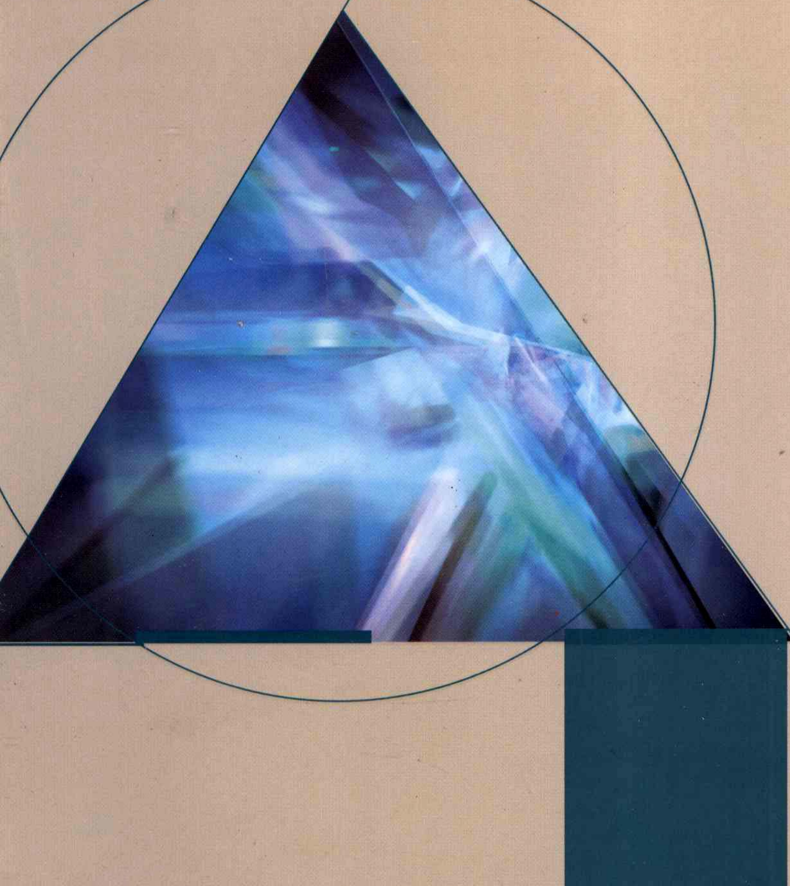
大学数学系列教材

Calculus

微积分（下册）

陈修素　陈义安　等编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Calculus

微積分（下冊）

大学数学系列教材

微 积 分

Weijifen

（下 册）

陈修素 陈义安 雷 澜 闻道君 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本教材是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合作者多年的教学经验和科研成果，并吸收国内外同类教材的优点编写而成的。内容包括：定积分及其应用、微分方程初步、多元函数微积分、无穷级数、差分方程初步。

本书深入浅出、通俗自然地阐明了微积分的基本概念、基本理论和基本方法；例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性；同时适当介绍数学实验等相关知识。书末附有习题答案。本书具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进，结合实际、化繁为简、便于教学等特点。

本书可作为高等学校经济管理类专业的教材或教学参考书，也可供科技工作者或考研学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册 / 陈修素等编著. —北京：高等教育出版社，2011.2

ISBN 978-7-04-031364-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①微积分－高等学校－教材

Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 004002 号

策划编辑 马 丽　　责任编辑 崔梅萍　　封面设计 赵 阳　　责任绘图 黄建英
版式设计 王艳红　　责任校对 殷 然　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400—810—0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	山东省高唐印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.75	版　　次	2011 年 2 月第 1 版
字　　数	290 000	印　　次	2011 年 7 月第 2 次印刷
购书热线	010—58581118	定　　价	24.80 元

物 料 号　31364—00

《微积分（下册）》编委

主　编　陈修素　陈义安

副主编　雷　澜　闻道君

前　　言

为适应高等教育迅猛发展、教学改革不断深入的形势，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的内容和要求，结合作者多年积淀的成功教学经验编写了该教材。本教材适合高校经济管理专业微积分基础课教学使用，也可作为理工科等非数学类专业的教材或教学参考书，还可供科技工作者或考研学生参考。

微积分学是微分学和积分学的总称。牛顿和莱布尼茨在总结前人成果的基础上，分别独立地建立了微积分学。可以说它是继欧氏几何后，数学中的一个伟大创造。微积分同时又是一种数学思想，“无限细分”就是微分，“无限求和”就是积分。学习微积分，不仅要学习它的理论和解题技巧，还要学习它处理问题的思想方法。

本教材的主要特点有：

(1) 在教材内容安排上，一方面注意吸收现有教材的优点，另一方面对一些传统内容进行了适当的调整和优化，以更好地体现知识的内在联系和循序渐进性。

(2) 为增强本教材的适用性和可读性，力求用语准确，简洁流畅，通俗易懂，解析详细。概念引入时尽可能从实际问题出发。各章末有小结，以帮助学生巩固本章知识。附录中引入微积分 MATLAB 数学实验，以提高学生的学习兴趣和应用能力。

(3) 结合本课程的基本要求和学生报考研究生的需求，配备了较多且难易度适中的例题和习题。各章的习题分为(A)，(B)两组，(A)组习题是按教学基本要求设置；(B)组习题含有历年主要典型研究生入学试题；(B)组中的客观性题可作本章复习巩固用，计算题可供有兴趣的同学和有志报考研究生的同学选用。

本书由陈修素、陈义安担任主编。具体分工如下：雷澜编写第六章及附录中的数学实验；陈义安编写第七章；闻道君编写第八章第一节及第九章；陈修素编写第八章其余各节、内容简介及前言；陈义安编写第十章。全书由陈修素、陈义安统稿，由丁宣浩教授主审，他认真仔细地审阅了全书，提出了重要的修改意见。谨致衷心感谢！

在编写过程中，得到大量国内国外同类教材的启发，受益匪浅，在此向有关作者表示诚挚谢意！同时衷心感谢对本书编写给予热情关心、支持、指导的各位领导和同仁！

限于编者水平，书中难免存在缺陷和不妥之处，恳请专家、读者指正。

编者

2010年8月

目　　录

第六章　定积分及其应用

本章先从几何问题与力学问题引入定积分的定义，然后讨论定积分的性质、计算方法、简单的反常积分以及定积分在几何与经济学中的应用.

§6.1　定积分概念

一、引例

定积分是在实际生活中应运而生的，它起源于求图形的面积和体积等实际问题. 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨先后提出了定积分的概念，并发现了积分与微分之间的内在联系，给出了计算定积分的一般方法，从而使定积分成为解决有关实际问题的有力工具，并使各自独立的微分学与积分学联系在一起，构成完整的理论体系——微积分学. 下面我们从实际例子来看定积分概念的引入.

1. 曲边梯形的面积

平面上的曲边梯形，指的是直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形，如图 6.1.

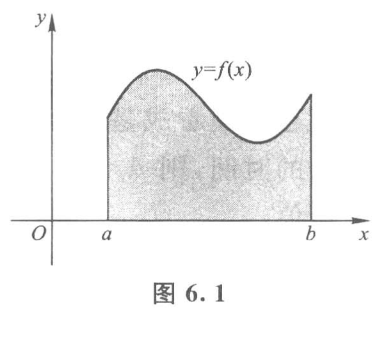


图 6.1

当我们要计算这种图形的面积时，我们采用的是“分割、取近似、求和、取极限”的思想.

分割：在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{n-1},x_n]$，各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

过分点 x_i 作 y 轴的平行线，将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，如图 6.2.

取近似：注意到每个小曲边梯形都可以近似看成一个小矩形，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，函数值 $f(\xi_i)$ 可以看成是这个小矩形的长，小区间的长度 Δx_i 作为小矩形的宽，则 $A_i=f(\xi_i)\Delta x_i$ 代表了第 i 个小

曲边梯形面积的近似值.

求和:将这些小矩形的面积求和得 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，即可作为该曲边梯形面积的近似值.

取极限:显然,用小矩形的面积来近似替代小曲边梯形的面积,就要求每个小区间长度的最大值都趋于零,才能使小矩形的面积和与原来的曲边梯形面积的真实值最接近.记小区间长度的最大值为 λ. 所以,我们有

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

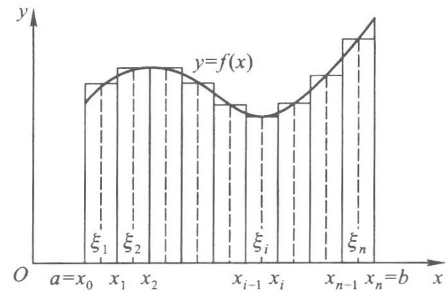


图 6.2

下面我们再来看一个例子.

2. 变速直线运动的路程

做变速直线运动的物体,其速度 $v(t)$ 随时间的变化而连续变化,若要计算该物体从 T_0 时刻到 T_1 时刻所走的路程,我们所采用的仍然是“分割、取近似、求和、取极限”的思想.

分割:在 $[T_0, T_1]$ 中任意插入若干个分点

$$T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_1,$$

把区间 $[T_0, T_1]$ 分割成 n 个小区间 $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{n-1}, t_n]$, 各小区间的长度依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

取近似:注意到每个小时间间隔 Δt_i 内,物体的运动可以近似地看做匀速直线运动.在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 $\xi_i(t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i)$, 函数值 $v(\xi_i)$ 可以近似地看成是物体在这个时间间隔内的速度,小区间的长度 Δt_i 是物体运动的时间,则 $A_i = v(\xi_i)\Delta t_i$ 代表了时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 内物体运动的路程的近似值.

求和:从 T_0 时刻到 T_1 时刻的路程,显然应是每个小时间间隔内的路程之和.

取极限:显然,用匀速直线运动物体的路程来近似替代变速直线运动的路程,就要求时间间隔的最大值要趋于零,即分割时每个小区间长度的最大值都趋于零,记小区间长度的最大值为 λ. 所以,我们仍然有

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

以上两例，一个是几何问题，一个是物理问题.虽然问题的背景不同，但是它们都有相同的处理方法和表现形式，数学家将问题的实质抽离出来，就得到了定积分的概念.

二、定积分的概念

定义 6.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1,2,\cdots,n)$，并作和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果无论对 $[a,b]$ 怎样的分法，也无论在各个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上点 ξ_i 怎样取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和 S_n 总趋于确定的极限 I，我们就称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{6.1}$$

此时又称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间.

注意：当和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在时，其极限 I 仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关.如果既不改变被积函数 f，也不改变积分区间 $[a,b]$，而只把积分变量 x 改写成其他字母，例如 t 或 u，那么，这时和的极限 I 不变，也就是定积分的值不变，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u. \tag{6.2}$$

所以，我们常说定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与被积函数的自变量用哪个字母表示无关.

关于定积分，有一个重要问题：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足什么条件时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积？这个问题本书不作深入讨论，而只给出以下两个

充分条件.

定理 6.1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6.2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

三、定积分的几何意义

在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$ 时,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的曲边梯形的面积;在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$ 时,由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的曲边梯形在 x 轴的下方,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值;因此,在区间 $[a,b]$ 上,若 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时,函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴上方,其余部分在 x 轴下方,故定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示各部分面积的代数和,如图 6.3.

下面我们举两个利用定积分的定义来解决问题的例子.

例 6.1 利用定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 因函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续,故可积. 从而定积分的值与对区间 $[0,1]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关. 为便于计算,将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份,分点为 $x_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$;如图 6.4,则每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\lambda=\Delta x_i=\frac{1}{n}$,于是 $\lambda\to 0$ 等价于 $n\to\infty$;取每个小区间的右端点 ξ_i,则 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,故

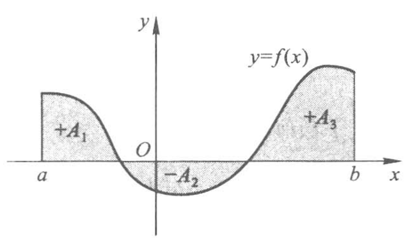


图 6.3

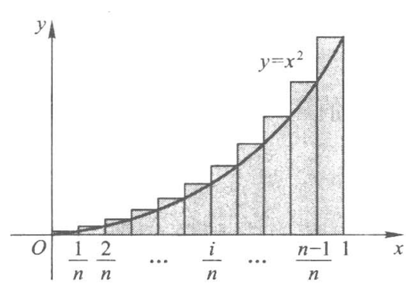


图 6.4

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

例 6.2 利用定积分表示下列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cos\frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\cos\frac{n-1}{n} + \cos 1\right).$$

解 $$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.$$

易见,若取 $x_i = \frac{i}{n}$,则 $\Delta x_i = \frac{1}{n}, \xi_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$,原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty} \pi \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \cos\xi_i \Delta x_i$. 由此可见,被积函数应取为 $f(x) = x\cos x$,注意到 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,因而是可积的. 故有

$$\text{原极限} = \pi \int_0^1 x\cos x \mathrm{d}x.$$

注: 今后可直接计算出上述积分结果为 $\pi(\sin 1 + \cos 1 - 1)$.

定积分的几何意义也有不少的应用.

例 6.3 利用定积分的几何意义,计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$.

解 被积函数为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$,如图 6.5,

注意到由曲线 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$,直线 $x = 0, y = 0$ 所围成的曲边梯形的面积恰好是以原点为圆心,a 为半径的圆面积的 $\frac{1}{4}$.

由定积分的几何意义,得 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{4}$.

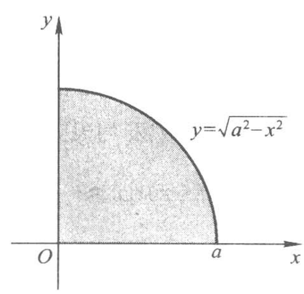


图 6.5

同理,可以看出定积分 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$ 计算的是以原点为圆心,a 为半径的上半圆的面积. 从而 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{2}$.

*四、定积分的近似计算

1. 矩形法

矩形法就是把曲边梯形分成若干个窄曲边梯形,然后用窄矩形来近似替代

窄曲边梯形,从而求得定积分的近似值.具体做法如下:

将积分区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的小区间,则每个小区间的长都为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$,在每个小区间内任取一点 ξ_i,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i).$$

如图 6.6.如果每个小区间都取左端点的函数值作为窄矩形的高,则对任一确定的自然数 n,有

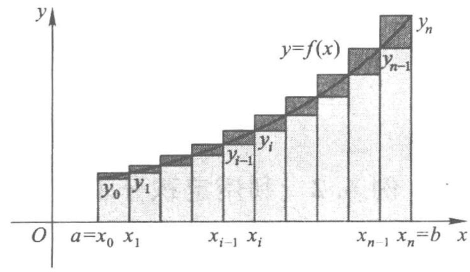


图 6.6

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1}).\tag{6.3}$$

如果每个小区间都取右端点的函数值作为窄矩形的高,即令 $\xi_i=x_i$,则可得近似公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).\tag{6.4}$$

以上求定积分近似值的方法称为矩形法,公式(6.3)称为左矩形公式,公式(6.4)称为右矩形公式.

矩形法的几何意义非常明确,就是用小矩形的面积近似作为小曲边梯形的面积,总体上用阶梯形的面积作为整个曲边梯形面积的近似值.

2. 梯形法

梯形法就是在每个小区间上,以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积.具体做法与矩形法类似,近似公式如下:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\approx\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_1))\Delta x+\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))\Delta x\\&\quad+\cdots+\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n))\Delta x\\&=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_n))+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right].\end{aligned}\tag{6.5}$$

公式(6.5)叫做梯形法公式.由这个公式所得的近似值,实际上就是由公式(6.3)、公式(6.4)所得近似值的平均值.

例 6.4 用矩形法和梯形法分别计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值.

解 把区间 10 等分,设分点为 $x_i(i=0,1,\cdots,10)$,设相应的函数值为 $y_i=\mathrm{e}^{-x_i^2}(i=0,1,\cdots,10)$,列表如下:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1.000 00	0.990 05	0.960 79	0.913 93	0.852 14	0.778 80
i	6	7	8	9	10	
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
y_i	0.697 68	0.612 63	0.527 29	0.444 86	0.367 88	

利用左矩形公式,得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx (y_0 + y_1 + \cdots + y_9) \times \frac{1-0}{10} = 0.777\,82.$$

利用右矩形公式,得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx (y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}) \times \frac{1-0}{10} = 0.714\,61.$$

利用梯形法公式,得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1-0}{10}\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + y_1 + y_2 + \cdots + y_9\right],$$

实际上是前面两值的平均值,得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2}(0.777\,82 + 0.714\,61) = \frac{1}{2} \times 1.492\,43 = 0.746\,215.$$

定积分的近似计算法很多,随着计算机应用的普及,利用现成的数学软件计算定积分的近似值已变得非常方便,在本课的数学实验中(附录二)读者可具体进行实践.

§6.2 定积分的性质

上一节给出了定积分存在的充分条件,它可以用来判断函数的可积性.这一节,我们进一步讨论定积分的一些性质.为了计算和应用的方便,我们先对定积分作两点补充规定:

(1) 当 $a=b$ 时,$\int_a^b f(x)dx = 0$; (6.6)

(2) 当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$ (6.7)

由上式可知,交换定积分的上下限时,绝对值不变而符号相反.因此,下列各性质中积分上下限的大小,如不特别指出,均不加限制,并假定各性质中的定积分是存在的.

性质 6.1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ (6.8)

证
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注:本性质可以推广到任意有限个函数.类似地,可以证明:

性质 6.2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数).

性质 6.3 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$ (6.9)

证 (1) 先证 $a < c < b$ 的情况,如图 6.7.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,所以无论对 $[a,b]$ 怎样分,积分和的极限不变,故可取 c 作为一个分点,那么,$[a,b]$ 上的积分和等于 $[a,c]$ 上的积分和加 $[c,b]$ 上的积分和,即

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda \to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 再证 $a < b < c$,此时,点 b 位于 a 、c 之间,如图 6.8.由(1)知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

图 6.7

图 6.8

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同理可证 $c < a < b$ 的情形.所以,不论 a,b,c 的相对位置如何,性质 6.3 始终成立.

性质 6.4 $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$

性质 6.5 若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ $(a < b)$. (6.10)

证 可由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$ 证得.

推论 6.1 若在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad (a<b).$$

证 因为 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质 6.5 得

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

再利用性质 6.1,即可得证.

推论 6.2 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \qquad (a<b). \tag{6.11}$$

证 事实上,在区间 $[a,b]$ 上，$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

故
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \qquad (a<b).$$

性质 6.6(估值定理) 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值,则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a). \tag{6.12}$$

证 因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，所以由推论 6.1,得 $\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$. 再由性质 6.2 及性质 6.4,易证得性质 6.6.

性质 6.7(定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad (a\leqslant \xi \leqslant b). \tag{6.13}$$

证 将性质 6.6 中的不等式除以区间长度 $b-a$，得

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant M.$$

上式表明，$\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$ 是介于函数 $f(x)$ 的最小值 m 与最大值 M 之间的一个数，根据闭区间上连续函数的介值定理,在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得函数