
$$=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC。$$

（证法二）

$$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$$
$$=AB\overline{C}+ABC+A\overline{B}C+ABC+\overline{A}BC+ABC$$
$$=AB(\overline{C}+C)+AC(\overline{B}+B)+BC(\overline{A}+A)$$

$= ABU + ACU + BCU$

$= AB + AC + BC$。

10、试证

（1）$A - B = A\overline{B}$，（2）$\overline{\overline{A}} = A$。

证：（1）设 x 为任一事件

（i）$x \in A - B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \bar{\in} B$ 即 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in A\overline{B}$，

$\because x$ 是任意事件　$\therefore A - B \subset A\overline{B}$，

（ii）$x \in A\overline{B} \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$ 即 $x \bar{\in} B$

$\Rightarrow x \in A - B$，

$\because x$ 是任意事件　$\therefore A\overline{B} \subset A - B$，

由事件的等价意义知　$A - B = A\overline{B}$。

（2）设 x 为任一事件

（i）$x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow x \bar{\in} \overline{A} \Rightarrow x \in A$，由此得 $\overline{\overline{A}} \subset A$，

（ii）$x \in A \Rightarrow x \bar{\in} \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{\overline{A}}$，由此得 $A \subset \overline{\overline{A}}$，

综上可知　$\overline{A} = A$。

11、试证

（1）$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$，（2）$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$。

证：（证法一）

（1）设 x 为任一事件

（i）$x \in \overline{A + B} \Rightarrow x \bar{\in} A + B$

$\Rightarrow x \bar{\in} A$ 且 $x \bar{\in} B$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}\,\overline{B}$，

由此得 $\overline{A + B} \subset \overline{A} \cdot \overline{B}$，

（ii）$x \in \overline{A} \cdot \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \bar{\in} A$ 且 $x \bar{\in} B$

$\Rightarrow x \overline{\in} A + B$

$\Rightarrow x \in \overline{A + B}$

由此得 $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A + B}$ 综上可得 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$。

（2）设x为任一事件

（i）$x \in \overline{A \cdot B} \Rightarrow x \overline{\in} A \cdot B$

$\Rightarrow x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A} + \overline{B}$

由此得 $\overline{A \cdot B} \subset \overline{A} + \overline{B}$

（ii）$x \in \overline{A} + \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$

$\Rightarrow x \overline{\in} A \cdot B$

$\Rightarrow x \in \overline{A \cdot B}$

由此得 $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A \cdot B}$

综上可得 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$。

（证法二）

（1）$\overline{A} \cdot \overline{B}$表示“A，B同时不发生”，其逆是“A，B至少有一发生”即$A + B$，故

$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$

两边同时取逆，得

$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B}$

（2）$\overline{A} + \overline{B}$表示“A，B至少有一不发生”，其逆是“A，B都发生”即$A \cdot B$，故

$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$

两边同时取逆，得

$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$。

这两个命题通常称为“交并对偶原理”或称“狄摩根（DeMergan）定律”，在事件运算中是极为有用的。而且这个结果可推广到事件是有限个的情形，即有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\cdots\overline{A_n},$$

$$\overline{A_1A_2\cdots\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots\cdots+\overline{A_n}$$

或简写成

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\prod_{i=1}^{n}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

12、试问下列各对事件是否相容

（1） $A\overline{B}$与$\overline{A}B$；

（2） A与$A\overline{B}$；　　相容 ≠ V

（3） C与$\overline{A+B+C}$；　　不相容 = V

（4） B与$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$。

答：（1） 不相容

$\because A\overline{B}\cdot\overline{A}B=V$；

（2）相容

$\because A\cdot A\cdot\overline{B}=A\overline{B}\neq V$；

（3）不相容

$\because C\cdot\overline{A+B+C}=C\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}=V$；

（4）相容

$\because B\overline{\overline{A}\;\overline{B}}=B(\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}})=AB+B=B\neq V$。

13、试证事件

A，$\overline{A}B$，$\overline{A+B}$

构成一两两互不相容完备事件群。

证：先证它们和是必然事件，