"十二五"国家重点图书出版规划项目
航空航天精品系列

ROBUST CONTROL BASIS OF MODERN NONLINEAR SYSTEMS

现代非线性系统鲁棒控制基础

● 姜长生 吴庆宪 费树岷 等编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

"十二五"国家重点图书出版规划项目

航空航天精品系列

ROBUST CONTROL BASIS OF MODERN NONLINEAR SYSTEMS

现代非线性系统鲁棒控制基础

● 姜长生 吴庆宪 费树岷 朱亮 王岩青
黄国勇 方炜 王玉惠 傅健 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书全面系统地介绍了非线性系统的稳定与鲁棒控制问题，特别结合作者多年来的研究成果，说明方法和理论的应用。主要内容包括：非线性系统的稳定性理论和分析，非线性系统的轨迹线性化控制，非线性系统的广义预测控制，非线性系统的 Terminal 滑模控制，非线性系统的模糊控制，时滞非线性系统的鲁棒控制，非线性系统的切换控制等。本书在阐述主要理论和方法的同时，注重工程设计方法和算法的介绍。本书内容丰富，深入浅出，并配有与内容密切结合的例题和习题，便于读者理解与自学。

本书作为一本专著和培养高层次人才的教材，适合信息与控制领域，以及其他相关领域各专业研究生作为教材，也可供高等学校教师、广大科技工作者和工程技术工作者的同行们参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代非线性系统鲁棒控制基础/姜长生等编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5603-3799-9

Ⅰ.①现… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①非线性系统(自动化)—鲁棒控制 Ⅳ.①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 263788 号

策划编辑　王桂芝
责任编辑　李长波
封面设计　刘洪涛
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省委党校印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 21.75　字数 541 千字
版　　次　2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3799-9
定　　价　48.00 元

前　言

科教兴国的伟大号召像春天的惊雷激励着中华民族的每一个炎黄子孙，向着复兴民族、振兴中华的伟大目标奋勇前进。中华民族复兴的伟大潮流浩浩荡荡，勇往直前，势不可挡，必将成为21世纪世界历史上最伟大的壮举。我们几位同志合作撰写的这本书就是在这一伟大历史背景下诞生的，是我们在伟大号召激励之下一点微薄的努力和贡献。虽然这只是这个伟大潮流中一朵小小的浪花，但我们相信，千千万万朵飞舞的浪花必将汇合成排山倒海的大潮，将中华民族推向新世纪发展潮流的最前沿！

本书比较全面系统地介绍了近年来发展起来的鲁棒控制的基本理论，论述了非线性系统的各种鲁棒控制理论和方法、鲁棒稳定与鲁棒控制问题。为了使理论和实际能密切结合，达到学术性和应用性的一致，作者力求在阐述主要理论和方法的同时，注重工程设计方法、算法的介绍。全书内容丰富，深入浅出，并配有与内容密切结合的例题，便于读者理解与自学，读者只要具备矩阵理论和线性系统理论方面的知识就可读懂书中的大部分内容。书中涉及的泛函分析和微分几何方面的知识，初次阅读时完全可以跳过。

本书是作者在多年研究生教学和科研的基础上总结写成的，因此书中的内容不仅包含了作者多年研究生教学的经验与体会，也反映了作者相关的科学研究成果。

本书是在《现代鲁棒控制基础》一书出版后所进行的科学研究成果的基础上，进行改写加入新的内容重新写作而成的，书中花了较大的篇幅论述了非线性系统的稳定与鲁棒控制问题。

本书作为一本专著和培养高层次人才的教材，适合信息与控制领域，以及其他相关领域各专业研究生作为教材，也可供高等学校教师、广大科技工作者和工程技术工作者的同行们参考。

本书在编写过程中参阅了国内外的许多同类著作和相关文献，并引用了其成果和论述，在此向本书所引文献的所有作者们致以衷心的感谢。

本书的出版得到了国防科学技术工业委员会出版基金和国家自然科学基金(90716028，90405011，91116017)的资助，在此深致谢意，同时还要感谢哈尔滨工业大学出版社的同志们，由于他们的支持和辛勤劳动，使本书以很高的出版质量奉献给读者。

参加本书撰写工作的有姜长生教授、吴庆宪教授、费树岷教授、朱亮副教授、王岩青副教授、黄国勇副教授、方炜副教授、王玉惠副教授、傅健博士。全书最后由姜长生教授和吴庆宪教授整理完成。

最后，作者诚恳地表示，由于我们水平有限，书中疏漏和不当之处在所难免，热诚地欢迎来自各方面的批评、指教，衷心地感谢提出批评和指教的每一个人。

作　者

2012年10月于南京

目 录

第1章　非线性系统的稳定性
(Stability of Nonlinear Systems)

因为实际系统普遍存在着非线性环节、非线性因素和不确定性，或者实际系统模型的结构和参数在运行过程中发生不确定的非线性变化，因此实际系统很难建立准确的数学模型，而依赖数学模型设计的控制器难于使系统获得良好的稳定性和动态品质。同时，系统还有可能存在不确定的外界干扰及不确定的输入和输出，这就使得实际系统有效的稳定控制和良好的动态品质控制产生困难。考虑上述这些因素，使系统的稳定性和动态品质始终保持设计者期望的要求，是非线性系统鲁棒控制的研究任务。

1.1　非线性系统稳定性的基本定理
(Basic Theory of Nonlinear Systems Stability)

1.1.1　基本定理 I (Basic Theory I)

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

其中，D 为 $\mathbf{R}^n$ 一个开连通子集；$\boldsymbol{f}$ 为从 D 到 $\mathbf{R}^n$ 的局部 Lipschitz 映射。现假定 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e$ 是系统 (1.1) 的平衡点，即 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e)=\mathbf{0}$。

定义 1.1　对于系统(1.1)，若对于每个 $\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使有

$$\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\|<\delta \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\|<\varepsilon, \quad \forall t\geqslant t_0 \tag{1.2}$$

则称平衡点是稳定的，反之平衡点是不稳定的。

若对于平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 存在 $\delta_1>0$，使有

$$\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\|<\delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_e \tag{1.3}$$

则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 是收敛的。

若对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，$\exists T$，使有

$$\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\|<\delta_1 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\|<\varepsilon_1, \quad \forall t\geqslant t_0+T \tag{1.4}$$

则称 $\boldsymbol{x}_e$ 是收敛的。

若系统(1.1)既是稳定的，又是收敛的，则称系统(1.1)是渐进稳定的。

定义 1.2　对于系统(1.1)，$\boldsymbol{x}_e$ 为平衡点。若存在两个实常数 $\alpha,\lambda>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\|<\delta$ 成立，均可使有

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\|<\alpha\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\|\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \forall t\geqslant 0 \tag{1.5}$$

则称系统(1.1)局部指数稳定。若对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，式(1.5)均成立，则称系统(1.1)是全局指数稳定。

定义 1.3　设 V 为 $D\to\mathbf{R}$ 的函数，若 V 满足如下条件：

(i) $V(0)=0, 0\in D$;

(ii) $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}$,

则称 $V:D\rightarrow \mathbf{R}$ 为 D 中的正半定函数。如上述条件换成：

(i) $V(0)=0, 0\in D$;

(ii) $V(\boldsymbol{x})> 0, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}$,

则称 $V:D\rightarrow \mathbf{R}$ 为 D 中的正定函数。

正定函数是 Lyapunov 稳定性理论的基本架构，研究这一函数沿系统运动轨迹的导数是判定系统稳定性的关键。对于系统(1.1)，可以构造它的一个正定函数 $V(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}^{\infty}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\nabla V\cdot \boldsymbol{f}=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_n(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\tag{1.6}$$

由此引入 Lie 导数的概念。

定义 1.4 设 $V:D\rightarrow \mathbf{R}, \boldsymbol{f}:D\rightarrow \mathbf{R}^n$，则 V 沿 $\boldsymbol{f}$ 的 Lie 导数记为 $L_f V$，并定义为

$$\dot V(\boldsymbol{x})\xlongequal{\text{def}}L_f V(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(\boldsymbol{x})=\langle \mathrm{d}V,\boldsymbol{f}\rangle\tag{1.7}$$

式(1.7)为沿 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 $V(\boldsymbol{x})$ 进行了一次微分运算。如果沿 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对 $V(\boldsymbol{x})$ 进行 k 次微分运算，则有

$$\begin{cases} L_f^0 V(\boldsymbol{x})=V(\boldsymbol{x})\\ L_f^1 V(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\langle \mathrm{d}V,\boldsymbol{f}\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x})\\ \qquad\vdots\\ L_f^k V(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial L_f^{k-1}V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\langle \mathrm{d}L_f^{k-1}V(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rangle \end{cases}\tag{1.8}$$

由 Lie 导数的概念和计算式引入 Lie 括号的概念和计算式。对于两个向量值函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，定义

$$ad_f\boldsymbol{g}\xlongequal{\text{def}}[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}](\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\tag{1.9}$$

式中，$\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 分别是 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵，$[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}](\boldsymbol{x})$ 称为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的 Lie 括号。若 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{C}^{\infty}$ 对偶向量场，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{C}^{\infty}$ 向量场，则定义 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 沿 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的 Lie 导数为

$$L_f\boldsymbol{\omega}(x)\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x)\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\omega}(x)\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]\left[\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right]_{n\times n}+$$
$$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\cdot\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n}\tag{1.10}$$

定理 1.1 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是系统(1.1)的平衡点，$\boldsymbol{f}:D\rightarrow \mathbf{R}, V(\boldsymbol{x}):D\rightarrow \mathbf{R}$ 是代表系统(1.1)广义能量的连续可微函数，且

(i) $V(0)=0$;

(ii) $V(\boldsymbol{x})>0, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}$;

(iii) $\dot V(\boldsymbol{x})\leqslant 0, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}$,

则系统(1.1)的平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 Lyapunov 意义下稳定。

证明　选 $r>0$,使闭球 $B_r=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$ 包含在 D 中,所以 $\boldsymbol{f}$ 在紧集 B_r 中是确定的。令

$$\alpha=\min_{\|\boldsymbol{x}\|=r}V(\boldsymbol{x})\quad(\text{根据 }V(\boldsymbol{x})>0\in D,\text{因此 }\alpha>0)$$

现选 $\beta\in(0,\alpha)$,并记

$$\Omega_\beta=\{\boldsymbol{x}\in B_r:V(\boldsymbol{x})\leqslant\beta\}$$

因此,根据构造,$\Omega_\beta\subset B_r$。现假定 $\boldsymbol{x}(0)\in\Omega_\beta$,根据定理的条件(iii),有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant 0\Rightarrow V(\boldsymbol{x})\leqslant V(\boldsymbol{x}(0))\leqslant\beta,\quad\forall t>0$$

由此可见,在 $t=0$ 从 Ω_β 中出发的任何轨迹,在 $\forall t\geqslant 0$ 时停留在 Ω_β 内。进而,根据 $V(\boldsymbol{x})$ 的连续性,显然 $\exists\delta>0$,使

$$\|\boldsymbol{x}\|<\delta\Rightarrow V(\boldsymbol{x})<\beta\quad(B_\delta\subset\Omega_\beta\subset B_r)$$

由此得

$$\|\boldsymbol{x}(0)\|<\delta\Rightarrow\boldsymbol{x}(t)\in\Omega_\beta\subset B_r,\quad\forall t>0$$

从而有

$$\|\boldsymbol{x}(0)\|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|<r\leqslant\varepsilon,\quad\forall t\geqslant 0$$

这表明平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的。证毕。

定理 1.2　设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是系统(1.1)的平衡点,$V(\boldsymbol{x})$ 是代表系统(1.1)的广义能量的连续可微函数,且

(i) $V(0)=0$;

(ii) $V(\boldsymbol{x})>0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$;

(iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,　(1.11)

则系统(1.1)的平衡点是渐进稳定的。

证明　在定理的条件下,函数 $V(\boldsymbol{x})$ 沿 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的轨线是减少的,利用定理 1.1 相同的证法,对于每一个实数 $a>0$,可以找到 $b>0$,使有 $\Omega_b\subset\Omega_a$。根据定理 1.1,只要初始条件在 Ω_b 中,系统的解将仍留在 Ω_b 中。为了证明渐进稳定性,需要证明极限情况下 Ω_b 趋于 0。换言之,要证明当 $t\to\infty$ 时,Ω_b 收缩成一个点。因为根据定理的条件:在 D 中,$\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$,因此,$V(\boldsymbol{x})$ 总是沿着 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的解一直趋于 0,即

$$t\to\infty,\quad\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$$

例 1.1　如图 1.1 所示的单摆,由牛顿力学第二定律有

$$ml\ddot{\theta}+mg\sin\theta=0\tag{1.12}$$

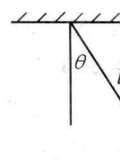

图 1.1　单摆系统

或写成

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

取 $x_1=\theta,x_2=\dot{\theta}$,则写出状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{g}{l}\sin x_1\end{cases}\tag{1.13}$$

这个状态方程属于 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的描述形式。

取系统的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 为

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}ml^2x_2^2+mgl(1-\cos x_1)$$

式中的第一项是系统的动能，第二项是它的势能。由表达式可见，定理 1.1 和定理 1.2 的条件(i) 均满足。对于定理的条件(ii)，因为 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}=[2k\pi,0]^{\mathrm{T}},k=0,1,2,\cdots$ 时，$V(\boldsymbol{x})=0$，所以 $V(\boldsymbol{x})$ 不是正定函数。现对 x_1 的范围限制为 $(-2\pi,2\pi)$，即取 $D=[(-2\pi,2\pi),\mathbf{R}]^{\mathrm{T}},V:D\to\mathbf{R}$，在此约束下，$V(\boldsymbol{x})$ 就是正定函数了，于是有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\nabla V(\boldsymbol{x})=[mgl\sin x_1,ml^2x_2][x_2,-\frac{g}{l}\sin x_1]^{\mathrm{T}}=$$

$$mglx_2\sin x_1-mglx_2\sin x_1=0$$

因为 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$，故根据定理 1.1，系统的原点 $[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}=[0,0]^{\mathrm{T}}$ 是稳定的。

若单摆存在运动阻尼项，则单摆的运动方程(1.12) 和方程(1.13) 分别变为

$$ma=-mg\sin\theta-kl\dot{\theta}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{g}{l}\sin x_1-\dfrac{k}{m}x_2\end{cases}$$

此时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仍然是平衡点。系统的 Lyapunov 函数仍为

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}ml^2x_2^2+mgl(1-\cos x_1)>0,\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\nabla V(\boldsymbol{x})=[mgl\sin x_1,ml^2x_2][x_2,-\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{k}{m}x_2]^{\mathrm{T}}=-kl^2x_2^2\leqslant 0$$

因为 x_1 为任意，$x_2=0$ 时，$\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$，所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不是负定，而是负半定。根据定理 1.1 知，系统在平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，但不能根据定理 1.2 得出渐进稳定的结论，因为在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域内 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不是负定的，虽然直觉告诉我们它是渐进稳定的。实际上，有摩擦的单摆系统，原点平衡点是渐进稳定的。

上面论述的稳定性定义从概念上来说，仅揭示了局部性的特征。从定义来看，对于平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$，当

$$\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}\|<\varepsilon$$

也就是说，从 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 附近开始的运动仍保留在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 附近，稳定性更重要的概念是渐进稳定，即系统的运动不仅能停留在 ε 内，而且能在极限的情况下收敛于 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$。若平衡点是稳定的，重要的是，要知道在什么条件下，任何一个初始状态是收敛于平衡点的。具有这种性质的平衡点称之为全局渐进稳定，或大范围渐进稳定。

定义 1.5 若系统的平衡点是稳定的，且任何一个初始状态的运动，当 $t\to\infty$ 时均收敛于平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$，则平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$ 称为大范围渐进稳定的，或全局渐进稳定。

对于定理 1.2，若能导出它在状态空间 $\mathbf{R}^n$ 中成立的条件，那么系统平衡点就是全局渐进稳定的。当然，这仅仅是必要条件，而不是充分条件。理由是，定理 1.1 也包括定理 1.2 的证明取决于 $V(\boldsymbol{x})$ 函数的正定性与 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定性相关联导致 $V(\boldsymbol{x})<V(\boldsymbol{x}_0)$ 才行。然而，这一性质在定理 1.1 中以 $\Omega_\beta=\{\boldsymbol{x}\in B_r:V(\boldsymbol{x})\leqslant\beta\}$ 定义的空间的一个紧集中才成立。更确切地说，在定理 1.1 中，通过选择一个球 $B_r=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$ 开始，然后证明 $\Omega_\beta\subset B_r$。集合 Ω_β 和 B_r 均为闭集(因为它们是有界的，从而也是紧的)。现在若 B_r 允许是整个空间 $\mathbf{R}^n$，那么情况就发生了改变，因为一般地在一个确定的有界闭集中条件 $V(\boldsymbol{x})\leqslant\beta$ 并不成立。这同样意味着 Ω_β

不是一个闭集，因而，甚至当 $V(\boldsymbol{x}) \leqslant \beta$ 时，轨迹偏离平衡点也是可能的。下例可说明这一点。

例 1.2　考虑如下正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

对于 $\beta < 1$，函数 $V(\boldsymbol{x}) \leqslant \beta$ 的区域是一个闭区域。然而，当 $\beta > 1$ 时，$V(\boldsymbol{x})$ 的等位面是开的。图 1.2 表明，一种初始状态可以从原点的平衡状态分离，而使运动朝低能量轨迹弯曲。

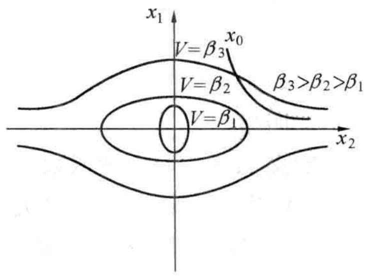

图 1.2　$V(\boldsymbol{x}) = \beta$ 被弯曲

解决这个问题得出一个附加条件，即 $V(\boldsymbol{x}) = \beta$ 是一个闭的弯曲曲线。这只能当 $\boldsymbol{x} \to \infty$ 时，函数 $V(\boldsymbol{x})$ 增长为无界才成立，这种函数称为径向无界函数。

定义 1.6　设 $V: D \to \mathbf{R}$ 为连续可微函数，若当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则称 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界的。

定理 1.3　设 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是系统(1.1)的平衡点，$V(\boldsymbol{x}): D \to \mathbf{R}$ 是代表系统(1.1)广义能量的可微函数，且

(i) $V(0) = 0$；

(ii) $V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$；

(iii) $V(\boldsymbol{x})$ 径向无界；

(iv) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$，则系统的平衡点 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是全局渐进稳定的。

证明　这个定理的证明类似于定理 1.2，现仅需证明：给定一个任意 $\beta > 0$，下式

$$\Omega_\beta = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : V(\boldsymbol{x}) \leqslant \beta\}$$

定义一个集合，该集合对于某个 $r > 0$ 应包含在球 $B_r = \{x \in \mathbf{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leqslant r\}$ 内，为了证明这一点，注意到函数 $V(\boldsymbol{x})$ 的径向无界性意味着对于任何 $\beta > 0$，$\exists\ r > 0$，使得 $V(\boldsymbol{x}) > \beta$ 在任何 $\|\boldsymbol{x}\| > r$ 处成立，因此可以说，有界的 $\Omega_\beta \subset B_r$ 成立。

例 1.3　考虑如下非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

为了研究原点平衡点的稳定性，取 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，则有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

因为 $V(\boldsymbol{x}) > 0, \dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$ 成立，且 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界，故根据定理 1.3，原点平衡点是全局渐进稳定的。

定义 1.7　若连续函数 $\alpha(r): [0, a) \to \mathbf{R}^+$ 满足：

(i) $\alpha(0) = 0$；

(ii) $\alpha(r)$ 是严格递增的。

则说 $\alpha(r)$ 是 $\mathscr{K}$ 类函数。若还有 $\alpha(r): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$，且当 $r \to \infty, \alpha(r) \to \infty$，则称 $\alpha(r)$ 是 $\mathscr{K}_\infty$ 函数。

引理 1.1　当且仅当存在 $\mathscr{K}$ 类函数 α_1 和 α_2，使

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant \alpha_2(\|\boldsymbol{x}\|), \quad \forall \boldsymbol{x} \in B_r \subset D \tag{1.14}$$

成立，则 $V: D \to \mathbf{R}$ 称为正定函数。进而，若 $D = \mathbf{R}^n$，且 $V(\boldsymbol{x})$ 为径向无界，则 α_1 和 α_2 可选为 $\mathscr{K}_\infty$ 类函数。

证明略。

引理 1.2　系统(1.1)的平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 稳定的充要条件是存在 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\cdot)$ 和一个常数 ε，使

$$\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \| < \delta \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e \| < \alpha \| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \| < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.15}$$

证明略。

定义 1.8　若连续函数 $\beta: [0,a) \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 满足：

(i) 固定 s，则 $\beta(r,s)$ 是关于 r 的 $\mathcal{K}$ 类函数；

(ii) 固定 r，则 $\beta(r,s)$ 是关于 s 递减的；

(iii) 当 $s \to \infty$ 时，$\beta(r,s) \to 0$，

则称 $\beta(r,s)$ 函数为 $\mathcal{KL}$ 类函数。

引理 1.3　系统(1.1)的平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 渐进稳定的充要条件是存在一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 和一个常数 ε，使

$$\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \| < \delta \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e \| < \beta(\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \|, t), \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.16}$$

证明略。

关于指数稳定有如下充分条件的定理。

定理 1.4　若定理 1.2 的条件全部成立，再假定存在正常数 K_1, K_2, K_3, P，使

$$K_1 \| \boldsymbol{x} \|^P \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant K_2 \| \boldsymbol{x} \|^P$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant - K_3 \| \boldsymbol{x} \|^P$$

则系统的原点平衡点是指数稳定的，进而若定理的条件在全局范围内成立，则系统的平衡点是全局指数稳定的。

证明　根据定理的假设，函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足引理 1.1 的条件，即

$$K_1 \| \boldsymbol{x} \|^P \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant K_2 \| \boldsymbol{x} \|^P$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant - K_3 \| \boldsymbol{x} \|^P \leqslant -\frac{K_3}{K_2} V(\boldsymbol{x})$$

也即

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant -\frac{K_3}{K_2} V(\boldsymbol{x}) \Rightarrow V(\boldsymbol{x}) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) \mathrm{e}^{(-\frac{K_3}{K_2})t}$$

$$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant \left[\frac{V(\boldsymbol{x})}{K_1} \right]^{\frac{1}{P}} \leqslant \left[\frac{V(\boldsymbol{x}_0) \mathrm{e}^{(-\frac{K_3}{K_2})t}}{K_1} \right]^{\frac{1}{P}}$$

或

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| \leqslant \| \boldsymbol{x}_0 \| \left[\frac{K_2}{K_1} \right]^{\frac{1}{P}} \mathrm{e}^{(-\frac{K_3}{K_2})t}$$

证毕。

1.1.2　不变性原理与吸引区(The Invariance Principle and Region of Attraction)

渐进稳定性是工程上期望的一种稳定性，但是利用 Lyapunov 函数判断系统平衡点的渐进稳定性，在 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负半定时无法确定。例 1.1 带摩擦的单摆就是其中的一例。这个缺陷是因为研究单摆 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 函数的性质时假定其变量 x_1 和 x_2 是独立的。事实上，这两个变量在单摆方程中不是相互独立的。Lyapunov 定理的推广由于 LaSalle 详细研究这一问题而获得成功，

其主要思想是平衡点概念的拓展，称之为不变集。

定义 1.9　若对于系统(1.1)，有

$$\boldsymbol{x}(0) \in M \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbf{R}^{+}$$

则集合 M 就称为系统(1.1) 的一个不变集。换言之，M 是这样一些点的集合，即若系统(1.1) 的一个解在某个瞬时，如起始时刻 $t=0$ 属于集合 M，则称它的解在未来所有时刻仍属于集合 M。

如下几例是不变集的例子之一。

① 若在 $t=0$ 有 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_e$，对 $\forall t \geqslant 0$，还有 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_e$，则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 是一个不变集。

② 系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的任意一条轨迹是一个不变集。

③ 极限环是一个不变集。

④ 若 $V(\boldsymbol{x})$ 是系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的连续可微函数(不必正定)，且 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$ 沿方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的解成立，则如下定义的集合

$$\Omega_l=\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : V(\boldsymbol{x}) \leqslant l\}$$

是一个不变集。注意到，条件 $\dot{V} \leqslant 0$ 意味着若系统的一条轨迹穿入一个 Lyapunov 面 $V(\boldsymbol{x})=C$，则这条轨迹再也不会穿出去。

⑤ 整个空间 $\mathbf{R}^n$ 是一个不变集。

定义 1.10　设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的一条轨迹，如果对于任何 $\boldsymbol{p} \in N$ 存在一个时间序列 $\{t_n\} \in [0,\infty)$，使

$$\text{当 } t \rightarrow \infty \quad \boldsymbol{x}(t_n) \rightarrow \boldsymbol{p}$$

或等价地有 $\lim\limits_{t \rightarrow \infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{p}\|=0$，那么集合 N 称为极限集(或称正极限集)。粗略地说，$\boldsymbol{x}(t)$ 的极限集 N 的意义就是，凡是 $\boldsymbol{x}(t)$ 均趋向这个集合。

① 任何渐进稳定的平衡点是从充分靠近平衡点出发的任何一个解的极限集。

② 一个稳定的极限环是从充分靠近它出发的任何解的正极限集。

引理 1.4　若系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 在 $t>t_0$ 是有界的，则它的正极限集 N 满足：

(i) N 有界；

(ii) N 是闭集；

(iii) N 是非空的，

进而，当 $t \rightarrow \infty$ 时，解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 逼近 N，继而系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 的正极限集 N 是系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的不变集。

证明略。

定理 1.5　若系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 存在一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足：

(i) $V(\boldsymbol{x})>0, \forall \boldsymbol{x} \in D$ 且 $0 \in D$；

(ii) 在有界域 $\mathbf{R}$ 内，$\mathbf{R} \subset D$ 成立，有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$；

(iii) 沿着 $\mathbf{R}$ 中任意一条轨迹上的点，但不包括 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不恒为 0，

如此，则系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是渐进稳定的。

证明　根据定理 1.1 知，对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 成立，有

$$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$$

这就是说，从闭球 B_δ 内出发的任何解将停留在闭球 B_ε 内。因此，系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 从球 B_δ 内出发的任何一个解 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 是有界的，且趋于包含在 B_ε 内的极限集 N。同样的，$V(\boldsymbol{x})$ 在紧集

B_ε 上是连续的，因此在 B_ε 内有界。根据定理的条件，$V(\boldsymbol{x})$ 也是不增函数，且当 $t\to\infty$ 时趋于非负的极限 L。注意到 $V(\boldsymbol{x})$ 是连续的，因此在极限集 N 中成立有 $V(\boldsymbol{x})=L(\forall\boldsymbol{x})$。根据引理 1.4，$N$ 是关于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的一个不变集，这意味着，从 N 中出发的任何一个解在未来所有时刻都将停留在 N 内。但是，沿着这个解，因为在 N 中，$V(\boldsymbol{x})=L$ 是常值，故 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$。因此，根据定理的条件，$N$ 是状态空间中的原点，从而可以得出结论：当 $t\to\infty$ 时，从 $\mathbf{R}\subset B_\delta$ 中出发的任何一个解均收敛于 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$。证毕。

定理 1.6　系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的零解大范围渐进稳定的充要条件是，在整个状态空间中（$\mathbf{R}=\mathbf{R}^n$）定理 1.5 的条件全部成立，且 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界的。

回顾单摆系统的例子。带摩擦单摆系统的状态方程为

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{k}{m}x_2 \tag{1.17}$$

系统的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 及其导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}ml^2x_2^2+mgl(1-\cos x_1)>0,\quad \forall\boldsymbol{x}\in(-\pi,\pi)\times\mathbf{R}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-kl^2x_2^2$$

因为对于所有的 $\boldsymbol{x}=[x_1,0]^{\mathrm{T}}$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$，所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负半定的。因为缺少 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定的条件，故 Lyapunov 定理不能判定系统是否是原点渐进稳定的。现根据定理 1.5 就可以确定系统是否是原点渐进稳定了。因为在域 $\mathbf{R}=[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}$，$-\pi<x_1<\pi$，$-a<x_2<a$，$a\in\mathbf{R}^+$ 中，定理 1.5 的条件(i) 和(ii) 总成立。现考查定理 1.5 的条件(iii)，由方程(1.17) 知，在一个非零的时间区间，$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv0$ 导致

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv0\Rightarrow0=-kl^2x_2^2\Leftrightarrow x_2=0$$

因此，有

$$x_2=0,\quad \forall t\Rightarrow\dot{x}_2=0$$

因此，得

$$0=-\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{k}{m}x_2$$

由于

$$x_2=0\Rightarrow\sin x_1=0$$

因为 x_1 约束在 $-\pi<x_1<\pi$ 区间内，所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 只在 $x_1=0$ 和 $x_2=0$ 成立。这表明定理 1.5 的条件(iii) 也成立，即系统的原点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是渐进稳定的。

例 1.4　考虑系统

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-x_2-\alpha x_1-(x_1+x_2)^2x_2$$

为了研究系统原点平衡点的稳定性，取

$$V(\boldsymbol{x})=\alpha x_1^2+x_2^2$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-2x_2^2[1+(x_1+x_2)^2]$$

由上可见，$V(\boldsymbol{x})>0$；对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,0)$，有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$。若 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$，则有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow x_2=0;\quad x_2=0;\quad \forall t\Rightarrow\dot{x}_2=0$$

$$\dot{x}_2=0\Rightarrow-x_2-\alpha_1x_1-(x_1+x_2)^2x_2=0$$

考虑到 $x_2=0$，由上式得 $x_1=0$。这表明 $\dot{V}(x)$ 除原点 $\boldsymbol{x}=[0,0]^{\mathrm{T}}$ 以外不恒为零，且 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界的，所以系统原点是全局稳定的。

定理 1.7(LaSalle 定理)　设 $V:D\to\mathbf{R}$ 是一个连续可微函数，并且假定：

(i) $M\subset D$ 是一个紧集，且是关于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 解的一个不变集；

(ii) 在 M 中，$\dot{V}\leqslant 0$；

(iii) $E:\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in M$，且 $\dot{V}=0\}$，即 E 是使 $\dot{V}=0$ 所有 M 的点的集合；

(iv) N 是 E 中最大的不变集，

则系统从 M 中出发的每一个解，当 $t\to\infty$ 时均逼近 N。

证明　考虑系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的一个从 M 中出发的解 $\boldsymbol{x}(t)$。因为 $\dot{V}\leqslant 0\in M$，所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个 t 的减函数。同时因为 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个连续函数，所以 $V(\boldsymbol{x})$ 在紧集 M 中是有界的。当 $t\to\infty$ 时，$V(\boldsymbol{x})$ 有一个极限。设 ω 是系统轨迹的极限集，因为 M 是一个不变的闭集，故 $\omega\subset M$。对于任意 $\boldsymbol{p}\in\omega$，$\exists$ 一个序列 $t_n\to\infty$，使 $\boldsymbol{x}(t_n)\to\boldsymbol{p}$。根据 $V(\boldsymbol{x})$ 的连续性，有

$$V(\boldsymbol{p})=\lim_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_n))=a\quad(\text{常数})$$

因此，在集合 ω 上，$V(\boldsymbol{x})=a$。同时，根据引理 1.4，ω 也是一个不变集。因为 $V(\boldsymbol{x})$ 在 ω 上是常数，故 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在 ω 上为零，即 $\omega\subset N\subset E\subset M$ 成立。因为 $\boldsymbol{x}(t)$ 有界，根据引理 1.4，当 $t\to\infty$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 逼近 ω(正极限集)。因此，当 $t\to\infty$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 逼近 N。证毕。

LaSalle 定理给出了 Lyapunov 定理以外的两个重要情况：其一，$V(\cdot)$ 函数要求是一个连续可微的函数(因而有界)，但并不要求它正定；其二，LaSalle 定理不仅适用于所有 Lyapunov 定理的平衡点，而且对更普遍的动力学系统的行为，如极限环也适用。

推论 1.1　设 $V:D\to\mathbf{R}$ 是包含 $x=0$ 的域 D 中的一个连续可微函数，且有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant 0\in D$。又设 $S=\{\boldsymbol{x}\in D:\dot{V}(\boldsymbol{x})=0\}$，且假定除平凡解外无任何其他解能恒定留在 S 中，则原点是渐进稳定的。

推论 1.2　在推论 1.1 中若 $D=\mathbf{R}^n$，且 $V(\boldsymbol{x})$ 是径向无界的，则原点是全局渐进稳定的。

例 1.5　考虑如下系统

$$\dot{x}_1=x_2+x_1(\beta^2-x_1^2-x_2^2),\quad \dot{x}_2=-x_1+x_2(\beta^2-x_1^2-x_2^2)$$

显然，$\boldsymbol{x}=[0,0]$ 是平衡点，由圆 $x_1^2+x_2^2=\beta^2$ 确定的点集构成一个不变集。这个圆上的点沿系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的解的时间导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2+x_2^2-\beta^2)=[2x_1,2x_2]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=2(x_1^2+x_2^2)(\beta^2-x_1^2-x_2^2)$$

由此可见，在这个圆上引发的任何一条轨迹在所有未来时间内仍停留在这个圆上。因而形如 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2:x_1^2+x_2^2=\beta^2\}$ 的点的集合构成一个不变集。在这个不变集上的轨迹由如下方程描述，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}:x_1^2+x_2^2=\beta^2}=\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1\end{cases}$$

因此，这个圆实际上是一个轨迹沿顺时针方向运动的极限环。

现根据 LaSalle 定理讨论这个极限环的稳定性，取

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2-\beta^2)^2$$

显然，在 $\mathbf{R}^2$ 中 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，其次

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2}\right]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-\beta^2)^2\leqslant 0$$