普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

高等数学及应用

主编 王志勇 柴春红
主审 方承胜

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

高等数学及应用

主　编　王志勇　柴春红
副主编　吴春梅　杜春彦
编　委　张维维　蔡　威　王中艳　金成铭
　　　　刘希军　刘彩霞　吴　平　刘纪轩
　　　　刘家学　陈兰花　刘　昕　曹志刚
　　　　胡超斌　何　剑　胡　欣
主　审　方承胜

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书根据士官任职教育的发展，结合目前任职教育的现状和特点编写而成．内容设计简明，叙述通俗易懂，定位于应用和能力培养，具有强调直观、体现“军味”，注重基础知识、面向专业拓展，合理渗透数学实验和建模思想，融入数学历史和文化，模块化结构设计等特点．章节内容可视不同需求选用．

本书内容包括初等数学、函数与极限、一元函数的微分及应用、积分及应用、多元函数的微积分及应用、积分变换、无穷级数、矩阵、概率及数学实验．本书是面向军事院校士官大专的数学教材，也可供工程技术、机电专业等高职高专院校的学生参考使用．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及应用/王志勇　柴春红　主编．—武汉：华中科技大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5609-8200-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…　②柴…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 164338 号

高等数学及应用　　王志勇　柴春红　主编

策划编辑：王汉江
责任编辑：王汉江
封面设计：刘　卉
责任校对：朱　玢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：华中科技大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：17.5
字　　数：383 千字
版　　次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：34.00 元

前　言

士官任职教育的发展需要针对士官岗位任职的特点，把培训的重心从普通学历教育转移到职业技能的培养上. 士官数学作为士官教育的基础课程，其意义不仅是思维智慧的启迪、必需的素质教育课，更是学习专业知识、培养职业技能的工具. 这就要求彻底转变观念，抛弃理论体系的完整性、严谨性，扭转“数学味”浓厚、知识不能应用于实际的问题，改变不合理的知识架构，减少理论推导，弱化计算技巧，改革士官数学的教学内容和方式方法.

结合多年的士官教学实践和教学经验，编者在分析士官各岗位专业对数学需求的广度、深度后，重新构建士官数学课程的内容，编写了本书.

本书有以下特点.

1. 定位明确，针对性强

以士官专业为导向，以“强化应用、培养技能”为重点、以“必需、够用”为准则，模块化设计数学知识结构，可供士官各专业选择性地教学. 结合士官学员的知识结构和认知能力，在内容处理上力求通俗易懂、深浅适度，合理引出概念和定理，舍弃大量技巧性知识的讲解，提高士官数学的针对性.

2. 强调直观，体现“军味”

淡化定理、公式的严密性和逻辑性，采用数据、图像直观启发学员，阐述概念、定理、公式. 同时改善数学知识的理论体系，在引例、例题和应用中大量采用军事领域的简化问题，突出军事特色，增强学习兴趣和岗位应用意识.

3. 注重基础应用，面向专业拓展

既注重数学基础知识及应用的通识教育，重构微积分的知识框架，又兼顾各专业需求的工程数学知识，如线性代数和概率论，旨在适应各专业对数学知识的需要. 同时面向雷达技术、指挥自动化、电子对抗等工学类专业领域，书中的引例、案例和应用覆盖各专业，能满足后续课程的学习需要，有利于加强数学的实用性.

4. 穿插数学实验，融入建模思想

在一些概念、结论和例题中穿插简单的数学实验，用实际的数据验证定理、结论的准确性，既淡化了理论推导，也便于直观理解. 同时，注重适当地、有尺度地介绍数学建模的概念和思想，突出强调数学知识与实际问题的联系. 注重以实例引入数学概念，并最终回到应用的层面，增强学员对数学应用能力的培养. 本书最后给出每章的数学实验内容，培养学员应用数学的现代计算工具解决实际问题的技能.

5. 历史名言引导,加强数学修养

作为提高数学文化的一种途径,每章引用名人名言,体现数学思想与数学观念.同时,每章有选择性地介绍有突出贡献的数学家,使学员了解数学发展的历史,引导学习数学家的探索精神,激发学习兴趣,促进意志、品格、毅力和情感等非智力因素的形成,增强数学修养.

本书由王志勇、柴春红任主编,吴春梅、杜春彦任副主编,确定整体框架和各章内容编写要求,负责统稿和修订,方承胜担任主审工作.编写分工如下:张维维、蔡威编写第一章,王中艳、金成铭编写第二章,吴春梅、刘希军编写第三章,王志勇、刘彩霞编写第四章,吴平、刘纪轩编写第五章,刘家学、杜春彦编写第六章,陈兰花、刘昕编写第七章,柴春红、吴平编写第八章,陈兰花、曹志刚编写第九章,胡超斌编写了数学实验,何剑、胡欣参与了全书表格、图形的绘制工作.

在本书的编写过程中,参考了国内外众多教材和书籍,借鉴和吸收了相关成果,在此表示衷心感谢.同时对积极支持本教材编写的领导、专家及同仁表示感谢.书中标有“ * ”号的内容供不同专业选用.

由于编者水平所限,加之时间仓促,书中难免有不妥之处,敬请读者指正.

编　者

2012 年 4 月

目　　录

一个国家只有数学蓬勃的发展，才能展现它国力的强大.数学的发展和至善与国家的繁荣昌盛密切相关.

——拿破仑

第一章 初等数学

高等数学是在初等数学的基础上发展起来的，它的主体是微积分，它的内容和方法在自然科学、工程技术、社会科学等许多领域都有着广泛的应用.本章介绍不等式、三角函数、复数和向量等初等数学知识，以便更好地学习高等数学，也为进一步学习专业知识奠定一定的基础.

第一节 方程与不等式

一、代数式

代数式是用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，如 $a+b$，$40x$，$\sqrt{x+1}$等.代数式中的每个字母都表示数，因此，数的一些运算规律也适用于代数式.用代数式表示数学规律比用普通词汇表达更简洁、更明确、更具一般性.

例 1 某雷达团有 A 型雷达 6 部，每部能同时跟踪 x 个目标；有 B 型雷达 9 部，每部能同时跟踪 y 个目标.问 (1) 该雷达团能同时跟踪多少个目标？(2) 若 $x=50$，$y=60$，则能同时锁定的总目标是多少？

解 (1) 该雷达团能同时跟踪 $6x+9y$ 个目标.

(2) 若 $x=50$，$y=60$，则该雷达团能同时锁定的总目标为

$$6x+9y=6\times50+9\times60=840.$$

二、一元二次方程

含有未知数的等式称为方程.方程研究事物间的等量关系，并为人们提供由已知

量推求未知量的重要方法，在实际中有着广泛的应用. 我国古代数学经典《九章算术》中就有一章对方程进行了专门的研究. 下面介绍常见的一元二次方程及其求解方法.

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程称为一元二次方程.

例 2 某型炮弹按一定角度发射后的射程需要求解方程 $x^2+x-6=0$，这里 x 表示射程，单位为千米，试求该型炮弹的射程.

分析 求射程即是解一元二次方程. 将因式 ax^2+bx+c 分解为两个因式的乘积，如果乘积等于零，那么这两个因式至少要有一个等于零，从而得出方程的两个根.

解 将方程左端因式分解(其示意图见图 1.1.1)，得

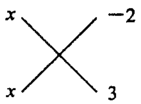

图 1.1.1

$$(x-2)(x+3)=0, \quad 即 \quad x-2=0 \quad 或 \quad x+3=0,$$

原方程的两个根为 $x_1=2, x_2=-3$(舍去). 因此，所求射程为 2 千米.

这种解一元二次方程的方法称为因式分解法. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 也可以通过配方法变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

然后再直接开平方，得到它的求根公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这里 b^2-4ac 为根的判别式，记 $\Delta=b^2-4ac$. 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不等实根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等实根；当 $\Delta<0$ 时，方程没有实根.

如上述例 2，套用公式可知 $a=1, b=1, c=-6$，且

$$b^2-4ac=1^2-4\times 1\times(-6)=25>0,$$

故方程有两个不等的实根，即

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{-1\pm 5}{2},$$

所以 $x_1=2, x_2=-3$.

三、不等式

实际应用中经常需要比较大小、轻重、长短等，这就是数学中不等式的原型. 用不等号“$>$”、“$\geqslant$”、“$<$”或“$\leqslant$”连接两个代数式所形成的式子，叫做不等式. 下面介绍有关绝对值不等式及一元二次不等式的有关知识.

1. 绝对值不等式

引例 某型枪支弹药量标准为 50 克，要求其实际质量与标准质量的误差不超过 1 克，求该型枪支弹药量的合格范围是多少?

设实际弹药量为 x 克，那么，由绝对值的意义知，弹药量的合格范围可表示为

$$|x-50|\leqslant 1.$$

这是一个含有未知数的绝对值不等式，叫做含绝对值的不等式.

一般地，不等式$|x|\leqslant a(a>0)$的解是$-a\leqslant x\leqslant a$，不等式$|x|\geqslant a(a>0)$的解是$x\leqslant -a$或$x\geqslant a$.

本引例可以归结为解不等式$|x-50|\leqslant 1$，由不等式可得

$$-1\leqslant x-50\leqslant 1.$$

不等式的解为

$$49\leqslant x\leqslant 51$$

则该型枪支弹药量的合格范围为 49 克到 51 克.

2. 一元二次不等式

只含有一个未知数且未知数的最高次数为 2 的不等式，称为一元二次不等式. 它的一般形式是$ax^2+bx+c>0$，其中$a\neq 0$. 不等式中的“$>$”可以换成“$\leqslant$”、“$\geqslant$”或“$<$”.

例 3 解不等式$x^2-2x-15>0$.

分析 对式子$x^2-2x-15$进行因式分解，当且仅当两个因式同号(同为正或同为负)时，它们的积才大于零；同样，当且仅当两个因式异号时，它们的积才小于零.

解 原不等式通过因式分解可化为$(x+3)(x-5)>0$，即

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x+3>0,\\x-5>0;\end{cases}\quad 或 \quad(\mathrm{II})\begin{cases}x+3<0,\\x-5<0.\end{cases}$$

易求得方程组(Ⅰ)的解为$x>5$，方程组(Ⅱ)的解为$x<-3$，所以不等式的解为$x>5$或$x<-3$.

四、二元一次方程组

由于二元一次方程组在实际问题中有很广泛的应用，本节只研究这种方程常用的解法.

1. 二元一次方程组的定义

在我国古代数学名著《孙子算经》中，有一个著名的“雉(鸡)兔同笼”问题.“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何”.

如果列方程，可设鸡x只，兔y只，由题意可列出两个方程，把两个方程合在一起，并写成

$$\begin{cases}x+y=35, & ①\\2x+4y=94. & ②\end{cases}$$

上面列出的两个方程中每个方程都有两个未知数，并且未知数的次数都是 1，像这样的方程，我们把它称为二元一次方程. 把这两个二元一次方程合在一起，就组成了一个二元一次方程组(又称二元线性方程组).

该问题在《孙子算经》中给出了简捷而且巧妙的解法：“上置头，下置足，以头除(此处除意为减)足，以足除头，即得.”

即先设金鸡独立，玉兔双腿(即“半其足”)，这时共有 94÷2=47 条脚.

在这 47 条腿中，每数一条腿应该有一只鸡，而每数两条腿才有一只兔，也就是说，鸡的头数与足数相等，而每只兔的头数却比足数少 1，所以兔数为 $47-35=12$，鸡数为 $35-12=23$，即 $x=23$，$y=12$.

这里 $x=23$ 与 $y=12$ 既满足方程①，又满足方程②，我们就说 $x=23$ 与 $y=12$ 是上述二元一次方程组的解，并记作

$$\begin{cases} x=23, \\ y=12. \end{cases}$$

一般地，使二元一次方程组的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值，称为二元一次方程组的解.

2. 二元一次方程组的解法

上述问题的巧妙解法有其局限性，求解二元一次方程组时，一般要将二元一次方程组的两个方程，转化为只含一个未知数的一个一元方程，求出这个未知数的值，然后再设法求出另一个未知数的值. 一般采用消元法求解.

消元法的步骤如下：

(1) 方程组里一个方程的两边都乘以一个适当的数，或者分别在两个方程的两边都乘以一个适当的数，使其中某一个未知数的系数的绝对值相等；

(2) 把方程两边分别相加或相减，消去这个未知数，把解二元一次方程组转化为解一元一次方程.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=16, & ① \\ 5x-6y=33. & ② \end{cases}$$

分析 在方程①的两边乘以 3，在方程②的两边乘以 2，就可使未知数 y 的系数的绝对值相等，然后把两个方程的两边相加而消去 y.

解 由式①×3 得 $$9x+12y=48. \quad ③$$

由式②×2 得 $$10x-12y=66. \quad ④$$

由式③+式④得 $$19x=114, \quad 即 \quad x=6.$$

把 $x=6$ 代入式①得 $$y=-\frac{1}{2}.$$

所以 $$\begin{cases} x=6, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

第二节 指数、对数与三角函数

一、指数

1. 整数指数幂

在实际应用中，常常会碰到多个相同的数的乘积问题. 例如，雷达微带参放的正

方形印刷电路板的边长为 10 厘米，那么它的面积 $S=10\times10$ 平方厘米；又如，具有三级放大量相同的放大电路，如果每级的放大量为 K_0，那么总的放大量

$$K=K_0\times K_0\times K_0.$$

为了简化这种相同数的连乘表示，可以用一个简单的记法来表示，如

$$S=10\times10=10^2,\quad K=K_0\times K_0\times K_0=K_0^3.$$

很自然地，n 个相同数 a 相乘为 a^n，读作 a 的 n 次幂（或叫 a 的 n 次方），a 称为幂的底数，n 称为幂的指数. 若 n 为负整数，则 a^n 表示 $\frac{1}{a^{-n}}$，如 $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$. 规定 $a^0=1$.

常用的单位换算就是采用指数幂的表示形式. 例如：

1 秒 $=1000000$ 微秒 $=10^6$ 微秒 $=10^9$ 毫微秒，

1 千克 $=1000$ 克 $=10^3$ 克 $=10^6$ 毫克，

1 微安 $=10^{-3}$ 毫安 $=10^{-6}$ 安培，

1 千米 $=10^3$ 米 $=10^4$ 分米 $=10^5$ 厘米 $=10^6$ 毫米 $=10^9$ 微米 $=10^{12}$ 纳米，

1 赫兹 $=10^{-6}$ 兆赫兹 $=10^{-9}$ 吉赫兹.

2. 实数指数幂

规定正数的正分数指数幂为 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，其中 $a>0$，m、n 为正整数，且 $n>1$. 类似地，可规定负分数指数幂. 例如：

$$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9,\quad 8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{4}.$$

一般地，当 $a>0$ 时，任意给定一个实数 b，都有 a^b 是唯一确定的实数. 整数指数幂的运算性质，对于实数指数幂同样适用，即对于任意实数 r,s 且 $a>0,b>0$，则有下述运算法则：

(1) $a^ra^s=a^{r+s}$； (2) $(a^r)^s=a^{rs}$； (3) $(ab)^r=a^rb^r$.

例 1 计算下列各式.

(1) $125^{\frac{2}{3}}$； (2) $16^{-\frac{3}{4}}$.

解 (1) $125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^2=25$；

(2) $16^{-\frac{3}{4}}=(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

例 2 传说古印度国王舍罕王要重赏发明国际象棋的宰相达依尔，问他有什么要求，宰相指着象棋盘上的 8 行 8 列格子说，只想要一些麦子，在棋盘第一个格子里放一粒麦子，第 2 个格子增加一倍，第 3 个比第 2 个再增加一倍，直到所有的格子填满. 国王不以为然，同意了他的请求. 你知道要给宰相达依尔多少粒麦子吗？

解 由于每个格子里的麦粒数都是前一个格子里的麦粒数的 2 倍，且有 64 个格子，各个格子里的麦粒数依次是 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{63}$.

于是，达依尔要得到的麦粒总数就是

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

1845 亿亿粒麦子有多重？就一般的麦子而言，这么多的麦子加起来将达到 750 亿吨，远远超过国王的粮仓里所储存的麦子. 事实上，以目前世界小麦生产水平，也要 150 年才能生产这么多.

二、对数

对数是苏格兰数学家纳皮尔于 1614 年创立的. 随后，开普勒引入了对数符号. 由于对数能节省计算时间，当时被世人誉为“使科学家延长寿命的重大数学成就”.

2 的多少次幂等于 128？这是已知底数和幂求指数的问题，这就涉及到对数.

1. 对数的概念

如果 $a^b=N(a>0$，且 $a\neq1)$，即 a 的 b 次幂等于 N，则数 b 称为以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$，其中 a 称为对数的底数（简称底），N 称为对数的真数.

通常，将 10 为底的对数 $\log_{10}N$ 称为常用对数，记作 $\lg N$. 例如，$\log_{10}5$ 简记作 $\lg 5$. 在科学技术中常常使用无理数 $e=2.71828182\cdots$ 为底的对数，e 为底的对数 $\log_e N$ 称为自然对数，简记作 $\ln N$.

对数在微波天线等领域都有着广泛的应用. 例如，天线中的方向系数 D，增益 G，若以分贝(dB)为单位，就可以用对数来表示和分析，如 $D_{dB}=10\lg D$，$G_{dB}=10\lg G$.

2. 对数的运算法则

根据对数的定义，把幂的运算法则写成对数式，可得对数的运算法则.

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$N_1>0$，$N_2>0$，那么

(1) $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$；

（即两个正数乘积的对数等于同一底数的两个正数的对数的和.）

(2) $\log_a\dfrac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$；

（即两个正数的商的对数等于同一底数的被除数的对数减去除数的对数.）

(3) $\log_a(N_1)^n=n\log_a N_1$.

（即正数幂的对数等于幂的指数乘以幂的底数的对数.）

可以看出，对数的这些性质把乘法转化为加法，把除法转化为减法，乘方转化为乘法，能大大简化计算.

例 3 求下列各式的值.

(1) $\log_2(8\times32)$； (2) $\lg5+\lg20$.

解 (1) $\log_2(8\times32)=\log_2 2^3+\log_2 2^5=3\log_2 2+5\log_2 2=3+5=8$；

(2) $\lg5+\lg20=\lg(5\times20)=\lg100=2$.

例 4 已知某种细胞初始时有 10 个，1 个细胞分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个……现观察这种细胞有 1280 个，问是连续分裂多少次后的结果？

解 细胞个数 N 与分裂次数 b 之间的关系为 $N=10\cdot2^b$，这里 $N=1280$.

由题意知，

$$b=\log_2\frac{N}{10}=\log_2\frac{1280}{10}=\log_2 128=\log_2 2^7=7,$$

故这样的细胞分裂 7 次后可得到 1280 个细胞.

三、角

希腊数学家欧几里得在《几何原本》中提出，平面角是在同一个平面内但不在一条直线上的两条相交线的相互倾斜度.

1. 角的概念

角也可以看成是一条射线绕着它的端点在平面内旋转而形成的. 如图 1.2.1 所示，一条射线由位置 OA，绕着它的端点 O，按逆时针方向旋转到另一位置 OB，就形成了角 α，射线旋转开始时的位置 OA 称为 α 的始边，旋转终止时的位置 OB 称为 α 的终边，射线的端点 O 称为 α 的顶点.

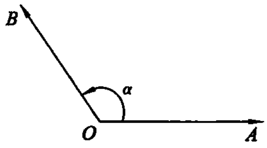

图 1.2.1

为区别不同方向旋转形成的角，我们规定，按逆时针方向旋转形成的角称为正角，多旋转一周，其角度多增加 360°. 按顺时针方向旋转形成的角称为负角，多旋转一周，其角度多增加 −360°. 如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个零角. 经过这样的推广，角的概念就包含零角及任意大小的正角和负角.

2. 弧度制

角的大小可以用度(°)来表示，1°的角为圆周角的 $\frac{1}{360}$，旋转一周的角的大小为 360°. 这种度量角的单位制称为角度制. 下面介绍另一种度量角的单位制——弧度制.

把等于半径长的圆弧所对的圆心角称为 1 弧度的角，单位符号是 rad，读作弧度.

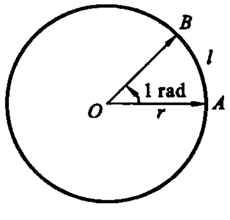

图 1.2.2

设圆的半径为 r，圆弧长为 l，该弧所对的圆心角为 α，则 $|\alpha|=\frac{l}{r}$. 如图 1.2.2 所示，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 rad 的角.

一个圆周角是 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi(\text{rad})$，同时，一个圆周角又是 360°. 因此 $360°=2\pi$ rad. 角度(°)与弧度(rad)的单位换算关系有

(1) $1°=\frac{\pi}{180°}\text{ rad}\approx 0.01745\text{ rad}$.

(2) $1\text{ rad}=\frac{180°}{\pi}\approx 57.3°=57°18'$.

四、三角函数

客观世界中许多现象呈现周期性变化的规律，如音乐、潮汐、钟表的自由摆动、简

谐振动、简谐交流电等，研究这些现象的重要工具就是三角函数. 三角函数在科学技术和实际问题中的应用也是非常广泛的.

1. 三角函数的定义

如图 1.2.3 所示，设 α 是一个任意大小的角，角 α 的始边为 x 轴的正半轴，角 α 的终边上任意一点 P 的坐标为(x,y)，则

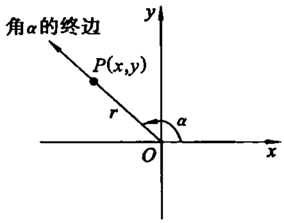

图 1.2.3

$$|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}>0 \quad (r>0).$$

比值$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$均与点 P 在角 α 的终边上的位置无关，而仅由角 α 确定. 它们反映了角 α 的特性.

比值$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$分别称为角 α 的正弦、余弦，分别记为 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}, \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

同样，比值$\frac{y}{x}$称为角 α 的正切，记为 $\tan\alpha$；比值$\frac{x}{y}$称为角 α 的余切，记为 $\cot\alpha$；比值$\frac{r}{x}$称为角 α 的正割，记为 $\sec\alpha$；比值$\frac{r}{y}$称为角 α 的余割，记为 $\csc\alpha$.

一些常用角的度数、弧度数、正余弦值如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
正弦值	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
余弦值	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

2. 基本性质

任意角 α 的三角函数具有如下一些基本性质.

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(2) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$， $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\cot\alpha$，

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha \quad (k\in\mathbf{Z})$.

(3) 两角和与差的正弦、余弦：

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

(4) 二倍角公式的正弦、余弦：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

下面只证明基本性质(1).

证明 由三角函数的定义知 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$, $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$, $x^2+y^2=r^2$，于是

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1.$$

当 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，有 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{r}{x}=\dfrac{y}{x}=\tan\alpha$.

上述性质在涉及三角函数的运算时经常用到，读者要有所了解，需要时可以查阅资料和工具书.

例 5 已知 $\cos\alpha$ 是方程 $2x^2-x-3=0$ 的实根，且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 α 及 $\tan\alpha$ 的值.

解 先求方程 $2x^2-x-3=0$ 的根，因式分解后，得

$$(2x+1)(x-3)=0,$$

即

$$x=-\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=3.$$

由 $\cos\alpha$ 是方程的实根知，

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\alpha=3(舍去),$$

而 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，所以

$$\tan\alpha=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

例 6 据气象台预报，在距某军事重地 S 岛正东 300 千米的 A 处有一个台风中心形成，并以每小时 40 千米的速度向正西北方向移动，在距台风中心 250 千米以内的地区将受其影响. 如果做应急准备，该军事基地需要 1.5 小时才完成防护工作. 问：该基地有充足时间应对吗？台风持续影响 S 岛多长时间？

分析 如图 1.2.4 所示建立平面直角坐标系，以 S 岛为原点，A 处的坐标为(300,0)，记圆的方程为 $x^2+y^2=250^2$. 易知当台风中心经过圆的内部时，台风将影响 S 岛，于是问题转化为“当时间 t 在何范围内，台风中心在圆 S 的内部”.

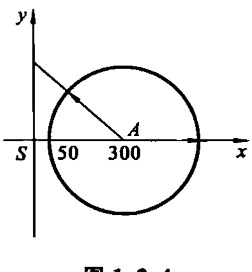

图 1.2.4

解 台风中心以每小时 40 千米的速度向西北方向移动，形成的轨迹是直线，且与横轴正向的夹角为 135°，水平

速度为 $40t\cos 135°$，垂直速度为 $40t\sin 135°$，其中 t 为时间.因此，台风中心运动的坐标 (x,y) 为

$$\begin{cases} x=300+40t\cos 135°, \\ y=40t\sin 135°. \end{cases}$$

要使台风中心距点 S 在 250 千米内，即台风中心 (x,y) 满足

$$x^2+y^2\leqslant 250^2,$$

代入 x,y 的坐标，化简得

$$(300-20\sqrt{2}t)^2+(20\sqrt{2}t)^2\leqslant 250^2,$$

解得

$$1.99\leqslant t\leqslant 8.61.$$

所以，大约 2 小时后，S 岛将受台风影响，并持续约 6.6 小时.显然，该基地有充足的时间应对台风.

第三节 坐 标 系

法国数学家笛卡尔创立了直角坐标系，进而推动了解析几何学的发展，把相互对立着的“数”与“形”统一了起来，从而开拓了变量数学的广阔领域.

一、直角坐标系

1. 平面直角坐标系

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴，如图 1.3.1 所示.实数与数轴上的点形成了一一对应关系.

为了确定平面上点的位置，可以用相互垂直的两条数轴建立平面直角坐标系.其中，横的一条数轴称为横坐标轴（简称横轴），竖的一条数轴称为纵坐标轴（简称纵轴），两个数轴的交点称为坐标原点（简称原点），如图 1.3.2 所示.

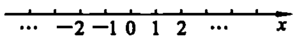

图 1.3.1

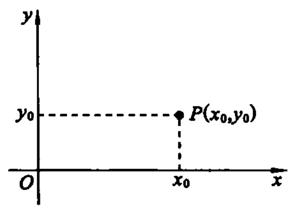

图 1.3.2

设平面 Oxy 上的任意一点 P，过点 P 作 x 轴（横轴）的垂线，得到交点在 x 轴上的坐标为 x_0，作 y 轴的垂线，得到交点在 y 轴（纵轴）上的坐标为 y_0，有序对 (x_0,y_0) 与点 P 就对应起来了.反之，给定有序实数对 (x_0,y_0) 也可以确定平面上的点 P.这样，点 P 就与有序实数对 (x_0,y_0) 一一对应，这对有序实数 (x_0,y_0) 称为点 P 的坐标.