Gaodeng
Shuxue Xitike
Tongbu Jiaocai

高等数学习题课同步教材

四川大学数学学院高等数学教研室　编

四川大学出版社

aodeng

Shuxue Xitike Tongbu Jiaocai

高等数学习题课同步教材

四川大学数学学院高等数学教研室　编

四川大学出版社

责任编辑：毕　潜
责任校对：唐　飞
封面设计：墨创文化
责任印制：李　平

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课同步教材 / 四川大学数学学院高等数学教研室编. —成都：四川大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5614-5998-0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①四…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 154642 号

书名　**高等数学习题课同步教材**

作　者	四川大学数学学院高等数学教研室
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-5998-0
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	17
字　数	388 千字
版　次	2012 年 9 月第 1 版
印　次	2012 年 9 月第 1 次印刷
定　价	35.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

前　言

高等数学是理工类大学的一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目. 为帮助学生学好该课程，我们根据多年的教学经验和同学们在学习的过程中反馈的信息，结合历年期末考核和考研及高等数学竞赛题目，编写了与四川大学数学学院主编的《高等数学》（四川大学出版社）配套的《高等数学习题课同步教材》.

本书旨在帮助、指导广大学生进一步理解高等数学（包括微积分和线性代数）的基本概念，掌握更多的解题方法与技巧，提高数学修养和应试能力. 本书共分十六章，每章包括知识结构及内容小结、典型例题精解、习题及参考答案、测试题及参考答案等. “知识结构及内容小结”主要对本章涉及的基本概念、基本定理进行了系统梳理，提出深入理解基本概念和定理需要注意的问题，解答读者学习中可能出现的疑难问题，特别指出各类考试中经常考查的重要知识点；“典型例题精解”对相应章节基本题型精选了大量不同难度、不同风格的例题，通过例题讲解，探索解题思路，提炼基本方法和常用技巧；“习题及参考答案”针对课后练习的不足进行了补充，并给出了参考答案和提示；“测试题及参考答案”设计了各类考试中经常考到的基础题和综合题，有些题目选自历年期末考试题或全国研究生入学考试试题，并给出了参考答案和提示.

本书结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在复习、归纳高等数学基础知识的同时，又注意提炼和渗透数学思想方法和解题技巧. 本书可作为高等数学习题课的教材、高等数学课程参考书，也可作为考研的参考书目.

四川大学数学学院高等数学教研室的牛健人、王霞、邓英、邓荣春、吕子明、何志蓉、冷忠建、张晴、张慎语、李海、邹述超、闵心畅、陈丽、周扬、周海玲、祝亭玉、胡文春、钮海、项兆虹、徐小湛、高波等参加了本书的编写工作.

在本书的编写过程中得到了四川大学教务处、四川大学数学学院和四川大学出版社的大力支持和帮助，在此致谢. 由于编写的时间仓促，缺点和错误在所难免，敬请读者原谅并指正.

四川大学数学学院高等数学教研室

2012 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

一、内容简介

(一)基本问题

1. 集合

(1) 集合的概念.

集合：是指具有某种特定性质的事物的总体，简称集.

元素：组成集合的每一个事物称为该集合的元素，简称元.

表示集合的两种常用方法如下：

列举法：把集合的元素一一表示出来，例如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

描述法：若集合 A 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的集合，则

$$A=\{x \mid x \text{ 具有某种性质 } P\}.$$

(2) 集合的运算.

设 A 与 B 是两个集合.

并：由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

交：由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

差：由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

全集：在集合 I 中研究问题，若所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，则称集合 I 为全集或者基本集.

余集：称上述 I 和 A 的差集 $I\backslash A$ 为 A 的余集或者补集，记作 A^c.

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

对偶率：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(3) 区间和邻域. 设 a 与 b 都是实数，且 $a < b$.

开区间：数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记为 (a, b).

闭区间：数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记为 $[a, b]$.

半开半闭区间：$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 与 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 均为半开半闭区间.

邻域：以 a 为中心的任何开区间成为点 a 的邻域，记为 $U(a)$.

点 a 的 δ 邻域：δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

上述点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

去心 δ 邻域：点 a 的 δ 邻域中去掉 a，称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

左 δ 邻域：开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域.

右 δ 邻域：开区间 $(a, a-\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

2. 映射

(1) 映射的概念.

映射的定义：设 X 与 Y 是两个非空集合，若存在一个对应法则 f，使得对 $\forall x \in X$，有唯一确定的元素 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的一个象，并记作 $y = f(x)$，元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原象，集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$，即 $D(f) = X$；Y 的子集

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

称为映射 f 的值域.

定义域、值域以及对应法则组成映射的三要素.

满射：对映射 f，$f: X \rightarrow Y$，若 $f(X) = Y$，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或者满射.

单射：若 $\forall x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 上的单射.

双射：若 f 即是单射又是满射，则称 f 为 X 到 Y 上的一一映射或者双射.

(2) 逆映射与复合映射.

逆映射：若映射 $f: D \rightarrow f(D)$ 为单射，则存在一新映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$，使

$$\forall y \in f(D), \quad f^{-1}(y) = x,$$

其中 $y = f(x)$，则称此映射 f^{-1} 为 f 的逆映射.

习惯上，$y=f(x)$，$x\in D$ 的逆映射记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

复合映射：设有映射链

$$y=f(u),\ u\in D_1,$$
$$u=g(x),\ x\in D,\ 且\ g(D)\subset D_1,$$

则
$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由 f 和 g 确定的复合映射.

注意：构成复合映射的条件 $g(D)\subset D_1$ 必不可少.

说明：映射又称算子，在不同数学分支中有不同的惯用名称，例如

$X(\neq\Phi)\xrightarrow{f}Y$(数集)，$f$ 称为 X 上的泛函；

$X(\neq\Phi)\xrightarrow{f}X$，$f$ 称为 X 上的变换；

X(数集或者点集)$\xrightarrow{f}R$，f 称为定义在 X 上的函数.

3. 函数

(1) 函数的概念.

设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中 D 称为定义域，f 为对应法则，$f(D)$ 称为值域.

函数的三要素：定义域、对应法则和值域.

两个函数相等：定义域和对应法则都相等，称两个函数相等(或相同).

几个特殊函数：符号函数，取整函数，狄利克雷函数，最值函数.

(2) 函数的几种特性.

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，且有区间 $I\subset D$.

有界性：$\forall x\in D$，$\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为有界函数；

$\forall x\in I$，$\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

单调性：$\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$ 时，若

$f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 为 I 上的单调增函数；

$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 为 I 上的单调减函数.

奇偶性：$\forall x\in D$，且 $-x\in D$，若

$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

特殊地，若 $f(x)$ 在 0 有定义，当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(0)=0$.

周期性：$\forall x\in D$，$\exists l>0$，且 $x\pm l\in D$，若

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为周期(一般指最小正周期).

注意：周期函数不一定存在最小正周期.

(3) 反函数和复合函数.

反函数：若函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，则存在逆映射

$$f^{-1}:D\to f(D),$$

称 f^{-1} 为 f 的反函数. 习惯上，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D).$$

性质：反函数与原函数具有相同的单调性；

原函数与反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

复合函数：设有函数链

$$y=f(u),\ u\in D_1,$$
$$u=g(x),\ x\in D,\ \text{且}\ g(D)\subset D_1,$$

则
$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由 f 和 g 确定的复合函数.

4. 初等函数

(1) 基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

(2) 初等函数：由常数以及基本初等函数的有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示出来的函数，称为初等函数，否则称为非初等函数.

(3) 双曲函数和非双曲函数.

（二）数列的极限

1. 数列极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{或} \quad x_n\to a(n\to\infty).$$

$\varepsilon-N$ 定义：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

2. 收敛数列的性质

(1) 唯一性：收敛数列的极限唯一.

(2) 有界性：对数列 x_n，若存在正数 M，使得一切自然数 n，恒有 $|x_n|\leqslant M$ 成立，则称数列 x_n 有界；否则，称为无界.

收敛的数列必定有界；无界数列必定发散.

注意：有界性是数列收敛的必要条件.

(3) 收敛数列的保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0(<0)$，则 $\exists N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0(<0)$.

收敛数列的任一子数列收敛于同一极限.

3. 极限存在准则

(1) 两边夹准则：

$$\left.\begin{array}{l} y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots) \\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a \end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

(2) 单调有界准则.

(3) 柯西收敛准则：数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m>N$，$n>N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

（三）函数的极限

1. 函数极限的定义

(1) 自变量趋于有限值时的 $\varepsilon-\delta$ 定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

(2) 自变量趋于无穷大时的 $\varepsilon - X$ 定义：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，使当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意：函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关；δ 与任意给定的正数 ε 有关.

(3) 单侧极限.

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x \to x_0 - 0$，记 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$；

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x \to x_0 + 0$，记 $\lim\limits_{x_0\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

2. 函数极限的性质

(1) 有界性：某过程下有极限必有界.

(2) 唯一性：极限若存在必唯一.

(3) 保序性：

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，若 $\exists \delta > 0$，$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $A \leqslant B$.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，且 $A < B$，则 $\exists \delta > 0$，$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，有 $f(x) < g(x)$.

(4) 函数极限的局部保号性：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$(或 $A < 0$)，则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$)，则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

(5) 子序列的收敛性：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，数列 $f(x_n)$ 是 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时的一个子列，则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

(四) 无穷大与无穷小

1. 定义

极限为 0 的变量称为无穷小.

(1) 无穷小的$\varepsilon-\delta$定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|<\varepsilon$，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

注意：无穷小是变量，不能与很小的数混淆；零是可以作为无穷小的唯一的数.

(2) 函数的极限与无穷小量的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

(3) 无穷小的运算性质：

① 在同一过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③ 在同一过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

④ 常数与无穷小的乘积是无穷小.

2. 无穷大的 $M-\delta$ 定义

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|\geqslant M$，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

3. 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

4. 无穷小的比较

设α，β是同一过程中的两个无穷小，且$\alpha\neq0$.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq0)$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C(C\neq0,k>0)$，就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小.

5. 常用的等价无穷小

当$x\to0$时，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sin x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

用等价无穷小可给出函数的近似表达式，因为$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，于是有

$$\alpha=\beta+o(\alpha).$$

6. 等价无穷小替换原理

设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

注意：不能滥用等价无穷小替换原理，对于代数和中各无穷小不能分别替换.

(五) 极限运算法则

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$，其中$B\neq 0$.

(4) 如果$\lim f(x)$存在，而c为常数，则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

(5) 如果$\lim f(x)$存在，而n是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

复合函数的极限运算法则：设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且$x$满足$0<|x-x_0|<\delta_1$时，$\varphi(x)\neq a$，又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

当$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m和n为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m,\\ 0, & 当\ n>m,\\ \infty, & 当\ n<m.\end{cases}$$

无穷小分出法：以分母中自变量的最高次幂除分子，分母，以分出无穷小，然后再求极限.

(六) 函数的连续性与间断点

1. 函数的连续性

(1) 定义：设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，如果函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限存在，且等于它在点x_0处的函数值$f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

(2) 连续的$\varepsilon-\delta$定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

(3) 单侧连续.

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义，且$f(x_0-0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处左连续；

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义，且$f(x_0+0)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处右连续.

(4) 连续与单侧连续的关系：函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

(5) 连续函数与连续区间.

连续函数：在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续.

连续区间：如果函数在开区间(a, b)内连续，并且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续.

2. 函数的间断点

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足的三个条件：

①$f(x)$ 在点 x_0 处有定义.

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在.

③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

上述三个条件中若有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断)，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点(或间断点).

(2) 间断点类型.

① 跳跃间断点：如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

② 可去间断点：如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

③ 第一类间断点：跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

④ 第二类间断点：如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点. 常见的类型为无穷型或者震荡型.

（七）连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

(2) 严格单调的连续函数的反函数必严格单调且连续.

(3) 复合函数的连续性：

① 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，函数 $f(u)$ 在点 a 连续，则有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)].$$

② 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

(4) 初等函数的连续性：

① 基本初等函数在定义域内是连续的.

② 一切初等函数在其定义域区间内都是连续的.

注意：初等函数仅在其定义域区间内都是连续的，在定义域内不一定连续.

（八）闭区间上连续函数的性质

1. 最大最小值原理

(1) 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (f(x) \geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值.

(2) 最大最小值原理：闭区间上连续函数必有最大值和最小值.

(3) 有界性定理：闭区间上的连续函数一定在该区间上有界.

2. 零点定理和介值定理

(1) 零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间(a, b)内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在(a, b) 内至少存在一个实根.

(2) 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值，即

$$f(a)=A,\ f(b)=B,$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$ $(a<\xi<b)$.

(3) 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

二、典型例题

例 1　已知任意一点处的光照强度 L 正比于光源强度 L_0，反比于该点到光源距离 x 的平方. 现有两处光源相距 100 m，光强分别为 8 个亮度单位和 1 个亮度单位. 求光源之间任意一点处的光照强度 L.

解　以连接两个光源的直线为 x 坐标轴，原点与任一光源(不妨取光强为 8 个亮度单位)重合，则另一个光源的坐标为 $x=100$ m. 设两光源之间的一点的坐标为 x，$0<x<100$. 依照题目所假设的物理定律，该点处的光照强度为

$$L(x)=k\left[\frac{8}{x^2}+\frac{1}{(100-x)^2}\right],$$

其中，$k>0$，为比例系数，是常数，可取 $k=1$.

函数 $L(x)$ 的定义域为

$$0<x<100.$$

例 2　求下列函数的定义域.

(1)$y=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$；　　　(2)$y=\dfrac{x^3(1-x)}{x-\sin x}$.

解　按函数的基本概念，每个函数实际是(定义域 + 值域 + 对应关系)三位一体的. 因此应该是先有定义域，然后才有函数. 所谓求函数的定义域，是指一个函数的定义域未被明示而要求加以明确化. 如果这个函数来自实际问题，则定义域范围受该问题的实际背景的约束. 如例 1 里的 $L(x)$，其 x 的取值范围与坐标系的选择相联系，于是 $x<0$ 就不合题意了.

至于纯数学的函数式，求定义域的问题，转化为求自变量的一个最大集合，使函数的解析式在此集合上能够展开所涉及的全部运算.

(1) 由 $0<\dfrac{x-1}{x+1}<+\infty$，有

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+1>0, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x-1<0, \\ x+1<0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>1, \\ x>-1, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x<1, \\ x<-1. \end{cases}$$

则

$$x<-1 \quad 或 \quad x>1 \Leftrightarrow |x|>1.$$

(2) 当函数形式为分式时，要求分母不为零，故 $x-\sin x \neq 0$. 由于直线 $y=x$ 和正弦曲线 $y=\sin x$ 只在 $x=0$ 相交，原点是唯一交点，故原点是分母的唯一零点. 则 $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$.

例 3 已有

$$f(x)=\begin{cases} 3x, & x \geqslant 0, \\ x, & x<0, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{3}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{5x}{3}, & x<0, \end{cases}$$

求 $f[g(x)]$.

解 当复合函数的外层函数是分段函数时，需视内层函数的函数值处于外层函数的定义域内的哪一个区间，来决定下一步运算该调用外层函数的哪一个表达式.

当 $x \geqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 的对应值为 $-\dfrac{x}{3}$，非正，故此值代入函数 $f(x)$ 时，应代入当 $x<0$ 时的表达式，就成为 $-\dfrac{x}{3}$，即：当 $x \geqslant 0$ 时，复合函数 $f[g(x)]=-\dfrac{x}{3}$；当 $x<0$ 时，$g(x)$ 的对应值为 $\dfrac{5x}{3}<0$，非正，代入 $f(x)$ 时，仍应代入当 $x<0$ 时的表达式，就成为 $\dfrac{5x}{3}$，即：当 $x<0$ 时，复合函数 $f[g(x)]=\dfrac{5x}{3}$. 综合两者，有

$$f[g(x)]=\begin{cases} -\dfrac{x}{3}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{5x}{3}, & x<0 \end{cases} \Rightarrow f[g(x)]=g(x).$$

这个例题还表明：存在某些 x，使 $f(x)=x$ 只是 $f(x)=I(x)$ 的必要条件而非充分条件.

例 4 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 这是已知复合函数 $f[\varphi(x)]$ 和内层函数 $\varphi(x)$，求外层函数 $f(x)$ 的问题，通常采用两种方法求解.

解 方法一：令 $u=\varphi(x)=e^x+1$，解出 $x=\ln(u-1)$，代入 $f[\varphi(x)]$，即

$$f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1.$$

由此看出，有

$$f(x)=x^2-x+1.$$

方法二：$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$，故

$$f(x)=x^2-x+1.$$