经典名著最新版本

全书增补数百新题

题型最全题量最大

数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解（一）——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全解（二）——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全解（三）——不定积分　定积分

吉米多维奇数学分析习题全解（四）——级数

吉米多维奇数学分析习题全解（五）——多元函数的微分学　带参数的积分

吉米多维奇数学分析习题全解（六）——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集

ISBN 978-7-212-02697-4

9 787212 026974 >

定价：20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解

(三)

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
毕秉钧　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 3/(苏)吉米多维奇著. 廖良文，许宁编著. —合肥：安徽人民出版社，2005

ISBN 978-7-212-02697-4

Ⅰ. 吉… Ⅱ. ①吉…②廖…③许… Ⅲ. 数学分析—高等学校—解题 Ⅳ. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113598 号

吉米多维奇数学分析习题全解(三)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 毕秉钧 译

责任编辑	王玉法 **封面设计** 王国亮
出版发行	安徽人民出版社
地　　址	合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场 邮编：230071
发 行 部	0551-3533258　　0551-3533292(传真)
经　　销	新华书店
印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880×1230 1/32 **印张** 15.5 **字数** 360 千
版　　次	2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)
标准书号	ISBN978-7-212-02697-4
定　　价	20.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第13版(最新版本)为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第三章 不定积分

§1. 最简单的不定积分

1. **不定积分的概念** 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间有定义且是连续的，$F(x)$ 是其原函数，即 $F'(x)=f'(x)$，则当 $a<x<b$ 时，

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,\qquad a<x<b$$

其中 C 为任意常数.

2. **不定积分的基本性质**

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$；

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x = A\int f(x)\mathrm{d}x$ （A 为常数且 $A\neq 0$）；

(4) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3. **最简积分表**

(1) $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C(n\neq -1)$；

(2) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C(x\neq 0)$；

(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\operatorname{arccot}x+C;\end{cases}$

(4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$；

(5) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$;

(7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

(8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(9) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

(11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

(12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

(13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;

(14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

(15) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

4. 积分的基本方法

(1) 换元积分法　若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则
$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

其中 $u = \varphi(x)$ 为连续可微分函数.

(2) 分项积分法　若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则
$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

(3) 代换法　若 $f(x)$ 是连续函数,则假设

$x=\varphi(t)$,

其中 $\varphi(t)$ 与其导数 $\varphi'(t)$ 都是连续的，则得出

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若 u 和 v 是 x 的可微分函数，则

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

运用最简积分表，求出下列积分(1628 ～ 1653).

【1628】 $\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x.$

解 $$\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)\mathrm{d}x$$
$$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x.$

解 $$\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x$$
$$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$$

【1630】 $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x.$

解 $$\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$$
$$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)\mathrm{d}x$$
$$=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

【1631】 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解 $$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$$

【1632】 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$

$$=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$$

【1633】 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx.$

解 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

【1634】 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx=\int(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})dx$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

$$=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$$

【1635】 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

解 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}})dx$

$$=-3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3)+C.$$

【1636】 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$$

【1637】 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int(2-2\sqrt[6]{76}x^{-\frac{1}{6}}+3\sqrt{9}x^{-\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}x$$

$$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{76}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

【1638】 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

【1639】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=x-\arctan x+C.$$

【1640】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1-x^2}.$

解 $\int\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

【1641】 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx = \int \left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$

$$= x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

【1642】 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \arcsin x + \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

【1643】 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

【1644】 $\int (2^x+3^x)^2 dx.$

解 $\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)dx$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

【1645】 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{2^x\cdot 5^x}dx$

$$= \int \left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$$

$$=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C.$$

【1646】 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

解 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$$

【1647】 $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx=x-\cos x+\sin x+C.$

【1648】 $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$

解 $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx$

$$=\int[\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

【1649】 $\int\cot^2 x dx.$

解 $\int\cot^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\cot x-x+C.$

【1650】 $\int\tan^2 x dx.$

解 $\int\tan^2 x dx=\int(\sec^x-1)dx=\tan x-x+C.$

【1651】 $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)dx.$

解 $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)dx=a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x+C.$

【1652】 $\int\operatorname{th}^2 x dx.$

解 $\int\operatorname{th}^2 x dx=\int\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx=x-\operatorname{th}x+C.$

【1653】 $\int \mathrm{cth}^2 x\mathrm{d}x.$

解 $\int \mathrm{cth}^2 x\mathrm{d}x = \int\left(1+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)\mathrm{d}x = x - \mathrm{cth}x + C.$

【1654】 证明:若$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,

则 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$$

证明 由$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,

知 $$F'(x) = f(x),$$

从而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{a}F(ax+c)\right] = F'(ax+b) = f(ax+b),$$

所以 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求解下列积分(1655 ~ 1673).

【1655】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}.$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \int \frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a} = \ln|x+a|+C.$

【1656】 $\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x.$

解
$$\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10}\mathrm{d}(2x-3)$$
$$= \frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C.$$

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-3x)$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$$
$$= -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{(1-3x)}+C.$$

【1658】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-5x)=-\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C$

$=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C.$

【1659】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\int(5x-2)^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}(5x-2)$

$=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{2}{15(5x-2)\sqrt{5x-2}}+C.$

【1660】 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x=-\int(1-x)^{-\frac{3}{5}}\mathrm{d}(1-x)$

$=-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$

【1661】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$

【1662】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C.$$

【1663】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$$

【1664】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C$$

其中 $C=C_1-\dfrac{\ln 2}{2\sqrt{3}}$.

【1665】 $\displaystyle\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$.

解 $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx=-\int e^{-x}d(-x)-\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)$

$$=-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

【1666】 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)dx.$

解 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)dx=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5\alpha+C.$

【1667】 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

解 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

【1668】 $\int\frac{dx}{1+\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\tan\frac{x}{2}+C.$

【1669】 $\int\frac{dx}{1-\cos x}.$

解 $\int\frac{dx}{1-\cos x}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=-\cot\frac{x}{2}+C.$

【1670】 $\int\frac{dx}{1+\sin x}.$

解 $\int\frac{dx}{1+\sin x}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$$=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

【1671】 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx.$

解 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$

$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{sh}(2x+1)d(2x+1)+\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}(2x-1)d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C.$$

【1672】 $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}.$

解 $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C.$

【1673】 $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}.$

解 $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C.$

通过适当地变换被积表达式，求解下列积分(1674 ～ 1720).

【1674】 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

【1675】 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx.$

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)$

$$=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$$