

● SHU XUE FEN XI

● 山东教育出版社

数学 分析

● 下 册

5

数 学 分 析

下 册

李庆春 王修德 等编
石平绥 温锡九

山东教育出版社

1989年·济南

数 学 分 析

李庆春 王修德 石平绥 温锡九 等编

*

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 29.5 印张 621千字

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数1—10,160

ISBN 7—5328—0799—1/G·669

定价(上、下) 8.45 元

771078

前 言

本书是根据高等师范专科学校二、三年制数学专业数学分析教学大纲编写的。全书分上、下两册。上册的主要内容有极限理论和一元函数微积分；下册的主要内容有级数理论和多元函数微积分。

在本书的编写过程中，为了体现师范专科教学的特点，我们注意做到以下几点：

第一，合理地安排体例及格式，力求纲目醒目，主线清晰，层次分明，论述条理。

第二，贯彻“少而精”原则，加强基本知识、基础理论和基本技能技巧训练的教学，力求突出重点，分散难点。

第三，尽可能做到直观易懂与严密处理相结合。力求深入浅出，文字简练，通俗易懂，便于自学。在引入概念时，尽量做到由直观到抽象，由具体到一般，既讲清概念的实际背景，又深刻揭示其涵义。在讲定理证明和公式推导时，尽量做到贯彻启发式，注意分析定理和公式的来龙去脉，引导学生先从几何直观上推想出结论，然后在理论上加以严谨地论证。

第四，尽量联系中学教材和中学教学的实际。通过数学分析的精确严密的概念教学和严谨的推理论证教学，培养学生的抽象思维和逻辑推理能力；通过数学分析知识运用的教学，解决在中学数学中许多没有解决的问题，从而使学生能

深刻地理解和把握中学数学中的有关的基本概念和理论，以便能居高临下地处理中学数学教材。

第五，顾及到师专数学专业不设“计算数学”课，加强了近似计算的内容，如方程的近似解法，函数值的计算，定积分的近似计算等。

第六，为了便于初学者接受，将实数与极限理论中一些定理的论证适当移后，而这些定理仍按原顺序提出并应用。这样分两步教学，既分散了难点，又保持了数学分析的系统性。

关于本书的使用兹作以下几点说明：

(1) 本书全部内容可以在300学时左右讲完，上册154学时（讲授106学时，习题课48学时）；下册146学时（讲授102学时，习题课44学时）。

(2) 书中带*号的内容，可根据教学的实际情况选用。

(3) 书中每节都配有一个习题，各章配有总复习题。要求学生作全部的习题，总复习题供学习有余力的学生选用。

本书的编者还有（以姓氏笔画为序）：于秀云、王兆志、尹秀贤、卞瑞玲、冯强、刘思学、朱殿利、迟象利、李平、李重辉、李益中、杨位雪、杨鸣岐、杜彪、杜永安、宋金堂、房景洲、张守田、张润庠、姜天权、姜曰华、赵玉民、赵玉松、胡耀圻、彭步端等同志。

在编写本书过程中，承蒙魏远、王常藩、尹克山、杨熙泉、许大庆等同志的大力支持和帮助，特此致谢。

编 者

1989年

目 录

第十一章 数项级数	(1)
§11·1 级数的收敛性及其性质.....	(1)
一、级数的收敛性概念(1) 二、级数收敛的条件(6) 三、收敛级数的基本性质(9)	
习题11·1(12)	
§11·2 正项级数.....	(13)
一、正项级数收敛的充要条件(14) 二、比较判别法(16) 三、达朗贝尔判别法与柯西判别法(20) 习题11·2(25)	
§11·3 一般项级数.....	(26)
一、交错级数(26) 二、绝对收敛级数(29) 三*、条件收敛级数的判别法(31) 四*、绝对收敛级数的可交换性(35) 习题11·3(38)	
复习题十一.....	(40)
第十二章 广义积分	(42)
§12·1 无穷积分.....	(42)
一、无穷积分概念及其性质(42) 二、无穷积分与数项级数的关系(49) 三、非负函数无穷积分收敛判别法(50) 四、变号函数无穷积分收敛判别法(55) 习题12·1(59)	

§12·2	瑕积分.....	(61)
	一、瑕积分概念(61)二、两种广义积分的联系 (64)	
	三、瑕积分收敛判别法(66)习题12·2 (71)	
	复习题十二.....	(72)
第十三章	函数列与函数项级数.....	(74)
§13·1	函数列与函数项级数的一致收敛性.....	(74)
	一、函数列及其一致收敛性(74)二、函数项级数 及其一致收敛性(81)习题13·1 (88)	
§13·2	函数项级数一致收敛的判别法	(89)
	习题13·2 (94)	
§13·3	一致收敛函数列与函数项级数的性质.....	(95)
	一、一致收敛函数列的性质(95)二、一致收敛 函数项级数的性质(100)习题13·3 (104)	
	复习题十三.....	(105)
第十四章	幂级数.....	(108)
§14·1	幂级数的收敛域.....	(108)
	一、幂级数概念(108)二、幂级数的收敛半径与 收敛区间(108)三、收敛半径的计算(111)	
	习题14·1 (114)	
§14·2	幂级数的性质与运算.....	(114)
	一、幂级数的一致收敛性(114)二、幂级数和函 数的性质(116)三、幂级数的四则运算(119)	
	习题14·2 (120)	
§14·3	函数的幂级数展开.....	(121)
	一、泰勒级数(121)二、函数展开为泰勒级数的 条件(122)三、初等函数的幂级数展开(124)	

习题14·3	(131)
§14·4 幂级数在近似计算中的应用	(132)
习题14·4	(140)
复习题十四	(140)
第十五章 傅里叶级数	(142)
§15·1 傅里叶级数概念	(142)
一、三角级数(142) 二、三角函数系的正交性(143)	
三、傅里叶级数(144) 四、偶函数与奇函数的傅里叶级数(148)	
习题15·1	(149)
§15·2 傅里叶级数的收敛定理	(150)
一*、贝塞耳不等式(150) 二*、黎曼引理(152)	
三*、傅里叶级数的部分和公式(154) 四、收敛定理(156)	
习题15·2	(159)
§15·3 函数的傅里叶级数展开	(159)
一、函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的展开(159) 二、函数在区间 $[0, \pi]$ 上的展开(163)	
三、函数在区间 $[-l, l]$ 上的展开(165)	
习题15·3	(167)
复习题十五	(168)
第十六章 多元函数及其极限与连续	(171)
§16·1 多元函数概念	(171)
一、平面点集(171) 二、二元函数概念(177)	
三、 n 维空间与 n 元函数(179)	
习题16·1	(181)
§16·2 二元函数的极限	(182)
一、二元函数的极限(183) 二、累次极限(185)	
习题16·2	(188)
§16·3 二元函数的连续性	(190)

一、二元函数的连续性概念(190)	二、二元连续函数的局部性质及初等函数的连续性(192)
三、有界闭区域上连续函数的性质(194)	
习题16·3 (196)	
复习题十六	(196)
第十七章 多元函数微分学	(198)
§17·1 偏导数与全微分	(198)
一、偏导数(198)	二、全微分(203)习题17·1 (210)
§17·2 复合函数的微分法	(212)
一、复合函数的偏导数(212)	二、复合函数的全微分(216)习题17·2 (218)
§17·3 方向导数与梯度	(219)
一、方向导数(220)	二、梯度(223)习题17·3 (225)
§17·4 高阶偏导数与高阶全微分	(225)
一、高阶偏导数(225)	二、高阶全微分(232)习题17·4 (234)
§17·5 泰勒公式与极值问题	(236)
一、中值公式(236)	二、泰勒公式(238)三、极值问题(240)习题17·5 (251)
复习题十七	(252)
第十八章 隐函数定理及其应用	(255)
§18·1 隐函数	(255)
一、隐函数概念(255)	二、隐函数定理(256)
三、隐函数求导举例(260)	习题18·1 (262)
§18·2 隐函数组	(263)
一、隐函数组概念(263)	二、隐函数组定理(264)

三、反函数组与坐标变换(271)四、函数行列式的性质(273)习题18·2 (275)	
§18·3 几何应用.....	(277)
一、平面曲线的切线与法线(277)二、空间曲线的切线与法平面(278)三、曲面的切平面和法线(282)习题18·3 (286)	
§18·4 条件极值.....	(287)
一、条件极值概念(287)二、条件极值的必要条件(288)习题18·4 (295)	
复习题十八.....	(296)
第十九章 含参变量的积分	(299)
§19·1 含参变量的定积分.....	(299)
一、积分限不含参变量的积分(299)二、积分限含参变量的积分(305)习题19·1 (309)	
§19·2 含参变量的广义积分.....	(310)
一、含参变量广义积分一致收敛概念(310)二、一致收敛的判别法(314)三、含参变量无穷积分的性质(316)习题19·2 (323)	
§19·3 欧拉积分— Γ 函数与 B 函数.....	(325)
一、 Γ 函数及其性质(325)二、 B 函数及其性质(326)三、 Γ 函数与 B 函数的关系(328)四、用 B 函数与 Γ 函数计算积分(330)习题19·3 (331)	
复习题十九.....	(332)
第二十章 重积分	(335)
§20·1 二重积分.....	(335)
一、二重积分概念(335)二、二重积分的性质 (339)	

三、化二重积分为累次积分(341)四、二重积分的换元法(352)习题20·1(362)	
§20·2 三重积分.....	(366)
一、三重积分概念(366)二、化三重积分为累次积分(368)三、三重积分的换元法(371)习题20·2(379)	
§20·3 重积分的应用.....	(381)
一、曲面的面积(381)二、物体的重心(384)	
三、转动惯量(387)习题20·3(390)	
复习题二十.....	(391)
第二十一章 曲线积分和曲面积分.....	(394)
§21·1 第一型曲线积分与第一型曲面积分.....	(394)
一、第一型曲线积分的概念及其性质(394)二、第一型曲线积分的计算(397)三、第一型曲面积分概念(401)四、第一型曲面积分的计算(403)习题21·1(405)	
§21·2 第二型曲线积分.....	(407)
一、第二型曲线积分概念(407)二、第二型曲线积分的计算(411)三、两类曲线积分的联系(414)四、格林公式(416)五、曲线积分与路线的无关性(423)习题21·2(429)	
§21·3 第二型曲面积分.....	(430)
一、曲面的侧(430)二、第二型曲面积分概念及其性质(432)三、第二型曲面积分的计算(436)	
四、两类曲面积分的联系(439)五、奥高公式(440)	
六、斯托克斯公式(444)习题21·3(449)	
复习题二十一.....	(451)

第十一章 数项级数

无穷级数（简称级数）是数值计算及表示函数的一个重要工具，在自然科学、工程技术中都有广泛的应用。在这一章里，主要介绍数项级数的基本概念、基本性质和各种数项级数收敛或发散的判别法。

§11.1 级数的收敛性及其性质

一、级数的收敛性概念

我们先来看一个例子。

循环小数 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ ，可以写成

$$0.7+0.07+\cdots+0.0\cdots07+\cdots$$

$$\text{或} \quad \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \cdots + \frac{7}{10^n} + \cdots \quad (1)$$

这是一个无限多个数的和。但我们只能计算有限个数的和，因此，我们在这里遇到有限与无限的矛盾。如何计算无限个数的和呢？在极限理论中我们已经看到，可以通过有限项之和再取极限来求无限项的和。例如对(1)，先求出它的前 n 项的和：

$$S_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) \\
&= \frac{7}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right),
\end{aligned}$$

再取极限, 显然应有

$$0.\dot{7} = 0.777\cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{9}.$$

一般地, 设给定一个无穷数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots \quad (2)$$

将(2)的各项依次用加号连接起来的式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (3)$$

称为数项级数或无穷级数, 简称为级数, 并简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

其中的各数称为级数(3)的项, u_n 称为级数(3)的通项.

级数(3)的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(3)的前 n 项部分和, 简称部分和. 当 n 无限增大时, 级数(3)的部分和组成一个数列 $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots.$$

定义 若级数(3)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称级数(3)收敛, 极限值 S 称为级数(3)的和, 记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 无极限, 则称级数(3)发散.

例1 讨论等比级数或几何级数

$$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad (a \neq 0) \quad (4)$$

的敛散性.

解 当 $r \neq 1$ 时, 级数(4)的部分和为

$$S_n(r) = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

若 $|r| < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

故几何级数(4)收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

若 $|r| > 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-r^n}{1-r} = \infty,$$

故级数(4)发散.

当 $r = 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ -\infty, & a < 0. \end{cases}$$

故几何级数(4)发散。

当 $r = -1$ 时, 显然有

$$S_n(-1) = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

可见, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(-1)$ 不存在, 级数(4)发散。

综上所述, 几何级数(4), 当 $|r| < 1$ 时收敛, 和为 $\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散。

利用几何级数可以把任何一个无限循环小数化为分数。

例如, $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$ 。又如 $0.3\dot{4}\dot{6}$ 可以写为

$$0.3\dot{4}\dot{6} = \frac{3}{10} + \left(\frac{46}{1000} + \frac{46}{100000} + \cdots + \frac{46}{10^{2n+1}} + \cdots \right),$$

上式右端括号内是一个首项为 $\frac{46}{1000}$, 公比 $r = \frac{1}{100}$ 的几何级数, 从而

$$0.3\dot{4}\dot{6} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{46}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{46}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{343}{990}.$$

例2 证明级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \quad (5)$$

收敛, 并求其和。

证明 级数(5)的部分和是

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$,

所以级数(5)收敛, 其和是1.

例3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (6)$$

发散.

证明 级数(6)的部分和是

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

要证(6)发散, 只须证极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在. 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 则不论

自然数 N 取得如何大, 如果 $m = N + 1$, $n = 2(N + 1)$, 虽然 $m, n > N$, 但却有

$$\begin{aligned}
 |S_n - S_m| &= |S_{2(N+1)} - S_{N+1}| \\
 &= \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \cdots + \frac{1}{2(N+1)} \\
 &> \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+1)} + \cdots + \frac{1}{2(N+1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{N+1}{2(N+1)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

由数列的柯西(Cauchy)准则知, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 所以调和级数(6)发散。

二、级数收敛的条件

由级数收敛与发散的~~定义~~可知, 级数(3)收敛与发散的问题, 就是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在与否的问题。反过来, 给定一个数列 $\{S_n\}$, 若令 $u_1 = S_1, u_2 = S_2 - S_1, \dots, u_n = S_n - S_{n-1}, \dots$, 则级数

$$(b) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1}) + \dots$$

的前 n 项的和

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1}) = S_n$$

恰好就是数列 $\{S_n\}$ 的第 n 项。若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和为 S ,

则 S 也就是数列 $\{S_n\}$ 的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发

散, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在。这就是说, 数列的敛散性问题与级

数的敛散性问题是相互转化的。例如, 由数列的柯西准则: “数列 $\{S_n\}$ 收敛充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon > 0$, 必存在某个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p , 总有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ 。”并注意到

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

立即得: