高 等 数 学

（供地质系、化学系用）

南京大学数学系《高等数学》编写小组

一九七二年九月

目　录

第一章 解析几何

§1 平面直角坐标系

在‘初等数学’上册里，我们引进了数轴的概念。对于数轴上的一个点，它的位置可由唯一的一个实数 x 来确定。反过来也一样，任给一个实数 x，总可以找到唯一的一个点与此数对应，这个数 x 就叫点 P 在数轴上的坐标。

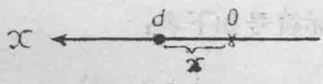

图 1.1

这里假定 P 点的位置是在一条有向直线 OX 上。但如果 P 是平面上的一点，我们又怎么来表示它的位置呢？在日常生活和生产实践中，我们经常会遇到表示平面上点的位置的问题。但劳动人民早已给出了解决的方法。譬如，当我们不知道建筑物 A、B（图1.2）在什么地方而问路的时候，人们往往会这样回答："朝东走 3 里，再朝北走一里半"，或"朝西走半里，再朝北走 2 里"。于是，根据所提示的途径，最后必能找到目的地。在这朴素的实践经验中，却已经蕴涵了一定的数学

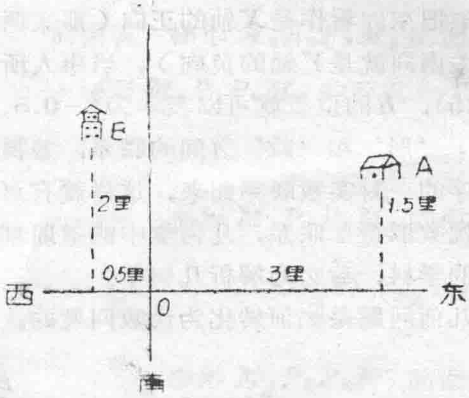

图 1.2

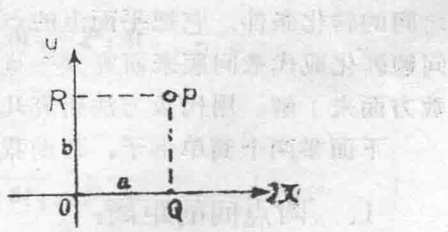

图 1.3

方法。把它抽象出来，便得到平面直角坐标法。

为此，我们可以在平面上取两条互相垂直的直线，作为坐标轴。水平直线 OX（称为 X 轴）和 OY（称为 Y 轴），其交点 O 称为坐标原点或零点。在每一坐标轴上，规定一个正向（于是另一侧便为负向）。我们规定 OX 由左向右算作正，OY 由下向上算作正。这样，对于平面上任何点 P，都可引两条垂线，在轴上便分别得到两有向线段 OQ 和 OR，而对应于 OQ 和 OR 的两个数（可假定两坐标上所取的单位长度是相等的）

$$x=a\text{（横坐标）},\quad y=b\text{（纵坐标）}$$

必能把P在平面上的位置完全确定。与点P相联系的实数对(a,b)便称为P点的平面坐标。反过来，对任何一对有顺序的实数(a,b)必能找到一点使这一点的平面坐标为(a,b)。

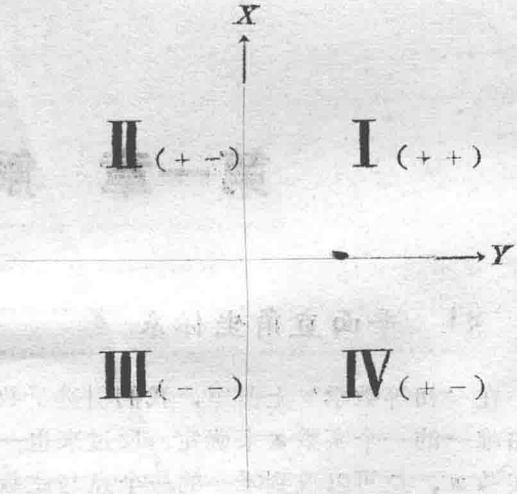

图 1.4

OX 轴与 OY 轴，将平面分为四部分，各称为象限，两个坐标都为正的那个象限，称为第一象限，並由此开始，按反对时针方向依次称为第二、第三、第四象限。在四个象限中，x、y的符号有正有负，它们的坐标符号如下表：

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

至于原点的坐标，当然是$x=0$，$y=0$即以$(0,0)$表示。OX 轴上任何点的纵坐标是零：$y=0$；OY 轴上任何点的横坐标也是零：$x=0$，这些都是很明显的。

如前面所述建筑物A、B的位置，如果把东向看作是X轴的正向（那末西向就是X轴的负向），把北向看成Y轴的正向（那末南向就是Y轴的负向），当事人所站的位置为原点，那末A的位置就可以表示为$(3,1.5)$，B的位置就可以表示为$(-0.5,2)$了。

平面直角坐标系的建立，为我们建立了‘形’和‘数’之间的联系，並提供了它们之间的转化条件。它把平面上的点和有顺序的一对实数联系起来，这样就有可能把几何问题转化成代数问题来研究。一旦几何与代数取得了联系，几何学中的道理都可以从代数方面来了解。用代数方法研究几何图形的学科，称之为解析几何学。

下面举两个简单例子，帮助我们明了几何问题是如何转化为代数问题的。

1． **两点间的距离：**

设地面上A、B两点，被一高丘所隔，不能直接测量这两点距离，但如若确定某一坐标系后，知道A的坐标为(x_1,y_1)，B的坐标为(x_2,y_2)，AB之间距离d便可求得。事实上，由A，B作OX轴的垂线AP与BQ，並经过A引OX轴的平行直线AC，得直角三角形ABC，故

$$d^2=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

但

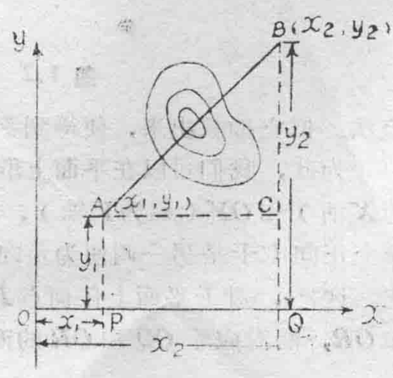

图 1.5

$$\overline{AC}=\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=x_2-x_1,$$

$$\overline{CB}=\overline{QB}-\overline{QC}=\overline{QB}-\overline{PA}=y_2-y_1,$$

所以

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_3)^2$$

即有

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.1}$$

(1.1)就是平面上两点的距离公式。若坐标以米为单位，並设

$$A=(2,3),\ B=(27,52)$$

可得 A, B 两点的距离为

$$d=\sqrt{(27-2)^2+(52-3)^2}\approx 55\text{（米）}$$

2. 三角形的面积：

假设三角形 $\Delta M_1M_2M_3$，其三顶点坐标分别为 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 和 $M_3(x_3,y_3)$，那末，这三角形的面积，便可以用代数方法把它求出来。从（图1.6）可以看出

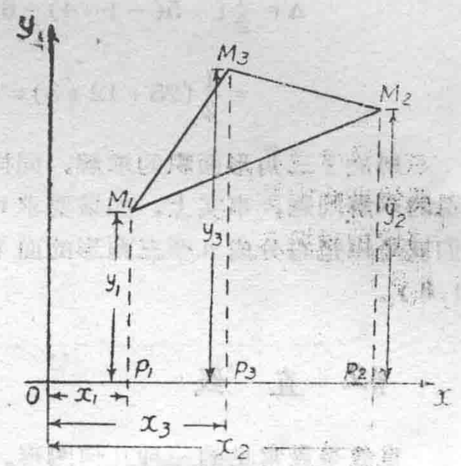

图 1.6

$\Delta M_1M_2M_3$的面积 = 梯形 $M_1P_1P_3M_3$ 的面积 + 梯形 $M_3P_3P_2M_2$ 的面积 − 梯形 $M_1P_1P_2M_2$ 的面积

但

$$\text{梯形 } M_1P_1P_3M_3 \text{ 的面积}=\frac{\overline{P_1M_1}+\overline{P_3M_3}}{2}\cdot\overline{P_1P_3}$$

$$=\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)$$

$$\text{梯形 } M_3P_3P_2M_2 \text{ 的面积}=\frac{\overline{P_3M_3}+\overline{P_2M_2}}{2}\cdot\overline{P_3P_2}$$

$$=\frac{y_3+y_2}{2}(x_2-x_3)$$

$$\text{梯形 } M_1P_1P_2M_2 \text{ 的面积}=\frac{\overline{P_1M_1}+\overline{P_2M_2}}{2}\cdot\overline{P_1P_2}$$

$$=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)$$

所以

$$\Delta M_1M_2M_3 \text{ 的面积}=\frac{1}{2}\Big[(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)$$

$$-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\Big]=\frac{1}{2}\Big[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)$$

$$+x_3(y_1-y_2)\Big] \tag{1.2}$$

在应用三角形面积公式 (1.2) 时，必须要求 M_1、M_2、M_3 三顶点是按逆时钟次序排列的，这样才能使面积不取负值。读者可以验证，即使三角形三顶点不全在第一象限，公式 (1.2) 一样适用。借助于逆时钟轮换法则，还可以帮助对公式 (1.2) 的记忆，即当式中一项转到另外一项时，足码 1.2 与 3 按右图逆时钟法则形成的(图 1.7)。

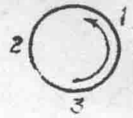

图 1.7

例 设三角形三顶点坐标为 $M_1(-5,2)$，$M_2(6,-1)$ 与 $M_3(1,4)$，则三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积为：

$$\Delta=\frac{1}{2}[-5(-1-4)+6(4-2)+1\cdot(2+1)]$$

$$=\frac{1}{2}(25+12+3)=20.$$

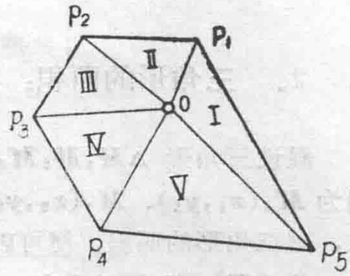

图 1.8

解决了三角形面积的求解，同样也解决了多边形面积的求解问题，事实上，如果要求 n 边形的面积，我们就可以把它分成 n 个三角形的面积之和来求（见图 1.8）。

§2 直 线

直线是最常见的一种几何图形。在平面几何里，直线只有‘形’的概念，并没有‘数’的特征。所以不能区别两个不同位置上的直线。引入平面坐标系之后，我们可以把直线赋于‘数’的特征，使它与一次方程式联系起来，从而可以完全确定直线在平面上的位置。

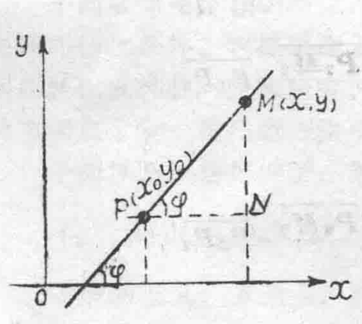

图 1.9

我们知道，经过一点(x_0, y_0)的直线有无穷多条，但其中具有某确定方向的，却只有唯一的一条。所谓方向，我们可以用这直线和X轴的交角φ来表示。现在我们假定，直线 a 经过点 $P(x_0,y_0)$ 且与 x 轴的交角为 φ。那末此直线上任何一点 $M(x,y)$，其坐标必满足

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\overline{MN}}{\overline{PN}}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

因为 φ 确定了，所以 $k=\operatorname{tg}\varphi$ 是一定数（称为直线的斜率），故直线上任何一点(x,y)其坐标满足代数方程

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{1.3}$$

这个方程就是通过点(x_0, y_0)具有斜率为 k 的直线方程，称做点斜式。显然，具有同一斜率的两直线平行，反之亦然。

对于具有确定位置的直线我们可以由(1.3)式定出它的直线方程；同样，我们也可以由直线方程，作出直线。

如，方程

$$y = \sqrt{3}x - 4$$

可以写成

$$y - (-4) = \sqrt{3}(x - 0) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} \cdot (x - 0)$$

它代表了过$(x_0, y_0) = (0, -4)$具有斜率 $k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$的一条直线（图1.10）。

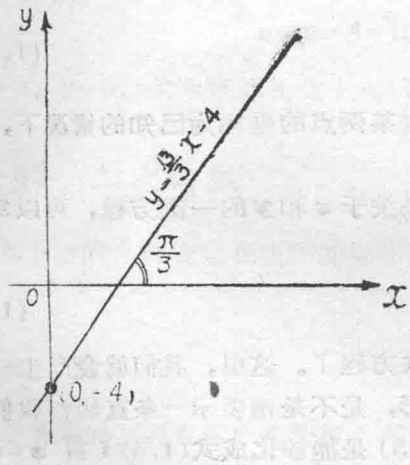

图 1.10

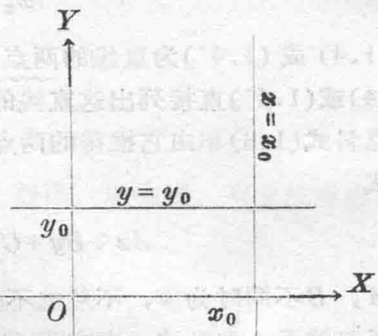

图 1.11

如果直线与 x 轴平行，即 $k = \mathrm{tg}\,0 = 0$，所以这时的直线方程便为

$y = y_0$（即与X轴平行在Y轴上有截距 y_0 的直线）。

如果直线与Y轴平行，即 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，这时将(1.3)改写为

$$y - y_0 = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(x - x_0)$$

有

$$(y - y_0)\cos\varphi = (x - x_0)\sin\varphi$$

用 $\varphi = \frac{\pi}{2}$代入，因 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$，$\sin\frac{\pi}{2} = 1$，故有直线方程

$x = x_0$（即与Y轴平行，在X轴上有截距 x_0 的直线）

因而

直线 $y = a$（常数），就表示此直线与X轴平行（直线在Y轴上截距为 a）。

直线 $x = b$（常数），就表示此直线与Y轴平行（直线在X轴上截距为 b）。

根据平面几何知识，两点可以而且只能连一直线。这反映到代数上，应该是知道两点的坐标，便可确定通过这两点的直线方程。事实也确实如此。

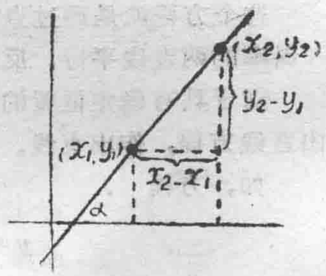

图 1.12

假设直线经过点(x_1,y_1)及点(x_2,y_2)，那末此直线便有斜率（图1.12）

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

于是满足方程

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{1.4}$$

或

$$y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2) \tag{1.4'}$$

称式(1.4)或(1.4′)为直线的两点式，在直线经过某两点的坐标为已知的情况下，可以按(1.4)或(1.4′)直接列出这直线的方程。

点斜式(1.3)和由它推得的两点式(1.4)，都是关于x和y的一次方程，可以写成一般形式

$$Ax+By+C=0 \tag{1.5}$$

其中A，B不同时为零，不然就不是x，y的一次方程了。这里，我们就会产生一个问题：任何关于x和y的一次方程(1.5)的几何图形，是不是都表示一条直线？我们将要证明，它的几何图形确是直线。这只要证明式(1.5)是能够化成式(1.3)（或$x=a$，或$y=b$）的形式就行了。为此，分两种情况讨论：

1)当$B=0$时，此时必$A\neq0$，(1.5)可以写成$x=-\dfrac{C}{A}$这是一条平行于Y轴而在X轴上有截距为$-\dfrac{C}{A}$的直线。

2)当$B\neq0$时。此时(1.5)可以写成

$$y-\left(-\frac{C}{B}\right)=-\frac{A}{B}x$$

它代表了一条斜率为$k=-\dfrac{A}{B}$经过点$\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$的直线。

综上所述，可以得到一个重要的结论：任何一个关于x和y的一次方程(1.5)都表示一条直线。称方程(1.5)为直线的一般方程。

在这一节中，我们利用直角坐标系，找出了直线的方程，同时也进一步揭露了直线和一次方程的内在联系：每条直线可以用一个二元一次方程来表示；反之，任何一个二元一次方程都表示一条直线。这样就给出了直线和一次方程的对应关系，也就是提供了几何图形和代数方程间的转化条件。所以研究直线的性质可以通过研究它的方程来解

决，反过来也是一样。

如二元一次方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

从解析几何的观点看，其中每个一次方程都表示了一条直线，因此求方程组的解（即同时满足两个方程的数对(x_0, y_0)的问题，也就是求两条直线的交点的问题；反过来平面上求两条直线的交点的问题，也就是求二元一次方程组的解的问题。

例：试求两直线$x-y+2=0$和$x+y-4=0$的交点

解 解二元一次方程组

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$$

得$x=1$，$y=3$，故两直线相交于点(1,3)。

§3 二次曲线

本节目的是要建立在生产实际中经常遇到的园、椭园、抛物线、双曲线等曲线的方程。

1. 圆：

众所周知，圆有这样的特征，即圆周上任意一点至圆心的距离（半径）是常数。根据这个性质，我们可以建立圆的方程。

假设一个半径为R的园，其园心C的坐标为(a,b)，而$M(x, y)$为圆周上任意一点，于是$MC=R$，根据两点间距离公式(1.1)，得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

两边平方，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1.6)$$

(1.6)便是圆心为(a,b)，半径为R的圆周方程。

如果圆心在原点，即$a=b=0$，便得圆的标准方程：

$$x^2+y^2=R^2$$

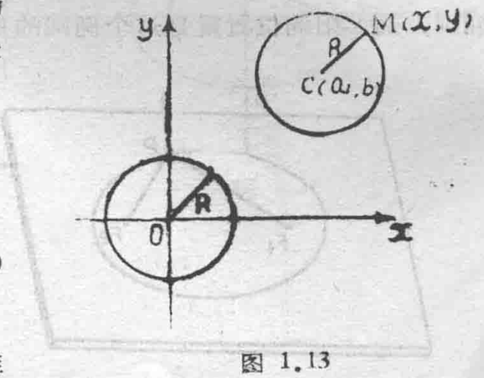

图 1.13

例：求以$C(-1,2)$为圆心，以5为半径的圆周方程。

解：以$a=-1$，$b=2$，$R=5$代入(1.6)即得此园方程

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$$

化简，得

$$x^2+y^2+2x-4y-20=0$$

例：决定圆

$$x^2+y^2-6x+y-3=0$$

的中心与半径。

解：用配方方法，将方程化成(1.6)的形式

$$(x^2-6x+9)+(y^2+y+\frac{1}{4})=3+9+\frac{1}{4}$$

即

$$(x-3)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

故此园中心在 $(3,-\frac{1}{2})$，半径为$\frac{7}{2}$。

有时把(1.6)写成 $y=b\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2}$，正号代表园的上半，负号代表园的下半。

2. 椭　圆：

椭圆在日常生活中，也经常会遇到。如圆形的物体，在阳光下的影子，有时不再是圆而成为椭圆；行星绕太阳的轨道以及我国发射的人造地球卫星运行的轨道也是椭圆。

劳动人民在实践中发现了椭圆有这样一个特性：椭圆上任何一点到某两个定点的距离之和是一个常数。根据这个道理，工人师傅有时用这样的方法来画椭圆。如图(1.14)所示，取一条定长的绳子，把它的两端固定在板上 F_1，F_2 两点，用笔尖把绳子绷紧，使笔尖在图纸上移动，就可以画出椭圆。

这两个定点 F_1，F_2 称为椭圆的焦点，上面已经讲过，地球绕太阳运转的轨道是一椭圆，而太阳的位置就是这个椭圆的焦点之一。

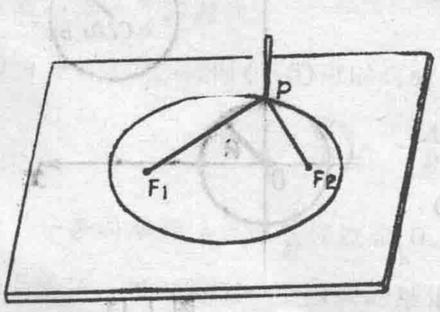

图 1.14

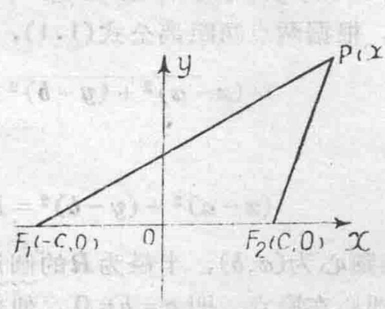

图 1.15

现在我们来建立椭园方程。为此，先取定坐标系。为了讨论简便，我们假定焦点 F_1，F_2 在X轴上，原点取在它们连线的中点，並设 F_1，F_2 的坐标分别为$(-c,0)$ 和 $(c,0)$。椭圆上点 $P(x,y)$到此两焦点的距离

$$\overline{PF}_1+\overline{PF}_2=2a,$$

要使问题有意义，显然必须 $a>c$。利用两点间距离公式(1)

$$\overline{PF_1}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\overline{PF_2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

因此

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{1.8}$$

这就是椭圆的方程。

为了把它化简，把左边的第一项移到右边，然后两边平方

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

即

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

两边再平方，可去括号

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

即

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{1.9}$$

由于 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$，故可记 $a^2-c^2=b^2$，于是方程(1.9)改写为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.10}$$

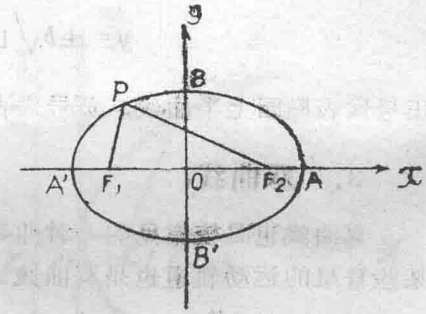

图 1.16

(1.10)叫做椭圆的标准方程。

无论从方程(1.10)或由椭圆图形，都可以看出椭圆对X轴与Y轴对称。

椭圆(1.10)与X轴(即 $y=0$)有两交点 A'，A。交点的坐标，可将 $y=0$ 代入(1.10)而得

$$A'=(-a,0),\ A=(a,0)$$

故 $\overline{A'A}=2a$。

同理可知椭圆与Y轴($x=0$)有两交点

$$B'=(0,-b),\ B=(0,b)$$

知 $B'B=2b$，

$A'A$ 和 $B'B$ 为椭圆的两轴。

由 b 的定义，$b^2=a^2-c^2$，可知 $a>b$，故椭圆两轴不一样长。称 $A'A$ 为椭圆长轴，$B'B$ 为短轴，或曰 OA（长为 a ）为长半轴，OB（长为 b ）为短半轴。

例：试决定椭圆

$$x^2+8y^2=4$$

的两半轴的长，及两焦点坐标。

解：用4除方程两边，得

$$\frac{x^2}{4}+2y^2=1$$

即

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

将此与椭圆标准方程(1.10)比较，知椭圆长半轴 $a=2$，短半轴 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\approx 0.7)$，又

$$c^2=a^2-b^2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

解得

$$c=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$$

所以椭圆两焦点坐标为 $F_1=(-\frac{1}{2}\sqrt{14},\ 0)$ 和 $F_2=(\frac{1}{2}\sqrt{14},\ 0)$。

有时把(1.10)写成

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

正号代表椭圆上半曲线，负号代表椭圆下半曲线。

3．双曲线：

双曲线也是较常见的一种曲线。譬如有些机械另件的轮廓线是双曲线，在天体内如某些彗星的运动轨道也是双曲线。

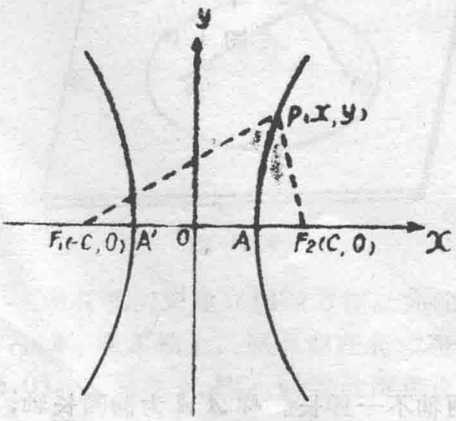

图 1.17

双曲线与椭圆一样，也有两个焦点 F_1，F_2，不过与椭圆不同的是它上面的点到两焦点距离之差是一个常数。

与建立椭圆方程一样，假定 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,0)$ 和 $(c,0)$，动点 $P\ (x,y)$ 到 F_1，F_2 的距离之差为 $2a$，

$$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=\pm 2a$$

用坐标表示

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

和椭园情况类似，经过化简，得

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

两边再平方，乃有

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

因为三角形两边之差必小于第三边，故与椭园不同的是此时

$$2e > 2a,$$

因此，设

$$c^2 - a^2 = b^2$$

可得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.11)$$

方程(1.11)叫做双曲线的标准方程。

它与 OX 轴有两交点：$A' = (-a, 0)$，$A = (a, 0)$。

4. 抛物线

抛物线，顾名思义，就是抛掷物体在空中运动经过的路线。从地面上向斜的方向抛出一物体，物体受重力作用，最终回到地面，它在空中经过的路线，便是抛物线。

汽车前灯和探照灯的反光镜面的形状，是由一抛物线绕它的对称轴旋转而成的。

抛物线有这样的特性：它上面的点到某定点F和某定直线 l 的距离相等。这个定点，叫抛物线的焦点，定直线叫抛物线的准线。

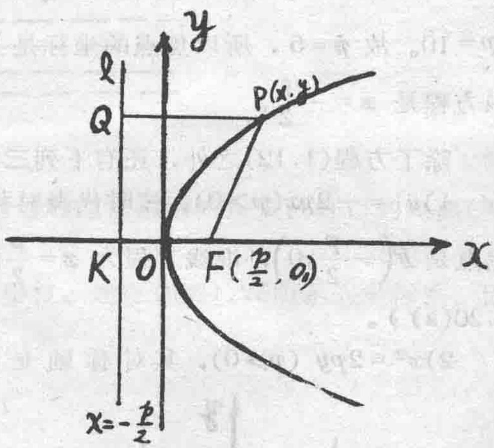

图 1.18

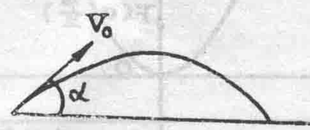

图 1.19

取过焦点F而垂直于准线 l 的直线为 X 轴，X轴与 l 的交点是K；取线段 KF 的中垂线为Y轴；两轴的交点O为原点，如图1.18所示。如果焦点到准线的距离用 p 表示($p>0$)，那末，$\overline{KO} = \overline{OF} = \frac{p}{2}$，因此焦点的$F$坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线的方程是 $x = -\frac{p}{2}$。

设 $p(x, y)$ 是抛物线上任意一点，过 p 点作直线 l 的垂线 pQ，则垂足 Q 的坐标是 $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$，且 $\overline{PQ} = x + \frac{p}{2}$。

利用两点距离公式，得

$$\overline{PF}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$$

根据抛物线的特性，$\overline{PF}=\overline{PQ}$

因此

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

将等式两边平方，得

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

化简，得

$$y^2=2px \quad (p>0) \tag{1.12}$$

方程(1.12)叫做抛物线的标准方程。

现在根据抛物线的标准方程 $y^2=2px(p>0)$来研究它的性质：

1)与坐标轴的交点：从方程(1.12)可知，所给抛物线除通过原点之外，不再与 x 轴或 y 轴相交。

2)对称性：在(1.12)中，以 $-y$ 代 y，方程不变，因此抛物线关于 x 轴对称。这条对称轴称为抛物线的对称轴。对称轴和抛物线的交点叫做抛物线的顶点。

3)范围：从方程(1.12)解出 $y=\pm\sqrt{2px}$，$(p>0)$ 要使 y 有对应值，必须 $x\geq 0$，当 x 增大时，y 的绝对值也增大，因此抛物线在 y 轴的右侧向上、向下无限伸展。

例：某种汽车前灯的中心截口是抛物线，它的方程是 $y^2=10x$，试求其焦点坐标和准线方程。

解：将方程 $y^2=10x$ 与方程 (1.12) 比较，得 $2p=10$。故 $p=5$，所以焦点的坐标是 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$，准线方程是 $x=-\frac{5}{2}$。

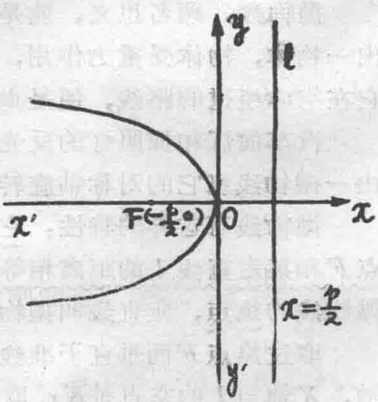

图 1.20(a)

除了方程(1.12)之外，还有下列三种标准方程：

1)$y^2=-2px(p>0)$，这时代表对称轴的是 Ox'，焦点是 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=\frac{p}{2}$的抛物线（图1.20(a)）。

2)$x^2=2py$ $(p>0)$，其对称轴是 Oy，焦点是

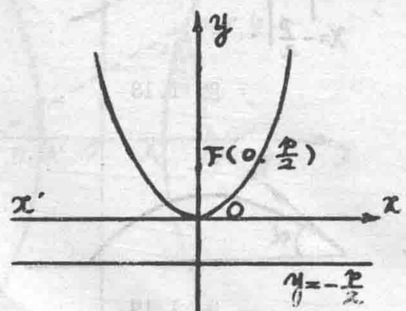

图 1.20(b)

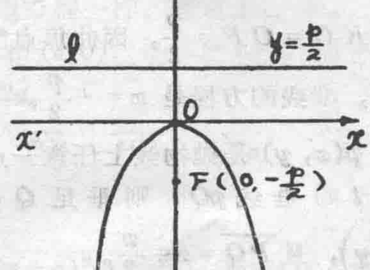

图1.20(c)

$F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$准线方程：$y = -\dfrac{p}{2}$（图1.20(b)）

2) $x^2 = -2py\ (p>0)$，其对称轴是 Oy'，焦点是 $F\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$ 准线方程：$y = \dfrac{p}{2}$（图1.20(c)）。

最后介绍抛物线的一个重要光学性质：平行于对称轴的光线经过抛物线镜面反射以后，都聚集在抛物线的焦点。同样，如果把光源放在焦点上，光线经镜面反射后，都平

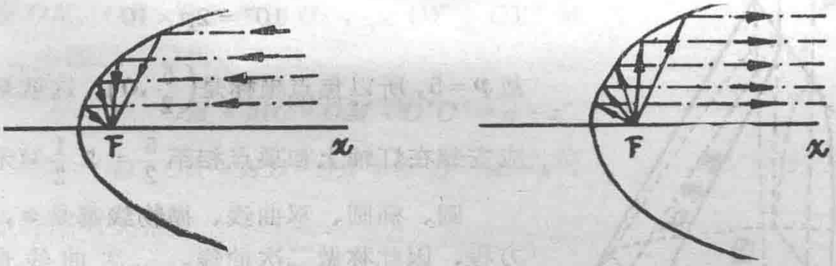

图 1.21

行射出。如图1.21所示，汽车前灯（图1.22）和探照灯就应用了抛物线的这个特性，它们能射出一道强烈的平行光束，故照得很远。

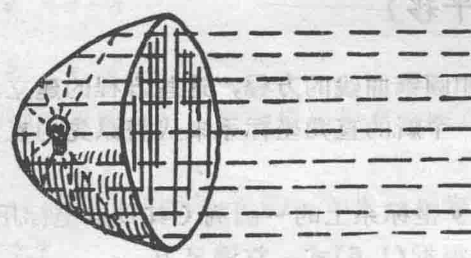

图 1.22

例：某种汽车前灯的灯口直径是20厘米，前灯的抛物镜面的顶点到灯口的距离(深度)是10厘米，问灯泡应安装在什么位置上？

解：在车灯的一个轴截面上，用厘米作长度单位，建立如图1.23所示的坐标系。因

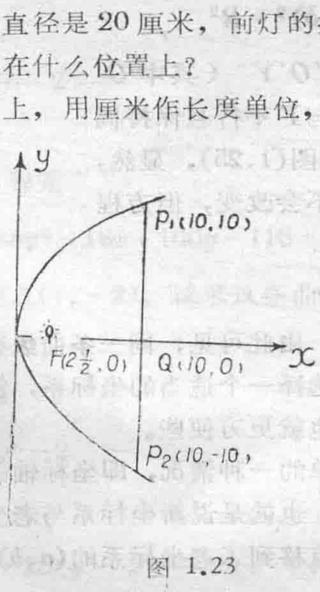

图 1.23

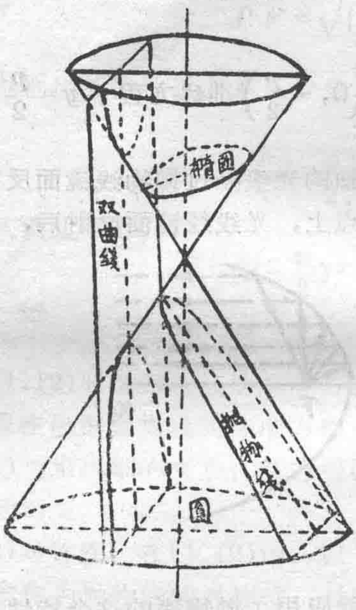

图 1.24

为前灯的抛物镜面和轴截面的交线是抛物线，其方程为 $y^2=2px$，在 x 轴上取 Q 点，使 $OQ=10$，经过 Q 点作 Ox 轴的垂线，和抛物线相交于 p_1p_2，p_1p_2 就是灯口的直径。因为 $p_1p_2=20$，所以 p_1，p_2 的坐标分别为(10, 10)和(10，－10)，将 $x=10$，$y==10$ 代入方程，$y^2=2px$ 得

$$10^2=2p\times 10$$

故 $p=5$，所以焦点坐标是 $\left(\frac{5}{2},0\right)$，这就是说，灯泡应安装在灯轴上和顶点相距 $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ 厘米处。

圆、椭圆、双曲线、抛物线都是 x，y 的二次方程，因此称做二次曲线。二次曲线也叫圆锥曲线，因为它们均可用平面按不同斜度截正圆锥而得，如图1.24。

§4 坐标变换(平移)

前面我们讨论了直线和圆锥曲线的方程，这些方程的建立，都是在确定的直角坐标系中进行的。如果我们用一个新的直角坐标系来代替原先的直角坐标系，那末这些方程就要改变了。

譬如，我们考察在 xoy 坐标系上的一圆周（其动点坐标用(x,y)表示），它的圆心在(a,b)，半径为R，于是根据(1.6)式，它满足方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

但是如果我们采取另一个坐标 $X'O'Y'$（其中 O' 与(a,b)重合，且 X' 与 X，Y' 与 Y 平行且保持同向，其动点坐标用(x',y')表示如图(1.25)，显然，对于新的坐标系来说，圆的图形不会改变，但方程则变为

$$x'^2+y'^2=R^2,$$

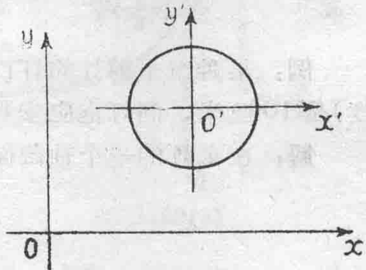

图 1.25

这个方程比前面的圆周方程简单。由此可见，同一条曲线在不同直角坐标中的方程可以有繁简之别。于是，我们有可能选择一个适当的坐标系，使得曲线在这个坐标系中的方程，形式较为简单些，研究起来也就更方便些。

本节讲的是坐标变换中最简单的一种情况，即坐标轴的平移。这里新坐标系是由老坐标系经过一个平行移动而得到，也就是说新坐标系与老坐标系之间同名坐标轴平行且同向，所不同的只是新坐标系的原点移到了老坐标系的(a,b)。