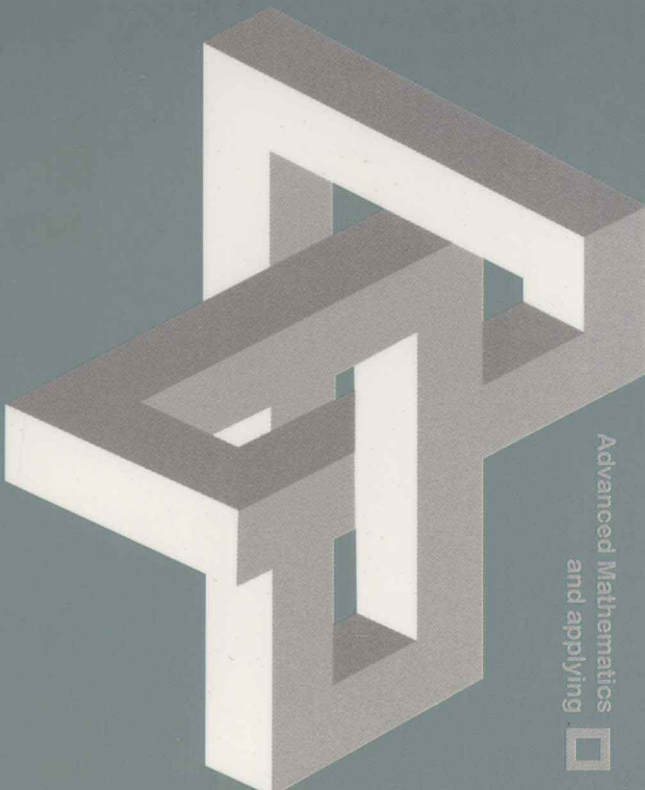
全国高职高专教育“十一五”规划教材



高等数学及应用

Advanced Mathematics and applying

主编　吕同富

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学及应用

Gao Deng Shu Xue Ji Ying Yong

主编 吕同富

副主编 金明华 王 英

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育"十一五"规划教材，是编者在多年教学研究的基础上、以基于实际应用的课程开发设计模式编写而成的。

本书在讲解经典而传统的高等数学知识时，列出了大量实际问题及图形图像，以便于学习者明确学习目的、了解知识背景、强化思维能力，并在一定程度上达到应用实践的自觉。本书主要内容包括：极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及应用、常微分方程、Fourier 级数与 Laplace 变换、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分、线性代数初步等。

本书可作为高职高专院校理工类专业的高等数学课程教材或参考书，也可在应用型本科、成人高校相关课程中使用，还可作为知识拓展和更新的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及应用/吕同富主编. —北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-04-029234-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 101984 号

策划编辑 邓雁城　**责任编辑** 李 茜　**封面设计** 赵 阳　**责任绘图** 尹 莉
版式设计 范晓红　**责任校对** 刘 莉　**责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2010 年 7 月第 1 版
印　　张	27.25	印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	680 000	定　　价	39.50 元

物料号　29234-00

序

吕同富教授主编的《高等数学及应用》是针对高等职业院校特点的一部新教材。该书的突出特色包括:

1. 作者在构思本教材时, 从“将数学建模的思想融入数学基础课教学”的角度进行了思考, 值得肯定；本书借鉴国内外优秀教材, 大量使用了应用实例引出问题, 这是目前国内同类教材中比较少见的, 也是本书的亮点；作者所选用的百余个“实际问题”作为应用示例, 无疑有助于激发学生的学习热情, 培养学生的应用能力；

2. 与传统的教材相比, 作者也努力融文化性于数学内容。很多篇章的“实际问题”涉及古今中外, 相映成趣, 通而不同, 很有启发性, 也增添了教材的趣味性；

3. 将现代数学软件融入数学基础课程教学, 无疑非常有意义, 这可以是本书进一步修订和改版的努力目标, 如果本书能够在这方面有所推进, 无疑会成为另外一个亮点。

高职教育的特色决定其数学课程无疑应当突出实用性。但数学教育中实用性 (或称工具性) 与文化性 (或称思维性) 的矛盾与平衡, 是多年来备受关注但始终困扰不断的问题。数学作为理性思维的重要载体, 对学生理性思维发展的作用也是不应当忽视的。即便是高职的学生也是属于中国受过高等教育的群体, 数学的教育如何培养学生的理性思维, 是今后需要认真思考和研究的课题。

希望作者与出版社共同努力, 经过教学实践, 将本书打造成为精品。

白峰杉

2010 年 4 月于清华园

前言

改革是永恒的主题。《中国教育和改革发展纲要》要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革, 要求在改革中求生存求发展。然而数学作为高职教育的基础课, 教学改革发展缓慢、举步维艰。为了进一步适应高职数学教学改革的需要, 作者做了艰苦的探索和研究, 历时两年完成了这本《高等数学及应用》, 希望它能在改革的大潮中激起一点浪花。

本书突出“高职”特色, 注重培养学生的实践能力, 基础理论以“实用为主、够用为度”, 基础知识广而不深、要求学生会用就行。基本应用技能贯穿始终。文字叙述准确, 简明扼要, 通俗易懂。“以例释理”, 理论联系实际。每部分知识既是教材的有效组成部分, 又相对独立完整, 具有一定的可剪裁性和拼接性, 可根据不同的培养目标将内容裁剪、拼接, 使前后课程互相衔接, 浑然一体。内容覆盖面广, 满足了专业大类对理论、技能及其基本素质的要求, 同时可满足深入学习的需要, 不是学多少编多少, 而是给学生留了一定的学习空间, 有利于培养学生再学习的能力。

本书内容紧密结合专业要求。站在专业的最前沿, 与生产实际紧密相连, 与相关专业的市场接轨, 渗透专业素质的培养。以介绍成熟、稳定、广泛应用的数学知识为主线, 同时介绍新知识、新方法、新技术等, 并适当介绍科技发展的趋势, 使学生能够适应未来技术进步的需要。与职业培养目标保持一致, 及时更新了教材中过时的内容, 增加了市场迫切要求的新知识, 使学生在毕业时能够适应企业的要求。强调用情景真实的“实际问题”, 营造现实工作过程中待解决问题的情境; 主张用问题启动学生的思维, 鼓励学生基于解决问题的学习、基于“实际应用”的学习; 通过设计各种情境真实的“实际问题”, 开拓学生的创新思维与想象空间; 充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接, 提高学生的综合素质与能力。

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简捷、思路清晰、深入浅出、富有启发性, 便于教学与自学。图文并茂, 有各种插图 450 多张, 不仅从不同的视角展现了计算机及其相关数学软件在现代数学教学中的作用, 更使抽象的数学变得生动直观。基于实际应用是本书的特色。书中除了传统意义的习题外, 引入了 160 多个应用实例, 简要地介绍了微积分在理工农医、天文地理、航天通信、科学计算、国防建设、民用生活等各方面的实际应用。展示了微积分的强大威力和不可替代的重要地位。

本书在高等教育出版社的指导下, 由中国数学会会员、中国职业技术教育学会教学工作委员会高职数学研究会委员吕同富教授编写。参加本书部分章节编写的还有: 金明华副教授编写了本书的全部习题和答案、王英副教授编写了第五章的部分内容、韦华教授编写了第四章的部分内容, 另外还有杨风翔教授、韩红副教授、汤风香、陈益军老师参加了部分内容的编写。全

书由吕同富教授统稿。

清华大学白峰杉教授认真审阅了书稿，从科学谋篇到整体布局、从开篇序论到内容细节等，都提出了很多宝贵的修改意见。这里向白老师及本书所列参考文献的作者们，以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心感谢。还有高等教育出版社的邓雁城编辑，两年来自始至终给作者以支持和鼓励，李茜编辑也付出了不少努力，在本书稿杀青之际一并真诚地道声谢谢。

本书是高职数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验。希望广大师生和同行在使用过程中给作者以指教，把高职数学教学改革进一步推向深入。

吕同富
电子邮箱:ltongfu@126.com
2010 年 5 月

目录

第一章

极限与连续

学习目标与要求

1. 理解极限与连续的概念，会用极限方法分析解决实际问题.
2. 掌握用极限方法判断函数在某点的连续性.
3. 掌握闭区间连续函数的性质.

1.1 极限思想的产生与发展

1. 极限思想的产生与发展

(1) 极限思想的由来

与其他科学思想方法一样, 极限思想也是社会实践的产物. 极限思想可以追溯到古代. 刘徽的割圆术是早期极限思想的应用; 古希腊人的穷竭法也蕴含了极限思想. 到了 16 世纪, 荷兰数学家斯泰文在考察三角形重心的过程中改进了古希腊人的穷竭法, 他借助几何直观, 大胆地运用极限思想思考问题. 在无意中把“极限方法”发展成为一个实用概念.

(2) 极限思想的发展

极限思想的进一步发展与微积分的建立紧密相连.16 世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期, 生产力得到极大的发展, 生产和技术中大量的问题, 只用初等数学的方法已无法解决, 要求数学突破只研究常量的传统范围, 而提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具, 这是促进极限发展、建立微积分的社会背景.

早期 Newton 和 Leibniz 以无穷小概念为基础建立微积分, 后来因遇到了逻辑困难, 他们接受了极限思想. Newton 用位移的改变量 Δs 与时间的改变量 Δt 之比 $\Delta s/\Delta t$ 表示运动物体的平均速度, 让 Δt 无限趋近于零, 得到物体的瞬时速度, 并由此引出导数概念和微分学理论. 他意识到极限概念的重要性, 试图以极限概念作为微积分的基础, 他说: “两个量和量之比, 如果在有限时间内不断趋于相等, 且在这一时间终止前互相靠近, 使得其差小于任意给定的差, 则最终就成为相等. ” 但 Newton 的极限观念也是建立在几何直观基础上, 因而无法得出极限的严格表述.Newton 所运用的极限概念, 只是接近于直观性的语言描述: “如果当 n 无限增大时,a_n 无限接近于常数 A, 则称 a_n 以 A 为极限. ” 这种描述性语言, 人们容易接受. 但是, 这种定义没有

定量地给出两个“无限过程”之间的联系, 不能作为科学论证的逻辑基础. 正因为当时缺乏严格的极限定义, 微积分理论才受到人们的怀疑与攻击, 例如, 在瞬时速度概念中, 究竟 Δt 是否等于零? 如果说是零, 怎么能用它去作除法呢? 如果它不是零, 又怎么能把包含着它的那些项去掉呢? 这就是数学史上所说的无穷小悖论. 英国哲学家、大主教 Berkley 对微积分的攻击最为激烈, 他说微积分的推导是“分明的诡辩”. Berkley 之所以激烈地攻击微积分, 是由于当时的微积分缺乏牢固的理论基础, 连 Newton 自己也无法摆脱极限概念中的混乱. 这个事实表明, 弄清极限概念, 建立严格的微积分理论基础, 不但是数学本身所需要的, 而且有着认识论上的重大意义.

(3) 极限思想的完善

极限思想的完善与微积分的严格化密切联系. 在很长一段时间里, 微积分理论基础的问题, 许多人都曾尝试解决, 但都未能如愿以偿. 这是因为数学的研究对象已从常量扩展到变量, 而人们对变量数学特有的规律还不十分清楚; 对变量数学和常量数学的区别和联系还缺乏了解; 对有限和无限的对立统一关系还不明确. 这样, 人们使用习惯了的处理常量数学的传统思想方法, 就不能适应变量数学的新需要, 仅用旧的概念说明不了这种“零”与“非零”相互转化的辩证关系. 到了 18 世纪,Robins、d'Alembert 与 Huilier 等人先后明确地表示必须将极限作为微积分的基础概念, 并且都对极限作出过各自的定义. 其中 d'Alembert 的定义是: “一个量是另一个量的极限, 假如第二个量比任意给定的值更为接近第一个量”, 它接近于现在极限的正确定义. 然而, 这些人的定义都无法摆脱对几何直观的依赖. 事情也只能如此, 因为 19 世纪以前的算术和几何概念大部分都是建立在几何量的概念上.

首先用极限概念给出导数正确定义的是捷克数学家 Bolzano, 他把函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 定义为差商 $\Delta y/\Delta x$ 的极限, 他强调指出 $f'(x)$ 不是两个零的商.Bolzano 的思想很有价值, 但关于极限的本质他仍未说清楚.

到了 19 世纪, 法国数学家 Cauchy 在前人工作的基础上, 比较完整地阐述了极限概念及其理论, 他在《分析教程》中指出: “当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值, 最终使变量的值和该定值之差要多小就多小, 这个定值就叫做所有其他值的极限值, 特别地, 当一个变量的数值 (绝对值) 无限地减小使之收敛到极限零, 就说这个变量成为无穷小.” Cauchy 把无穷小视为以零为极限的变量, 这就澄清了无穷小“似零非零”的模糊认识, 这就是说, 在变化过程中, 它的值可以非零, 但它变化的趋向是“零”, 可以无限地接近于零. Cauchy 试图消除极限概念中的几何直观, 作出极限的明确定义, 然后去完成 Newton 的愿望. 但 Cauchy 的叙述中还存在描述性的词语, 如“无限趋近”、“要多小就多小”等, 因此, 还保留着几何和物理的直观痕迹, 没有达到彻底严密化的程度.

为了排除极限概念中的直观痕迹,Weierstrass 提出了极限的静态的定义, 给微积分提供了严格的理论基础. 所谓 a_n 无限趋近于 A, 是指: “如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立.” 这个定义, 借助不等式, 通过 ε 和 N 之间的关系, 定量地、具体地刻画了两个“无限过程”之间的联系. 因此, 这样的定义是严格的定义, 可以作为科学论证的基础, 至今仍在微积分书籍中使用. 在该定义中, 涉及的仅仅是数及其大小关系, 此外只是给定、存在、任意等词语, 已经摆脱了“趋近”一词, 不再求助于运动的直观.

自从解析几何和微积分问世以后, 运动进入了数学, 人们有可能对物理过程进行动态研究. 之后,Weierstrass 建立的 $\varepsilon - N$ 语言, 则用静态的定义刻画变量的变化趋势.这种“静态—动态—

静态”的螺旋式的演变, 反映了数学发展的辩证规律。

2. 极限思想的思维功能

极限思想在现代数学乃至物理学等学科中有着广泛的应用, 这是由它本身固有的思维功能所决定. 极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系, 是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用. 借助极限思想, 人们可以从有限认识无限, 从“不变”认识“变”, 从直线形认识曲线形, 从量变认识质变, 从近似认识精确. 无限与有限有本质的不同, 但二者又有联系, 无限是有限的发展. 无限个数的和不是一般的代数和, 把它定义为“部分和”的极限, 就是借助于极限的思想方法, 从有限来认识无限. “变”与“不变”反映了事物运动变化与相对静止两种不同状态, 但它们在一定条件下又可相互转化, 这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”. 例如, 要求变速直线运动的瞬时速度, 用初等方法无法解决, 困难在于速度是变量. 为此, 人们先在小范围内用匀速代替变速, 并求其平均速度, 把瞬时速度定义为平均速度的极限, 就是借助于极限的思想方法, 从“不变”认识“变”. 曲线形与直线形有着本质的差异, 但在一定条件下也可相互转化, 正如恩格斯所说: “直线和曲线在微分中终于等同起来了”. 善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的重要手段之一. 直线形的面积容易求得, 求曲线形的面积问题用初等的方法是不能解决的. 刘徽用圆内接多边形逼近圆, 一般地, 人们用小矩形的面积来逼近曲边梯形的面积, 都是借助于极限的思想方法, 从直线形来认识曲线形. 量变和质变既有区别又有联系, 两者之间有着辩证的关系. 量变能引起质变, 质和量的互变规律是辩证法的基本规律之一, 在数学研究工作中起着重要作用. 对任何一个圆内接正多边形来说, 当它边数加倍后, 得到的还是内接正多边形, 是量变而不是质变; 但是, 不断地让边数加倍, 经过无限过程之后, 多边形就“变”成圆, 多边形面积便转化为圆面积. 这就是借助于极限的思想方法, 从量变来认识质变. 近似与精确是对立统一的关系, 两者在一定条件下也可相互转化, 这种转化是数学应用于实际计算的重要诀窍. 前面所讲到的“部分和”、“平均速度”、“圆内接正多边形面积”, 分别是相应的“无穷级数和”、“瞬时速度”、“圆面积”的近似值, 取极限后就可得到相应的精确值. 这都是借助于极限的思想方法, 从近似来认识精确.

3. 建立概念的极限思想

极限的思想方法贯穿于微积分课程的始终. 可以说微积分中的几乎所有的概念都离不开极限. 在几乎所有的微积分著作中, 都是先介绍函数理论和极限的思想方法, 然后利用极限的思想方法给出连续函数、导数、定积分、级数的敛散性、多元函数的偏导数、广义积分的敛散性、重积分和曲线积分与曲面积分的概念.

4. 解决问题的极限思想

极限的思想方法是微积分乃至全部高等数学必不可少的一种重要方法, 也是微积分与初等数学的本质区别. 微积分之所以能解决许多初等数学无法解决的问题 (例如求瞬时速度、曲线弧长、曲边形面积、曲面体体积等问题), 正是由于它采用了极限的思想方法. 有时我们要确定某一个量, 首先确定的不是这个量的本身而是它的近似值, 而且所确定的近似值也不仅仅是一个而是一连串越来越准确的近似值; 然后通过考察这一连串近似值的趋向, 把那个量的准确值确定下来. 这就是运用了极限的思想方法.

5. 极限思想与 π 的计算

前面提到计算圆的面积问题, 这里不能不提到一些数学家的名字.

(1) 第一个用科学方法寻求圆周率数值的人阿基米德.

阿基米德在《圆的度量》(公元前 3 世纪) 中用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界, 从正六边形开始, 逐次加倍计算到正 96 边形, 得到 $(3+10/71)<\pi<(3+1/7)$, 开创了圆周率计算的几何方法 (亦称古典方法, 或阿基米德方法), 得出精确到小数点后两位的 π 值.

(2) 中国数学家刘徽与祖冲之对 π 的贡献.

中国数学家刘徽在注释《九章算术》(263 年) 时只用圆内接正多边形就求得 π 的近似值, 也得出精确到两位小数的 π 值, 他的方法被后人称为割圆术. 他用割圆术一直算到圆内接正 192 边形. 南北朝时期著名数学家祖冲之进一步得出精确到小数点后 7 位的 π 值 (约 5 世纪下半叶), 给出不足近似值 3.141 592 6 和过剩近似值 3.141 592 7, 还得到两个近似分数值, 密率 355/113 和约率 22/7. 他的辉煌成就比欧洲至少早了 1000 年.

(3) 群雄逐鹿 π.

密率在西方直到 1573 才由德国人奥托得到,1625 年发表于荷兰工程师安托尼斯的著作中, 欧洲称之为安托尼斯率. 阿拉伯数学家卡西在 15 世纪初求得圆周率 17 位精确小数值, 打破祖冲之保持近千年的纪录. 德国数学家柯伦于 1596 年将 π 值算到 20 位小数值, 后投入毕生精力, 于 1610 年算到小数后 35 位数, 该数值被用他的名字称为鲁道夫数. 无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种 π 值表达式纷纷出现,π 值计算精度也迅速增加.1706 年英国数学家梅钦计算 π 值突破 100 位小数大关. 1873 年另一位英国数学家尚可斯将 π 值计算到小数点后 707 位, 可惜他的结果从 528 位起错了. 到 1948 年英国的弗格森和美国的伦奇共同发表了 π 的 808 位小数值, 成为人工计算圆周率值的最高纪录.

(4) 电子计算机的出现使 π 值计算有了突飞猛进的发展.

1949 年美国马里兰州阿伯丁的军队弹道研究实验室首次用计算机 (ENIAC) 计算 π 值, 算到 2 037 位小数. 1989 年美国哥伦比亚大学研究人员用克雷 –2 型和 IBM-VF 型巨型电子计算机计算出 π 值小数点后 4.8 亿位数, 后又继续算到小数点后 10.1 亿位数. 至今, 最新纪录是小数点后 25 769.803 7 亿位.

1.2 函数极限

1.2.1 函数极限

实际问题 1.1 圆的周长与面积

在生产和实践中, 人类首先学会求正方形、矩形、三角形、平行四边形、梯形、任意多边形的周长和面积. 在很早以前, 人们求圆的周长和面积还是一件很困难的事情, 还不知道圆的周长$=2\pi r$, 圆的面积$=\pi r^2$, 也不知道 π 的值是多少. 我国古代数学家刘徽为了计算圆的周长和面积, 于魏景元四年 (公元 263 年) 创立了“割圆术”. 刘徽借助圆的内接正多边形序列定义了圆的周长和面积. 刘徽的作法是: 作圆的第一个内接正多边形 (正六边形), 平分每个边所对的弧作第二个内接正多边形 (正十二边形), 以下用同样的方法, 继续作圆的第三个内接正多边形 (正二十四边形), 圆的第四个内接正多边形 (正四十八边形) ……如图 1.1 所示. 显然无论正多边形的边数怎样多, 每个圆内接正多边形的周长和面积都容易求得. 于是, 得到圆的内接正多边形周长序列:

$$P_6, P_{12}, P_{24}, \cdots, P_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.1}$$

圆的内接正多边形面积序列:

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.2}$$

其中, 通项 $P_{2^{n-1}6}$ 表示第 n 次作的正 $2^{n-1}\times 6$ 边形的周长, 通项 $A_{2^{n-1}6}$ 表示第 n 次作的正 $2^{n-1}\times 6$ 边形的面积. 显然, 正多边形周长序列逼近了圆的周长, 正多边形面积序列逼近了圆的面积. 刘徽说: "割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣." 很明显, 当圆的内接多边形的边数成倍无限增加时, 圆内接正多边形周长序列将无限地趋近于圆的周长. 圆内接正多边形的面积序列将无限地趋近于圆的面积. 既多边形序列的极限位置是圆. 多边形极限位置的周长是圆的周长, 多边形极限位置的面积就是圆的面积. 对于正多边形的周长, 当 n 无限增大时, 圆的内接正多边形周长序列 $\{P_{2^{n-1}6}\}$ 将逐渐稳定趋于某个数 l. "割之弥细", 用圆的内接正多边形的周长近似代替圆的周长, 而圆的周长 "所失弥少", 当 "割之又割, 以至于不可割", 即圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时, 圆的内接正多边形的极限位置 "则与圆周合体", 此时, 圆的内接正多边形周长序列 $P_{2^{n-1}6}$ 稳定于某个常数 l,l 就是圆的周长, 只有在无限的过程中才能真正 "无所失矣".

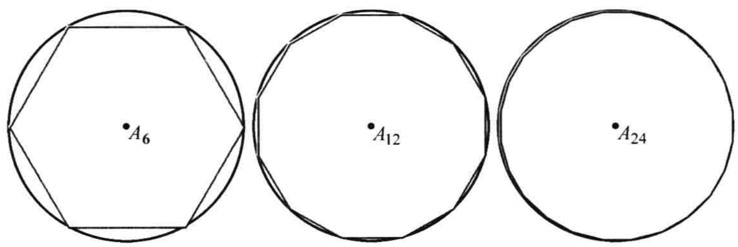


图 1.1 正多边形逼近圆

图 1.1 的渐近过程很快, 我们可以放慢了看一下, 如图 1.2 所示 (这不是刘徽当时的原作).

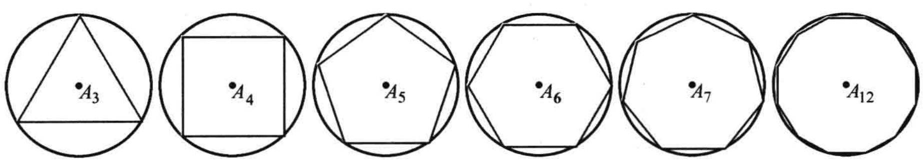


图 1.2 正多边形逼近圆

根据上述分析, 圆的周长可以这样定义: 若圆的内接正多边形的周长序列 $P_{2^{n-1}6}$ 稳定于某个数 l(当 n 无限增大时), 则 l 为圆的周长.

圆是曲边形, 它的内接多边形是直边形, 二者有本质区别, 但是这个区别又不绝对, 当 "圆的内接正多边形的边数无限增加" 时, 圆的内接多边形转化为圆周. 因此, 在无限的过程中, 直边形能转化为曲边形. 即在无限的过程中, 由直边形的周长序列得到了曲边形的周长. 这就是极限思想和方法在定义圆的周长时的应用.

根据圆周长的定义, 可以计算出半径为 r 的圆周长 $c=2\pi r$.

实际问题 1.2 温度下降趋势

将一个温度为 500 ℃的物体移置室温为 25 ℃的房间中, 观察温度变化趋势. 结果发现, 开始高温物体温度降低很快, 迅速降到 400 ℃、 300 ℃、 200 ℃、 100 ℃……随着时间的延长, 高温物体温度下降越来越慢, 经验告诉我们, 如果“时间足够长”, 这个物体的温度将降至室温 25 ℃. 如图 1.3 所示. 用符号表示为

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 25.$$

实际问题 1.3 电阻对电流强度的影响

由 Ohm 定律可知, 电压=电阻 × 电流强度,$U = RI$. 当电压 U 一定时, 电流强度 I 与电阻 R 成反比,$I = \dfrac{U}{R}$, 即随着电阻的增大电流会越来越小. 如图 1.4 所示. 用符号表示为

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0.$$

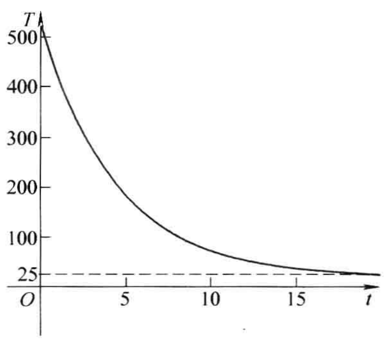


图 1.3 物体温度越来越小

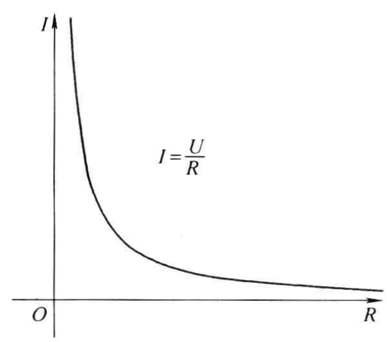


图 1.4 电流强度越来越小

□ 定义 1.1 无穷远点极限的描述性定义

如果当 x 绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A, 则称 A 为函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \tag{1.3}$$

如果当 x 正向无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A, 则称 A 为函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A. \tag{1.4}$$

如果当 x 负向无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A, 则称 A 为函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A. \tag{1.5}$$

例 1.1 观察研究函数 $y=\dfrac{1}{x^2},y=\dfrac{2x}{x-3},y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 的图像 (图 1.5 、图 1.6 、图 1.7) 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-3}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

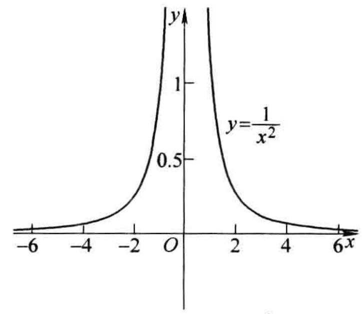


图 1.5 $y=\dfrac{1}{x^2}$

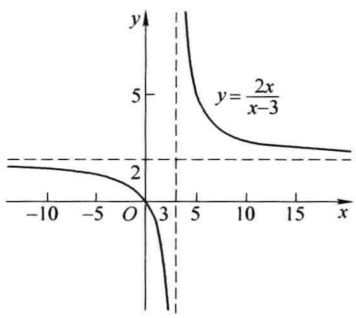


图 1.6 $y=\dfrac{2x}{x-3}$

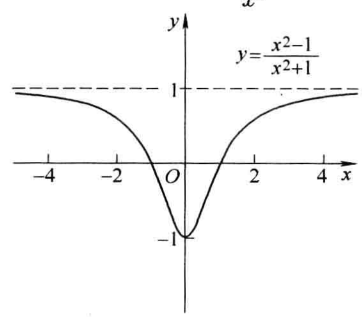


图 1.7 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

例 1.2 观察研究函数 $y=\arctan x.y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ 的图像 (图 1.8 、图 1.9) 可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

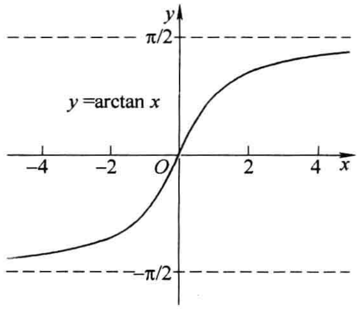


图 1.8 $y=\arctan x$

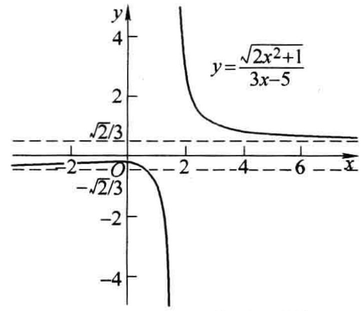


图 1.9 $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$