SHU XUE FEN XI

山东教育出版社

数学分析

下册

5

数学分析

下　册

李庆春　王修德
石平绥　温锡九　等编

山东教育出版社
1989年·济南

数学分析

李庆春　王修德　石平绥　温锡九　等编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　29.5　印张　621千字

1989年12月第1版　1989年12月第1次印刷

印数1—10,160

ISBN 7—5328—0799—1/G·669

定价（上、下）8.45 元

前　　言

本书是根据高等师范专科学校二、三年制数学专业数学分析教学大纲编写的．全书分上、下两册．上册的主要内容有极限理论和一元函数微积分；下册的主要内容有级数理论和多元函数微积分．

在本书的编写过程中，为了体现师范专科教学的特点，我们注意做到以下几点：

第一，合理地安排体例及格式，力求纲目醒目，主线清晰，层次分明，论述条理．

第二，贯彻“少而精”原则，加强基本知识、基础理论和基本技能技巧训练的教学．力求突出重点，分散难点．

第三，尽可能做到直观易懂与严密处理相结合．力求深入浅出，文字简练，通俗易懂，便于自学．在引入概念时，尽量做到由直观到抽象，由具体到一般，既讲清概念的实际背景，又深刻揭示其涵义．在讲定理证明和公式推导时，尽量做到贯彻启发式，注意分析定理和公式的来龙去脉，引导学生先从几何直观上推想出结论，然后在理论上加以严谨地论证．

第四，尽量联系中学教材和中学教学的实际．通过数学分析的精确严密的概念教学和严谨的推理论证教学，培养学生的抽象思维和逻辑推理能力；通过数学分析知识运用的教学，解决在中学数学中许多没有解决的问题，从而使学生能

深刻地理解和把握中学数学中的有关的基本概念和理论，以便能居高临下地处理中学数学教材。

第五，顾及到师专数学专业不设“计算数学”课，加强了近似计算的内容，如方程的近似解法，函数值的计算，定积分的近似计算等。

第六，为了便于初学者接受，将实数与极限理论中一些定理的论证适当移后，而这些定理仍按原顺序提出并应用。这样分两步教学，既分散了难点，又保持了数学分析的系统性。

关于本书的使用兹作以下几点说明：

（1）本书全部内容可以在300学时左右讲完，上册154学时（讲授106学时，习题课48学时）；下册146学时（讲授102学时，习题课44学时）。

（2）书中带＊号的内容，可根据教学的实际情况选用。

（3）书中每节都配有一个习题。各章配有总复习题。要求学生会作全部的习题，总复习题供学习有余力的学生选用。

本书的编者还有（以姓氏笔画为序）：于秀云、王兆志、尹秀贤、卞瑞玲、冯强、刘思学、朱殿利、迟象利、李平、李重辉、李益中、杨位雪、杨鸣岐、杜彪、杜永安、宋金堂、房景洲、张守田、张润庠、姜天权、姜曰华、赵玉民、赵玉松、胡耀圻、彭步端等同志。

在编写本书过程中，承蒙魏远、王常藩、尹克山、杨熙泉、许大庆等同志的大力支持和帮助，特此致谢。

编　者

1989年

目 录

第十一章　数项级数

无穷级数（简称级数）是数值计算及表示函数的一个重要工具，在自然科学、工程技术中都有广泛的应用。在这一章里，主要介绍数项级数的基本概念、基本性质和各种数项级数收敛或发散的判别法。

§11·1　级数的收敛性及其性质

一、级数的收敛性概念

我们先来看一个例子。

循环小数$0.\dot{7}=0.777\cdots$，可以写成

$$0.7+0.07+\cdots+0.0\cdots07+\cdots$$

或
$$\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\cdots+\frac{7}{10^n}+\cdots \tag{1}$$

这是一个无限多个数的和．但我们只能计算有限个数的和，因此，我们在这里遇到有限与无限的矛盾．如何计算无限个数的和呢？在极限理论中我们已经看到，可以通过有限项之和再取极限来求无限项的和．例如对（1），先求出它的前n项的和：

$$S_n=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\cdots+\frac{7}{10^n}$$

$$=\frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{7}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right),$$

再取极限，显然应有

$$0.\dot{7}=0.777\cdots=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{9}.$$

一般地，设给定一个无穷数列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots \tag{2}$$

将(2)的各项依次用加号连接起来的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{3}$$

称为数项级数或无穷级数，简称为级数，并简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

其中的各数称为级数(3)的项，u_n称为级数(3)的通项.

级数(3)的前n项之和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

称为级数(3)的前n项部分和，简称部分和.当n无限增大时，级数(3)的部分和组成一个数列$\{S_n\}$:

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots.$$

定义 若级数(3)的部分和数列$\{S_n\}$有极限S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数(3)收敛，极限值S称为级数(3)的和，记作

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列$\{S_n\}$无极限，则称级数(3)发散。

例1 讨论等比级数或几何级数

$$a+ar+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\quad(a\neq 0)\qquad(4)$$

的敛散性。

解 当$r\neq 1$时，级数(4)的部分和为

$$S_n(r)=a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

若$|r|<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(r)=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}.$$

故几何几级(4)收敛，其和是$\dfrac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

若$|r|>1$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(r)=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=\infty,$$

故级数(4)发散。

当$r=1$时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(1)=\lim_{n\to\infty}na=\begin{cases}+\infty, & a>0,\\ -\infty, & a<0.\end{cases}$$

故几何级数（4）发散。

当$r=-1$时，显然有

$$S_n(-1)=\begin{cases}a, & n\text{为奇数}, \\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

可见，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(-1)$不存在，级数（4）发散。

综上所述，几何级数（4），当$|r|<1$时收敛，和为$\dfrac{a}{1-r}$；当$|r|\geqslant 1$时发散。

利用几何级数可以把任何一个无限循环小数化为分数。例如，$0.\dot{7}=\dfrac{7}{9}$。又如$0.3\dot{4}\dot{6}$可以写为

$$0.3\dot{4}\dot{6}=\frac{3}{10}+\left(\frac{46}{1000}+\frac{46}{100000}+\cdots+\frac{46}{10^{2n+1}}+\cdots\right),$$

上式右端括号内是一个首项为$\dfrac{46}{1000}$，公比$r=\dfrac{1}{100}$的几何级数，从而

$$0.3\dot{4}\dot{6}=\frac{3}{10}+\frac{\frac{46}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{46}{1000}\cdot\frac{100}{99}=\frac{343}{990}.$$

例2 证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{5}$$

收敛，并求其和。

证明 级数（5）的部分和是

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，

所以级数(5)收敛，其和是1.

例3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{6}$$

发散.

证明 级数(6)的部分和是

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

要证(6)发散，只须证极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在. 取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，则不论自然数$N$取得如何大，如果$m=N+1$，$n=2(N+1)$，虽然$m$，$n>N$，但却有

$$|S_n-S_m|=|S_{2(N+1)}-S_{N+1}|$$

$$=\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{2(N+1)}$$

$$>\frac{1}{2(N+1)}+\frac{1}{2(N+1)}+\cdots+\frac{1}{2(N+1)}$$

$$=\frac{N+1}{2(N+1)}=\frac{1}{2}$$

由数列的柯西(Cauchy)准则知，极限$\lim S_n$不存在，所以调和级数(6)发散。

二、级数收敛的条件

由级数收敛与发散的定义可知，级数(3)收敛与发散的问题，就是它的部分和数列$\{S_n\}$的极限存在与否的问题。反过来，给定一个数列$\{S_n\}$，若令$u_1=S_1$，$u_2=S_2-S_1$，…，$u_n=S_n-S_{n-1}$，…，则级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

的前n项的和

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})$$
$$=S_n$$

恰好就是数列$\{S_n\}$的第n项。若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为$S$，则$S$也就是数列$\{S_n\}$的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$；若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在。这就是说，数列的敛散性问题与级数的敛散性问题是可以相互转化的。例如，由数列的柯西准则："数列$\{S_n\}$收敛充分必要条件是：对任给$\varepsilon>0$，必存在某个自然数N，使得当$n>N$时，对任意自然数p，总有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$。"并注意到

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p},$$

立即得：