海文考研

万学·海文 全国硕士研究生入学考试用书

最新版

2013 考研数学

120种常考题型精解

万学海文名师团队 编著

归纳总结考研数学体系的120种常考题型
系统阐述想要成功不得不掌握的数学解题方法

海文考研
内部教案
公开出版

中国书籍出版社
China Book Press

海文考研
万学·海文

考研数学120种常考题型精解

万学海文名师团队 编著

中国书籍出版社
China Book Press

图书在版编目(CIP)数据

考研数学120种常考题型精解/万学海文名师团队编著. — 北京：中国书籍出版社，2012.5

ISBN 978-7-5068-2774-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①万… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第078705号

责任编辑 / 宋　然　任燕萍
责任印制 / 孙马飞　张智勇
封面设计 / 王晓毛
出版发行 / 中国书籍出版社
地址：北京市丰台区三路居路97号（邮编：100073）
电话：（010）52257143（总编室）（010）52257153（发行部）
电子邮箱：chinabp@vip.sina.com
经　　销 / 全国新华书店
印　　刷 / 北京飞达印刷有限责任公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 15.5
字　　数 / 520千字
版　　次 / 2012年5月第1版　2012年5月第1次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-5068-2774-4
定　　价 / 32.00元

本书特点及使用说明

近几年来，对全国硕士研究生入学统一考试数学试题的难度，考生评价不一，这表明考研数学命题在不断进步，对学生考查的知识、能力和数学的基本方法也在不断创新和加强。从历年的考试情况来看，往往被考生认为相对较容易的题目反而得分并不高，这也说明很多考生尚未完全领会和掌握所学的知识和方法，想当然地按照自己的方式做题，从而跳入命题老师的陷阱。

《考研数学120种常考题型精解》主要通过将知识点与历年考试中考查的题型相结合的方式，进一步强化考生对考研数学中知识点的理解与运用，增加考生对解题方法的思维训练，锻炼考生的实际动手解题能力，使考生能够真正掌握基础、吃透考研数学题型规律，并运用这些规律达到解题的目的，从而在考试中灵活运用，最终取得优异成绩。

本书严格按照《数学考试大纲》的知识体系编写，每章的体例中均包含“本章命题规律”和“本章重要题型”两部分。

一、命题规律部分内容导读

本书以章节为序，主要将考试大纲对考研数学所要求的考试内容按照题型方式进行归纳，并总结历年的考试情况，指出每一章的考查形式、考试内容、考试题型及在整个试卷中的比例，使考生熟悉历年真题中各章的考查重点、难点、易错点。

二、重要题型部分内容导读

该部分主要包括三个方面的内容：“历年真题链接”，“题型攻关点拨”，“典型例题”。其中，“历年真题链接”主要是帮助考生总结历年考试对本章命题的次数、频率、分值情况，使考生对重要题型有进一步的认识；“题型攻关点拨”主要是对本部分所归纳的重要题型进行解题方法、题型应对策略等方面的重要指导，使考生对本题型的学习能够举一反三，容易掌握；“典型例题”主要是根据所讲的方法和题型应对策略举例说明，使考生在学习中对题型、方法不断进行强化认识，逐步提高自己的解题能力。

本书旨在对各章重要题型进行总结，对题型应对策略全面讲解，建议考生在使用本书的时候仔细体会“题型攻关点拨”和题目后的“评注”部分，对可能出现的错误要尽量避免，并将书中所讲述的方法转换成自己的解题方法。

由于篇章有限，本书的“典型例题”部分精选了最典型、最重要的部分题型，建议考生在学习的时候先不要看答案，根据“题型攻关点拨”，先自己动手解题，然后再对照答案，发现自己存在的不足和问题，提高复习效率，养成独立思考的习惯，这会让考生在考研复习过程中受益匪浅。

本书重点在讲解题型和对题型的归纳，学习完本书后建议考生独立完成几套历年真题试卷，以增加对本书的认识和方法的体会。做题时建议考生严格按照考试时间要求进行，以便及时发现自己的不足，及时查漏补缺，以达到演练的目的。

由于时间所限，本书中错误之处在所难免，如有不当之处，恳请考生和老师给予批评指正。

万学海文教学研究中心

前 言

以突破某种考试为目的的学习行为，其基本学习原理就是锁定最有效的学习任务，并精确测算完成此任务所需的学习时间，在学习时间和学习任务之间构建最合理的配置关系才能达成最佳的学习效果。

对于刚刚踏上征途的考研学子而言，其最主要的学习任务就是看书，最迫切需要了解的就是到底应该看哪些书，需要花多少时间，如何来规划才能收获最大的学习价值。

万学海文通过对往年数万考研学子的深入调查表明：

- 每个考研学子最少会在学习资料上花费超过70%的学习时间；
- 许多考研学子因缺乏科学权威的指导在选择学习资料时常常无所适从；
- 许多考研学子因盲目跟风常常会购买大量超越自己学习时间极限的学习资料。

为帮助刚刚踏上考研路的学子们构建最清晰、最合理的学习规划方案，万学海文凭借其在考研领域最强大的权威师资和最优秀的辅导团队，组织了各考研学科原命题组专家、阅卷组专家，并会同万学海文冠军辅导团队，融合十多年辅导精华，回归学习原理的本质，精心打造了本套全程策划书系，在众多的考研辅导书籍中，它独具特色，卓而不群，主要具有如下优异品质：

一、全国唯一系统整合资深专家命题经验和高分学子学习实践的考研辅导书

十三位有丰富经验的命题组组长和数十位命题组专家，根据其多年的命题经验，集合1000多名优秀学子的学习实践，在精准把握命题规律的基础上，对备考内容进行最权威和最科学的剖析。

二、全国唯一以学生为本、全程整体策划的考研辅导书

在十多年的考研辅导过程中，我们透彻了解各类考生的学习特性，归纳总结了众多学子的优秀学习方法，并以此为基础提炼出最有效的学习内容，同时，结合海文最卓越辅导系统——钻石卡辅导系统的辅导时间，对考研学习资料进行全程系统规划，最大限度提升考研学子的学习效率，使其不再将宝贵的复习时间浪费在一些根本不会考到的学习内容上。

三、全国唯一配备《使用说明书》的考研辅导书

好的产品要有好的《使用说明书》，万学海文考研辅导书系全国独家首度配备《使用说明书》。本系列图书均附有详尽的学习规划和使用说明。其中，学习规划帮助考生明确科目的整体复习规划；图书使用说明则针对不同基础的考生应该在什么阶段、花费多少时间、如何学习本书给予了系统量化的指导与说明。

最后，本书的成稿要感谢万学海文教学研究中心邬丽丽、丁勇、王彩霞、李兰巧、马媛、陈湘华、王红广、张利华、王丹等数学老师在编校过程中付出的努力。

本书中必然还存在着诸多不足之处，欢迎各位考生多提宝贵意见！

如果您有任何疑问或建议敬请与我们联系：E-mail:books@wanxue.cn。

万学海文教学研究中心

考研全程学习规划方案

对全国937所院校考研学生的学习时间调查显示：如果考生提前一年进行研究生入学考试的准备，扣除其完成学校课程及考试，参加四、六级英语考试，参加工作面试等必不可少的事宜所占用的时间，每个考生所能自由支配用于考研复习的全部时间大约为2000个小时。

以清华大学课程最繁忙的理工科学生为例，全年时间300天，可用于自由支配的学习时间共计1920小时，由三部分构成，具体计算如下：

1. 大三下半学期，不算节假日，共计80天，课程较多，在校考生每天可自由支配时间3小时，共计学习时间240小时；

2. 大四上半学期，不算节假日，共计80天，只有极少量课程，在校考生每天可自由支配时间6小时，共计学习时间480小时；

3. 其余时间都是节假日，共计140天，减去一些不可预知事件所占用的天数20天，还剩120天，在校考生每天可自由支配时间10小时，共计学习时间1200小时。

这2000个小时在各门学科中应该如何分配才相对合理？考生应该如何选择相对应的学习资料？如何选择相对应的课程？为帮助每一位刚刚踏上考研征程的学子彻底解决以上疑虑，万学海文融合了众多考研高分学子的宝贵经验，并结合学科特点对各门学科的全年学习方案进行了系统规划。

一、考生初始状态预设及达成目标

为尽量保证绝大多数考研学生可参照此方案制定个性化的学习计划，我们设定了一个标准初始状态以及目标终点。

1. 起点：政治为零，英语4级400分水平，数学当年期末考试擦边及格，至今未学；

2. 过程：跨校跨档跨一级学科，但非跨排斥学科；

3. 目标：80%概率达到政治75分，英语65分，数学120分，专业课排名前10%（报录比10：1左右的硕士点）。

注：1. 以下方案是依托上述标准起点和目标所设定，考生可在此基础上根据个人情况对每阶段复习任务及时间进行弹性调整。

2. 以下方案是按考数学的情况进行设定，不考数学的考生政治、英语科目的复习同样可参照此方案，并可适当加强英语的复习时间。

二、政治全程解决方案

考研政治复习全程总时间大约需要200—300小时。

政治全程详细解决方案敬请关注万学海文考研政治类图书。

三、英语全程解决方案

考研英语复习全程总时间大约需要500—700小时。

英语全程详细解决方案敬请关注万学海文考研英语类图书。

四、数学全程解决方案

考研数学复习全程总时间大约需要700—1000小时。

在前期复习阶段每天至少保证学习数学2.5—3小时；中后期略有下降，但平均每天也要保持在2小时左右。

数学复习的原理，只须根据考纲的要求将要考查的每个知识点都练习到足够强度的题目，即可取得很好的成绩，关键就是到底做多少题目才算合理，如何找到这些合理的题目。以数学一为例，2011年考试大纲规定约有308个知识点，每个知识点对应若干题型，按照平均每个知识点对应3个题型，那么308个知识点共对应924个题型，而掌握每个题型平均要做3—4个题目，则924个题型约对应2772—3696个题目，将精选的2772—3696个覆盖所有大纲知识点并且是最高质量的题目练习到位，数学分数就不会低于120分。

下表是以数学一的要求为基础研发的全程复习规划，由于数学一、二、三的考点要求各不相同，但总体来说数学二、三的考试范围都不超出数学一的范围，只是在其范围内的节选，所以数学二、三的考生可以在此方案基础上根据相关考纲要求再结合个人实际情况进行方案调整，使其更加适合本人的复习状况。

阶段划分	学习任务及时间规划	学习资料	本阶段目标
第一阶段： 基础准备阶段(3月1日—4月30日，平均每天2.5—3小时，共计150—180小时)	1. 学习考纲要求的基本知识点（50—60小时） 2. 进行基本习题的对应性训练（90—110小时） 3. 万学导学班课程（10小时）	1. 《高等数学》（同济版）（高教出版社）； 2. 《线性代数》（清华版）； 3. 《概率论与数理统计》（浙大版）（高教出版社）； 4. 《考研数学基础训练精编550题》； 5. 《导学班内部讲义》	1. 全面熟记概念、定理、公式 2. 准确把握基本概念、基本定理、基本方法的内涵和外延 3. 熟练掌握对应知识点的基本运用和解题方法
第二阶段： 强化提高阶段（5月1日—9月30日，平均每天2.5—3小时，共计375—450小时）	1. 复习基础知识点（15—20小时） 2. 按知识点所对应的题型进行强化训练（260—320） 3、万学强化班课程（100—110小时）	1. 王式安等《考研数学标准全书》 2. 《强化班内部讲义》 3. 考研数学必备公式手册	1. 按照大纲要求，熟悉并熟练掌握所有知识点对应的所有题型 2. 利用强化班课程，抓住重点、突破难点

阶段划分	学习任务及时间规划	学习资料	本阶段目标
第三阶段： 模拟训练阶段（10月1日—12月10日，平均每天2—2.5小时，共计140—175小时）	1. 根据知识点单元结构将上一阶段所做习题进行循环练习，尤其注意老师指出的重难点（30—50小时） 2. 每3—5天进行一次套题训练（通常隔三天为宜，10套真题，8—10套模拟题，90—105小时） 3. 万学真题精讲和冲刺班课程（20小时）	1. 王式安等《考研数学标准全书》； 2. 《强化班内部讲义》 3. 《考研数学历年真题解析》； 4. 《考研数学成功冲刺模拟卷》； 5. 《冲刺班内部讲义》	1. 通过真题和模拟题训练，检验复习效果，了解考研数学题的结构、难度和特点，增加应试经验和应试技巧 2. 通过对上一阶段所练习题目的循环练习，有效加深对常考知识点的理解，提高解题熟练程度 3. 利用冲刺串讲班老师的帮助，将考研数学的所有考点串起来，形成知识点间有机联系的整体 4. 重点加强对综合题的专项训练
第四阶段： 冲刺备考阶段（12月11日—考研，平均每天2.5小时，共计70—90小时）	1. 对前面所有阶段的重难点题、易错题等进行归纳总结性复习（40—50小时） 2. 每3—5天进行一次套题训练（5—10套题，根据个人复习基础确定。30—40小时）	1. 前面各阶段的全部资料； 2. 《万学内部精选模拟题》	1. 对所有做错的题进行归纳总结，改正错误思维，查漏补缺 2. 保持做套题的速度、状态，迎接最后的挑战

（注：关于本方案的操作细节和学习原理敬请考生关注万学海文所开设的全程策划班。）

五、专业课全程解决方案

专业课因为考生的情况十分复杂，不一一探讨，考生可关注http://a.wanxue.cn，获取适合自己的专业课解决方案。

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数量统计

第一篇 高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、本章命题规律

本章函数部分主要是从构建函数关系，或确定函数表达式等方面进行考查．极限作为高等数学的理论基础，不仅需要准确理解它的概念、性质和存在的条件，而且要会利用各种方法求出函数（或数列）的极限，还要会根据题目所给的极限得到相应结论．连续是可导与可积的重要条件，因此要熟练掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在分段点处的连续性．与此同时，还要了解闭区间上连续函数的相关性质（如有界性、介值定理、零点定理、最值定理等），这些内容往往与其他知识点结合起来考查．

本章的知识点可以以多种形式（如选择题、填空题、解答题均可）考查，平均来看，本章内容在历年考研试卷中数学一、数学三大约占10分，数学二大约占19分．

二、本章重要题型

重要题型一　求函数的表达式或判断函数的性质

1. 历年真题链接

【数学一】 90一(3)题3分*，99二(1)题3分，05二(8)题4分．

【数学二】 90一(5)题3分，92二(2)题3分，95三(3)题5分，97二(5)题3分，99二(3)题3分，01二(1)题3分，01六题7分，04三(16)题10分．

【数学三】 90二(1)题3分，04二(7)题4分，12二(10)题4分．

2. 题型攻关点拨

求函数的表达式通常出现在客观题中，或作为解答题的一部分．对函数几何特性的考查也主要在客观题中出现，而且这些性质往往会结合其他知识点成为解题的必要条件．

【点拨一】 常见函数表达式的求法：

(1) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替换．

(2) 分析法：抓住外层函数的定义域和内层函数的值域之间的关系进行分析，并由此得出结论．

(3) 图示法：借助函数图形的直观性将函数进行复合．

【点拨二】 函数奇偶性的判定方法：

(1) 奇偶函数的定义．

(2) 奇偶函数的运算性质：奇函数的代数和为奇函数，偶函数的代数和为偶函数；偶函数之积为偶函数，偶数个奇函数之积为偶函数，奇数个奇函数之积为奇函数，一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数．

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，那么函数就无奇偶性可言．

---

* 90一(3)题3分，是指1990年第一大题第(3)小题，分值3分．05二(8)题4分，是指2005年第二大题第(8)小题，分值4分．其余以此类推．

【点拨三】 函数(或数列)有界性的判定方法:

(1) 利用有界的定义.

(2) 闭区间上的连续函数是有界的.

(3) 若数列的极限存在,则此数列有界.

(4) 函数极限的局部有界性:若当 $x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内必有界.

(5) 若 $|f(x)| \le M, x \in I, I$ 为有限区间,则 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

【点拨四】 函数周期性的判定方法:

(1) 利用周期函数的定义.

(2) 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期,则函数 $f(ax+b)(a \ne 0)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(4) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2 (T_1 \ne T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

【点拨五】 函数单调性的判定方法:

(1) 利用单调性的定义:在函数 $f(x)$ 的定义域内任取两点 x_1, x_2,不妨设 $x_1 < x_2$,若 $f(x_1) < f(x_2)$,则函数 $f(x)$ 单调递增;若 $f(x_1) > f(x_2)$,则函数 $f(x)$ 单调递减.

(2) 利用导数的符号:若 $f'(x) > 0 (\forall x \in I)$,则函数 $f(x)$ 在 I 内单调递增;若 $f'(x) < 0 (\forall x \in I)$,则函数 $f(x)$ 在 I 内单调递减.

3. 典型例题

【例1】 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & |x| \le 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x + |x|), & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

分析 本题是求分段函数的复合函数问题.

解 利用分析法求解.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x + |x|), & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x \le 1, \\ x, & x > 1, \\ 0, & x < -1, \end{cases}$$

且 $f[g(x)] = \begin{cases} -1, & |g(x)| \le 1, \\ 1, & |g(x)| > 1. \end{cases}$

(1) 要使 $|g(x)| \le 1$:

当 $-1 \le x \le 1$ 时, $|g(x)| = |x^2 - 1| \le 1$;当 $x < -1$ 时, $|g(x)| = 0 < 1$. 即当 $x \le 1$ 时, $|g(x)| \le 1$.

(2) 要使 $|g(x)| > 1$:

当 $x > 1$ 时, $|g(x)| > 1$.

综上所述,可得

$$f[g(x)] = \begin{cases} -1, & x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

评注 通常情况下,对于初等函数的复合,可采用代入法. 如:已知 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f[f(x)]$.

【例2】 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} e^{\sin x}$(其中 $x \ne 0$)是( ).

A. 周期函数　　B. 奇函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

分析 周期性、奇偶性一般用定义判定;单调性则更多是采用导数的符号来判定;而有界性一般是利用函数极限存在的局部有界性来判定.

解法一 排除法.

(1) 虽然 $\sin x$ 是周期函数,但 $\dfrac{\sin x}{x}$ 不是周期函数,所以 $f(x)$ 不是周期函数,排除选项 A.

(2) 因为$f(-x)=\frac{-\sin x}{-x}e^{-\sin x}=\frac{\sin x}{x}e^{-\sin x}\neq -f(x)$,所以$f(x)$不是奇函数,排除选项 B.

(3) 当$x=k\pi\neq 0$时,$f(x)=0$;当$x\neq k\pi$时,$f(x)\neq 0$. 故$f(x)$不是单调函数,排除选项 C.

由排除法知,应选 D.

解法二　直接验证$f(x)$是有界函数.

因$f(x)$为初等函数,所以要验证$f(x)$为有界函数,只需证明$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$均存在.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(\sin x\cdot e^{\sin x})=0,$$

所以$f(x)$为有界函数,故选 D.

重要题型二　求数列极限

1. 历年真题链接

【数学一】　96 三(2) 题 5 分,98 七题 6 分,03 二(2) 题 4 分,06 三(16) 题 12 分,08 一(4) 题 4 分,11 三(18) 题 10 分.

【数学二】　93 二(1) 题 3 分,94 三(3) 题 5 分,95 一(4) 题 3 分,98 二(1) 题 3 分,99 二(4) 题 3 分,99 十题 7 分,02 一(4) 题 3 分,02 八题 8 分,03 二(1) 题 4 分,03 二(2) 题 4 分,04 二(9) 题 4 分,06 三(18) 题 12 分,08 一(5) 题 4 分,11 三(19) 题 10 分,12 二(10) 题 4 分,12 三(21) 题 10 分.

【数学三】　98 一(1) 题 3 分,02 一(1) 题 3 分.

2. 题型攻关点拨

求数列极限主要以下列三种形式出现.

【点拨一】　有关抽象数列的极限问题:

由于抽象数列的形式是未知的,所以这类问题有一定的难度,通常情况下在选择题中以判定数列收敛性的形式出现,因此可以通过举反例的方法进行排除. 此外,这类问题也可以按照定义、基本性质及运算法则等直接验证.

【点拨二】　求具体数列$\{a_n\}$的极限,可以采用以下几种方法:

(1) 利用单调有界原理求数列极限.

首先,用数学归纳法或不等式的放缩法判断数列的单调性和有界性,确定数列极限的存在性;

其次,令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,通过对等式两边取极限,建立关于$l$的方程并求得$l$的值,从而得到数列$\{a_n\}$的极限值.

(2) 利用函数极限求数列极限.

数列极限不能直接用洛必达法则求解. 如果这个数列极限能看成某函数极限的特例,即形如$a_n=f(n)$,根据函数极限和数列极限的关系,有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,此时可以用洛必达法则求解.

【点拨三】　求n项和或n项积数列的极限,主要有以下几种方法:

(1) 利用特殊级数求和法.

如果所求的n项和数列极限可以通过"错位相消"或者转化成极限已知的n项和数列极限,那么通过整理直接就可以得到极限结果(如例 3).

(2) 利用幂级数求和法.

若可以找到这个n项和所对应的幂级数,则可以利用幂级数求和函数的方法把它所对应的和函数求出,再根据这个极限的形式将相应的量代入到和函数中,求出相应极限值.

(3) 利用定积分定义求极限.

若n项和式子中每一项均可提出$\frac{1}{n}$,剩余的项可用一个通项求和的形式表示,则可以考虑用定积分定义求解(如例 4).

(4) 利用夹逼定理求极限.

若数列的各项均可提出一个因子,而剩余的项不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则可以考

虑用夹逼定理求 n 项和数列极限.

(5) 求 n 项积数列的极限,一般先取对数,化为 n 项和的形式,然后再利用求解 n 项和数列极限的方法进行计算.另外还可以考虑用以下方法求解:

① 分子、分母同乘以一个因子,使分子、分母可进行化简.

② 拆通项或因式分解,使之成为两因式的乘积形式,在整个相乘过程中消去中间项,从而化繁为简,求出极限.

3. 典型例题

【例1】 已知 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$, $x_1=a>0$, $y_1=b>0(a<b)$,则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ (　　).

A. 都收敛于同一值　　B. 都收敛,但不一定收敛于同一值

C. 都发散　　D. 无法判断敛散性

分析 根据常见不等式 $\sqrt{x_ny_n}\le\dfrac{x_n+y_n}{2}$,容易验证数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的单调性和有界性,从而得出结论.

解 由已知易得 $x_n>0$, $y_n>0$. 因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\le\frac{x_n+y_n}{2}=y_{n+1},$$

所以

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_nx_n}=x_n,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递增,数列 $\{y_n\}$ 单调递减. 又

$$a=x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le y_n\le\cdots\le y_1=b,$$

所以数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 都有界,根据"单调有界数列必收敛",知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在,故排除选项 C 和 D.

下面讨论两个数列是否收敛于同一值.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,由 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$,有

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{2},\text{即 }B=\frac{A+B}{2},$$

解得 $A=B$,故选 A.

【例2】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{an}-1)$ $(a>0)$.

分析 $\sqrt[n]{a}\to1$, $\sqrt[n]{n}\to1(n\to\infty)$,所以此极限为"$\infty\cdot0$"型未定式,一般转化成函数极限,再用洛必达法则求解.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{an}=1$ 可知

$$\sqrt[n]{an}-1=e^{\frac{1}{n}\ln(an)}-1\sim\frac{1}{n}\ln(an)(n\to\infty),$$

用等价无穷小量替换,可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{an}-1)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\ln(an)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(an)}{\sqrt{n}},$$

由此转化为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式. 为使用洛必达法则求解,引入函数 $f(x)=\dfrac{\ln(ax^2)}{x}(x>0)$,则有

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ax^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a+2\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{1}{x}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{an}-1)=0.$$

【例3】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)}=$ ________.

分析 数列通项 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，可以先"裂项"，再"错位相消"，求得 n 项和数列的极限.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

【例4】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2+n}\right)$.

分析 此题为求 n 项和数列的极限，由通项的形式，可先将数列的通项适当放大或缩小，再利用定积分的定义及夹逼定理求解.

解
$$\frac{1}{n^2+1^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k},$$

且有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2},$$

其中
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln2.$$

又
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2},$$

因为
$$0\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+1}=\frac{n}{n^2+1}\to0(n\to\infty),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+(k+1)^2}=0,$$

而
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}+\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}-\frac{1}{n^2+1},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}-\frac{1}{n^2+1}\right]=0,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+(k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n^2+(k+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\frac{1}{2}\ln2.$$

由夹逼定理可知
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2+k}=\frac{1}{2}\ln2.$$

【例5】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}$.

分析 对于 n 项积的数列极限，可利用对数恒等式化为求 n 项和数列的极限.

解 因为$\ln\left[\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}\right]=\dfrac{2}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)]-2\ln n$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)-2\ln n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}\right]}$

$$=e^{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]}=e^{2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x},$$

其中
$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1x\cdot\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln 2-1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)^2\cdots(2n)^2}=e^{2(2\ln 2-1)}=\frac{16}{e^2}.$$

重要题型三　求函数的极限

1. 历年真题链接

【数学一】 92二(1)题3分,97一(1)题3分,98一(1)题3分,99一(1)题3分,00三题5分,03一(1)题4分,06一(1)题4分,08三(15)题9分,10一(1)题4分,11三(15)题10分.

【数学二】 89一(1)题3分,89二(3)题4分,91一(5)题3分,91三(3)题5分,92一(3)题3分,92三(1)题5分,93一(2)题3分,93三(2)题5分,95三(1)题5分,96一(4)题3分,97三(1)题5分,98一(2)题3分,99三题5分,00一(1)题3分,00二(4)题3分,01一(1)题3分,02二(3)题3分,02五题7分,04三(15)题10分,05三(15)题11分,08三(15)题9分,09三(15)题9分,11二(9)题4分,12三(15)题10分.

【数学三】 89三(1)题5分,90一(1)题3分,91二(1)题3分,91三题5分,93一(1)题3分,98二(2)题3分,02一(1)题3分,02三题5分,04三(15)题8分,05一(1)题4分,05三(15)题8分,08三(15)题9分,10三(15)题10分,11三(15)题10分,12二(9)题4分,12三(15)题10分.

2. 题型攻关点拨

【点拨一】 函数极限存在的充要条件:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

在讨论分段函数在分段点处的极限时多用此结论.

【点拨二】 等价无穷小替换.

考研常用的等价无穷小替换有:当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x,$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

要特别注意的是,只有被替换项为整个表达式的乘积因子时,才能进行等价无穷小替换.

【点拨三】 求函数极限在客观题、解答题中均有出现,主要是求七种未定式的极限. 这七种未定式是:"$\frac{0}{0}$"型、"$\frac{\infty}{\infty}$"型、"$0\cdot\infty$"型、"$\infty-\infty$"型、"1^∞"型、"0^0"型和"∞^0"型.

(1)"$\frac{0}{0}$"型和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式是最基本的未定式,解此类问题的方法可以归纳为以下几种:

① 通过恒等变形约去分子、分母中极限为0或∞的因子,然后用极限四则运算法则求解.

② 用洛必达法则求解.

③ 用泰勒展开式求解.

④ 用变量替换与重要极限公式求解.

⑤ 用等价无穷小量替换求解.

⑥ 用导数的定义求解.

(2)"$0\cdot\infty$"型未定式,要先转化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,再利用求"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限的方法求此极限.

(3)"$\infty-\infty$"型未定式也要先转化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,其方法有:

① 若是分式函数之差的"$\infty-\infty$"型未定式,通分可将其化为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式.

② 若是与根式函数的和、差有关的"$\infty-\infty$"型未定式,有理化、提取公因式等方法可将其化为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"

型未定式.

③ 若是多项式或其他函数之差的“$\infty-\infty$”型未定式，提公因式或变量替换可将其化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

(4) 求“1^{∞}”型、“0^0”型和“∞^0”型未定式的极限.

① 根据指数和底数的变化趋势可以将幂指函数$f(x)^{g(x)}$的极限分为“1^{∞}”型、“0^0”型和“∞^0”型. ,由于$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，故$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$，将幂指函数的极限未定式转化为“$0\cdot\infty$”型未定式的极限，最后再化为求“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限.

② 对于“1^{∞}”型未定式，经过适当变形后可以得到一个重要公式：

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim\{1+[f(x)-1]\}^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}.$$

3. 典型例题

【例1】 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]=$ ______.

分析 本题为“$\infty-\infty$”型未定式，作变量代换$t=\frac{1}{x}$并通分后，可以化为“$\frac{0}{0}$”型未定式.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left[2x-x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{2t-\ln(1+2t)}{t^2}$$
$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0}\frac{2-\frac{2}{1+2t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{t(1+2t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2}{1+2t}=2.$$

【例2】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}}{n}\right)^x(a>0)$.

分析 当$x\to\infty$时，$a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}\to n$，故此极限是“$1^{\infty}$”型未定式. 可转化为指数函数$e^{g(x)\ln f(x)}$后求$g(x)\ln f(x)$的极限，即化为“$0\cdot\infty$”型未定式，再化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式；本题也可以利用公式$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$求解.

解法一 原式
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+a^{\frac{2}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}}{n}}\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(a^t+a^{2t}+\cdots+a^{nt})-\ln n}{t}}$$
$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t\ln a+2a^{2t}\ln a+\cdots+na^{nt}\ln a}{a^t+a^{2t}+\cdots+a^{nt}}}$$
$$=e^{\frac{(1+2+\cdots+n)\ln a}{n}}=e^{\frac{n(n+1)}{2n}\ln a}=e^{\frac{(n+1)\ln a}{2}}=a^{\frac{n+1}{2}}.$$

解法二 原式
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}+\cdots+a^{\frac{n}{x}}-n}{n}\cdot x}\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t+\cdots+a^{nt}-n}{nt}}$$
$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{a^t\ln a+2a^{2t}\ln a+\cdots+na^{nt}\ln a}{n}}$$
$$=e^{\frac{n(n+1)}{2n}\ln a}=e^{\frac{n+1}{2}\ln a}=a^{\frac{n+1}{2}}.$$

【例3】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{2x}})}-4[x]\right]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

分析 本题为求隐含的分段函数的极限，在分段点处应根据极限存在的充要条件求解：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. 另外还要注意：当$x\to0^+$时，$[x]=0$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$；当$x\to0^-$时，$[x]=-1$，$e^{\frac{1}{x}}\to0$.

解 当$x\to0^+$时，有