普通高等教育“十二五”规划教材·工科数学系列教材

线性代数与几何

主　编　张保才
副主编　郭志芳　李京艳
　　　　张素娟　郭秀英

科学出版社

内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材·工科数学系列教材”中的一本，是编者在多个省部级科研成果的基础上，结合多年教学经验编写而成的．本书共6章，内容包括：行列式，矩阵，向量空间，线性方程组，相似矩阵、二次型及二次曲面，线性空间与线性变换，每节后有习题，每章后有综合习题，并在部分章节配有适当的应用题、数学史或数学文化等内容．书后附有习题答案．在教学上，本书与同系列《高等数学》（上下册）配套使用．

本书面向工科类学生，可作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生的人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/张保才主编．—北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材·工科数学系列教材

ISBN 978-7-03-035307-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第190402号

责任编辑：相 凌／责任校对：林青梅

责任印制：阎 磊／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2012年8月第一次印刷 印张：14 1/4

字数：329 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

编 委 会

前　言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”和全国高等学校数学研究中心承担科技部“创新方法工作专项项目——科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果基础上，通过多年的教学实践，广泛征求意见，按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会2009年编制的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的．本系列教材在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定，在总体结构、编写思想和特点、难易程度把握等方面，经受了实践的检验．本系列教材包括《高等数学》(上下册)、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》等．在教学中，《高等数学》(上下册)与《线性代数与几何》配套使用．

本系列教材在编写中力求做到渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养；在内容编排上从实际问题出发，建立数学模型，抽象出数学概念，寻求数学处理方法，解决实际问题．通过学习本系列教材，希望提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力．书中带有“*”号的内容为选学内容．

本书具有以下特点：

(1) 以简明适用为原则，突出了对基本概念、基本方法、基本理论的介绍和训练．

(2) 在内容选择与安排上，注意代数理论体系的系统性与严谨性、空间几何的直观性，将空间解析几何与线性代数做了有机的结合，使读者能够对基本概念有更深入的理解．

(3) 在内容体系上努力做到结构设计合理，重点突出，重视理论联系实际．

(4) 在重要的章节附有实际应用题，将数学建模思想巧妙地渗透到其中，调动学生学习的积极性，提高学生分析问题和解决问题的能力．

(5) 为培养学生学习数学的兴趣，在部分章节加入了与内容相关的数学史和数学文化作为阅读材料供学生选读．

(6) 在每节后有精心选配的习题，各章后配有综合习题，书后附有习题答案．

本书由张保才任主编，负责总体方案的设计、具体内容安排及统稿工作．参编者有李京艳(第1、6章)、张素娟(第2章)、郭志芳(第3章及第5章7～9节)、郭秀英(第4章及第5章1～6节)、胡俊美(每章后的数学史和数学文化部分)．本书在编写过程中，得到了顾祝全、牟卫华、刘响林、王永亮、胡荣老师的大力支持，刘宝友、孙秋杰、胡俊美老师也提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，书中仍可能有不当之处，敬请读者批评指正．

编　者

2012年4月

目　　录

第 1 章 行 列 式

行列式概念的建立源于求解线性方程组的实际需要，它作为一个重要的数学工具，在数学的各个领域和其他众多科学技术领域（如物理学、力学、工程技术等）都有着广泛的应用.

本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、行列式按行（列）展开、拉普拉斯（Laplace）展开定理以及解线性方程组的克莱姆（Cramer）法则 .

1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

引例 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1.1.1}$$

解 以 a_{22}乘第一个方程，以 a_{12}乘第二个方程，然后两式相减，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，即有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

这就是二元线性方程组(1.1.1)的解公式 . 为了便于记忆，我们引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\triangleq D$，并规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**，其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$称为行列式的**元素** . 这四个元素排成两行两列，横排称为**行**，竖排称为**列** . 元素 a_{ij} 的右下角有两个下标 i 和 j，第一个下标 i 称为**行标**，它表示元素所在的行；第二个下标 j 称为**列标**，它表示元素所在的列 . 如 a_{12}是位于第一行第二列上的元素，而 a_{21}是位于第二行第一列上的元素 . 从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的**主对角线**，从行列式的右上角到左下角的连线称为行列式的**次对角线** .

从式(1.1.2)可知，二阶行列式是两项的代数和，一项是主对角线上两元素的乘积，取正号；另一项是次对角线上两元素的乘积，取负号 . 此规律可用对角线法则来记忆，如

图 1.1所示，二阶行列式 D 等于实线上两元素的乘积减去虚线上两元素的乘积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

图 1.1

据此定义，可计算出

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

这样当 $D\neq0$ 时，方程组(1.1.1)的解公式便可以简洁明了地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中分母 D 是由方程组(1.1.1)的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的二阶行列式，称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**．D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列元素依次用方程组右端的常数项替换后所得的二阶行列式($j=1,2$).

例 1.1.1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=1 \\ 2x_1+7x_2=-3 \end{cases}.$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=3\times7-(-2)\times2=25\neq0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=1\times7-(-2)\times(-3)=1,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=3\times(-3)-1\times2=-11.$$

所以方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{1}{25}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{11}{25}$.

2. 三阶行列式

与二元线性方程组类似，对于含三个未知量 x_1,x_2,x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}. \tag{1.1.3}$$

可同样逐次消元，消去 x_3 和 x_2，可得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

将上式中 x_1 的系数记为 D，则当 $D\neq0$ 时，有

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

类似可得

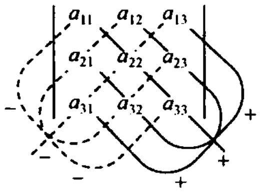
$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

这是三元线性方程组(1.1.3)的解．显然，要记住这两个式子相当困难．为便于方程组的求解和记忆，引入由三行三列元素构成的三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq D$，并规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

此规律也可借助于对角线法则来记忆，如图 1.2 所示，图中有三条实线和三条虚线，每条实线所连三个元素的乘积取正号，每条虚线所连三个元素的乘积取负号，三阶行列式等于这六个乘积的代数和．



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

图 1.2

注 计算行列式的对角线法则只适用于二阶、三阶行列式，并不能推广到更高阶的行列式．

现将方程组(1.1.3)中常数项 b_1,b_2,b_3 依次替换 D 中第 1 列、第 2 列、第 3 列元素所得的行列式分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

按三阶行列式定义计算 D_1,D_2,D_3，发现三者恰为用消元法解方程组(1.1.3)所得 x_1,x_2,x_3 表达式的分子，而分母均为 D(称 D 为线性方程组(1.1.3)的系数行列式)．当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1.3)有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_2-x_3=3 \\ x_1+x_3=2 \end{cases}.$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times1\times1+(-1)\times(-1)\times1+0\times0\times0-$$

$$1\times(-1)\times0-(-1)\times0\times1-0\times1\times1=2\neq0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\3 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+2+3=6,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & -1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3-1+2=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2-3-1=-2.$$

所以方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1.$

1.1.2　*n* 阶行列式

从二、三阶行列式定义可以看出，二阶行列式是 2^2 个元素排成的两行、两列的表，它表示 2 项，即 2！项的代数和；三阶行列式是 3^2 个元素排成的三行、三列的表，它表示 6 项，即 3！项的代数和．可以想象，n 阶行列式应由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的表构成，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

那么，n 阶行列式表示多少项的代数和？每项的正负号如何确定？当 $n>3$ 时，对角线法则并不适用，故为求得上述问题的解决，需对二阶、三阶行列式做进一步研究，以便找出行列式所共有的特性．为此，下面先介绍全排列和逆序数概念．

1．全排列及逆序数

在初等数学中，我们已经学过排列的知识．n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的**全排列**（简称**排列**），n 个不同元素的所有排列个数用 P_n 表示．则有

$$P_2=2!,P_3=3!,\cdots,P_n=n!\ .$$

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序（例如，n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），按标准次序排成的排列称为**标准排列**．在 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**．显然，标准排列的逆序数为 0.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．

下面介绍求逆序数的方法．

考虑由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列. 规定由小到大为标准次序(即排列 $12\cdots n$ 为标准排列). 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

是由 $1,2,\cdots,n$ 构成的一个排列,逐个考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 小且排在 p_i 后面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. n 个元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.1.3 求排列 236154 的逆序数.

解 比 2 小且排在 2 后面的数只有一个(数 1),故 2 的逆序数为 1;

比 3 小且排在 3 后面的数只有一个(数 1),故 3 的逆序数为 1;

比 6 小且排在 6 后面的数有三个(数 1,5,4),故 6 的逆序数为 3;

比 1 小且排在 1 后面的数不存在,故 1 的逆序数为 0;

比 5 小且排在 5 后面的数只有一个(数 4),故 5 的逆序数为 1;

4 在末位,故逆序数为 0.

所以,此排列的逆序数为 $t=1+1+3+0+1+0=6$.

此排列为偶排列.

2. 对换

对于给定的一个排列,将其中任意两个元素对调,其余元素不动,得一新的排列,这种作出新排列的手续称为**对换**. 将相邻两个元素对换,称为**相邻对换**. 如

$$456231\xrightarrow[\text{5 与 6 对换}]{\text{一次相邻对换}}465231,$$

$$456231\xrightarrow[\text{5 与 3 对换}]{\text{一次对换}}436251.$$

容易算出

$$t(456231)=11,$$
$$t(465231)=12,$$
$$t(436251)=10.$$

结果表明,经一次对换(无论是相邻对换还是不相邻对换),排列改变了奇偶性. 此结论具有一般性.

定理 1.1.1 排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设对换排列 $p_1\cdots p_lpqq_1\cdots q_m$ 中的 p 与 q,得到 $p_1\cdots p_lqpq_1\cdots q_m$. 显然元素 $p_1,\cdots,p_l$ 与 $q_1,\cdots,q_m$ 的逆序数经过对换并不改变,而 p,q 两个元素的逆序数改变为:当 $p<q$ 时,经对换后 p 的逆序数没有改变,而 q 的逆序数增加 1;当 $p>q$ 时,经对换后 p 的逆序数减少 1,而 q 的逆序数没有改变. 总之,对换前后两个排列的逆序数相差 1,所以两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设对换排列 $p_1\cdots p_l p q_1\cdots q_m q r_1\cdots r_k$ 中的 p 与 q,得到

$$p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k.$$

这个对换过程可看作先将元素 p 依次与 $q_1,\cdots,q_m,q$ 作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $p_1\cdots p_l q_1\cdots q_m q p r_1\cdots r_k$,再用元素 q 依次与 $q_m,\cdots,q_1$ 作 m 次相邻对换,调成 $p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$. 总之,排列 $p_1\cdots p_l p q_1\cdots q_m q r_1\cdots r_k$ 经 $2m+1$ 次相邻对换调成排列 $p_1\cdots p_l q q_1\cdots q_m p r_1\cdots r_k$,所以两个排列的奇偶性不同.

注意到标准排列是偶排列(逆序数为 0),不难得到如下推论.

推论 1.1.1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

3. 三阶行列式的结构

三阶行列式的定义式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出其结构特点:

(1) 三阶行列式由 3^2 个元素构成,定义式右端的每一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,这里行标排成标准排列 123,而列标排成 $p_1p_2p_3$,是自然数 1,2,3 的某个排列. 这样的排列共有 6 个($P_3=3!=6$),正好对应定义式右端的项数. 这说明,三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和,共有 3! 项.

(2) 6 项中带正号、负号的各 3 项:带正号的 3 项列标排列是 123、231、312,均为偶排列;带负号的 3 项列标排列是 132、213、321,均为奇排列.

因此各项所带正负号可以表示为 $(-1)^t$,其中 t 是列标排列的逆序数.

由以上分析,三阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

4. n 阶行列式的定义

定义 1.1.1 n 阶行列式由 n^2 个元素构成,其定义式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列,t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 1,

$2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

由定义知,n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和,其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积,每项前面所带符号 $(-1)^t$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 t 确定.

n 阶行列式 D 有时也简记作 $\Delta(a_{ij})$.

规定 一阶行列式的值就等于构成行列式的元素,如 $|-1|=-1$. 注意不要与绝对值记号混淆.

下面给出另一形式的 n 阶行列式定义.

定理 1.1.2 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证 由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的全排列,因此 $a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 是取自不同行、不同列的元素的乘积.

若交换 $a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 中两个元素 $a_{p_i i}$ 与 $a_{p_j j}$,则其行标排列由 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 变为 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$,同时其列标由排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 变为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$,由定理 1.1.1 知,二者逆序数的奇偶性均改变. 由推论 1.1.1 知,如果 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列,则经过偶数次对换可换成标准排列,同时其列标由标准排列 $12\cdots n$ 变为 $q_1q_2\cdots q_n$,为偶排列;如果 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列,则经过奇数次对换可换成标准排列,同时其列标由标准排列 $12\cdots n$ 变为 $q_1q_2\cdots q_n$,为奇排列,即 $(-1)^t=(-1)^s$,其中 s 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 故 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 中每一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 均可经过有限次对换变为 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$,即

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=D.$$

例 1.1.4 根据定义可知,对角行列式(主对角线上可能有非零元素,其余元素全为 0)

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.1.5 证明

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 记 $\lambda_1=a_{1n},\lambda_2=a_{2,n-1},\cdots,\lambda_n=a_{n1}$. 则由 n 阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数,故

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.1.6 计算 n 阶上三角行列式(主对角线以下的元素全为 0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是主对角线以下的元素皆为 0,即当 $j<i$ 时,$a_{ij}=0$.

n 阶行列式的每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 而该行列式除主对角线上 n 个元素乘积之外,其余各项中至少有一个元素为 0,故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中 $t=t(12\cdots n)=0$.

同样,下三角行列式(主对角线以上元素全为 0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习 题 1.1

1. 用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 按自然数从小到大的标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 4132; (2) 2431; (3) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;

(4) $24\cdots(2n)(2n-1)\cdots31$; (5) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$;

(6) 如果排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 有 s 个逆序,求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{24}$ 的项,并确定这些项的符号.

4. 在六阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 与 $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$ 各应取什么符号?

5. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零,证明:该行列式为零.

6. 用定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质与计算

一般情况下，由定义计算高阶行列式的工作量很大，且符号确定比较麻烦．若行列式中零元素较多，则计算会简单得多．如果能够通过适当的变换将行列式中某些元素变为零，则会简化行列式的计算．为此，我们介绍行列式的性质．

1.2.1 行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**．显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式．

性质 1.2.1　行列式与它的转置行列式相等．

证　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义 1.1.1，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

根据定理 1.1.2，又有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1.2.1 表明,行列式中的行与列的地位是对等的,行列式的性质凡是对行成立的,对列也同样成立,反之亦然．于是下面性质只需对行(或列)给出证明．

性质 1.2.2　互换行列式的两行(列),行列式变号．互换 i,j 两行(列),记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换 i,j 两行得到的(不妨设 $i<j$),即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kl}=a_{kl}$;当 $k=i,j$ 时,$b_{il}=a_{jl},b_{jl}=a_{il}(l=1,2,\cdots,n)$,于是

$$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列,t 为排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数．设排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1,则 t 与 t_1 相差 1,于是有 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$,故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论 1.2.1　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零．

类似性质 1.2.2,以下各性质均可利用行列式的定义加以证明．

性质 1.2.3　用数 k 乘行列式等于用 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素．k 乘第 i 行(列)记为 $kr_i(kc_i)$.

推论 1.2.2　行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．第 i 行(列)提出公因子 k 记为 $r_i\div k(c_i\div k)$.

例如,

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12\\ 0 & -2 & 2\\ 15 & 5 & 10\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\div 5]{r_1\div 3,\ r_2\div 2}3\times2\times5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=30\times15=450.$$

推论 1.2.3　行列式中有一行(列)元素全为零,则此行列式的值等于零．

由性质 1.2.3 及其推论 1.2.1 可得:

性质 1.2.4　行列式如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式的值等于零．

性质 1.2.5　若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和,则此行列式等于两个行列式之和．例如第 j 列的元素都是两数之和,则有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a_{1j}' & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a_{2j}' & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a_{nj}' & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}' & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j}' & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1.2.6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k,然后加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变. 例如用数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

利用以上各性质可以简化行列式的计算.

例 1.2.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+2r_1}} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3+3r_2} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-4r_3} -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9.$$

例 1.2.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是各列 4 个数之和都是 10,把第 2,3,4 行上的元素同时加到第 1 行,提出公因式 10,各行再减去第 1 行的 3 倍,即可将原行列式化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 10}$$

$$10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1}} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -80.$$