精品最新版

世纪金榜

# 专项提高方案

Tigao Fang'an

丛书主编：张 泉

数学之四

# 立体几何 概率统计

延边大学出版社

精品最新版

SHIJIJINBANG ®

世纪金榜

# 世纪金榜

# 专项提高方案

丛书主编：张泉

Tigao Fang'an

## 数学之四

## 立体几何 概率统计

延边大学出版社

丛书主编 / 张　泉
本册主编 / 张振伟
编　　委 / 吴　达　周玉强　仝　静
　　　　　赵建立　杜夏夏　解金花

图书内容咨询:☎ 0531-7187013　李老师　朱老师

图书使用及反馈:☎ 0531-7965612　杨老师　曹老师

<书名>世纪金榜专项提高方案(一)

作　　者: 张　泉
责任编辑: 金昌海
装帧设计: 侯　青
出版发行: 延边大学出版社
社址: 吉林省延吉市公园路105号　邮编: 133002
网址: http: //www. eabook. com (网络书局)
印刷: 滨州市裕滨印刷有限公司
开本: 880 × 1230毫米　1/16
印张: 133印张　　字数: 2100千字
印数: 1-10000册
版次: 2004年7月第1版
印次: 2004年7月第1次
ISBN 7-5634-1933-0/G·470

总定价: 135.00元

# 前言

ZHUANXIANG FANG'AN

为帮助广大学生牢固地掌握专题知识，突破知识运用中的薄弱环节，提高学科综合能力，世纪金榜力邀多名从事高三教学的专家，精心编写了《数学专项提高方案》系列丛书。共分为四个专项《函数·数列·极限·导数》、《三角函数·不等式》、《平面向量·平面解析几何》、《立体几何·概率统计》。本丛书在编写上严格遵循新考试大纲、教学大纲、新教材，突出新理念、展示新教材，训练定位在“低起点、高目标、小坡度、密台阶”循序渐进、重点突出、讲练到位，一定会使读者的专题知识与能力在有限的时间内获得最大限度的提高。

《立体几何·概率统计》的突出特点：

1.实：即实用，无论是基础知识、基本法的复习还是例题的选配，练习的设计都力求做到实用高效，能给考生以实实在在的帮助。

2.新：适应新的高考形式，坚持以新的思想为指导，以新的变化为立足点，充分揭示数学思想和数学方法的本质，归纳、探索解题规律，使知识系统化、网络化；

3.全：注重学科间的渗透和理论联系实际，培养学生的整体水平及综合素质。

***★具体栏目构成及特色如下：***

**【考纲展示】**展示新高考对本节知识的考试要求，使学生复习时有的放矢。

**【要点归纳】**对本节知识进行提炼、归纳，列明重点，破解难点，突出要点。

**【典例剖析】**精选高考试题或高质量的经典试题作为例题。进行全方位阐释、思路点拨及归纳警示，不仅启迪学生的思维，而且总结了解题的规律和方法。

**【能力训练】**每一节都精心设计了一套练习题，使考生在学完题例后有针对性的进行强化训练，提高解题能力。

**【热点规律方法】**在分析总结近几年新高考的命题趋势后，每一章节后面都给出了专题讲解，主要精选本章的重要知识点及高考的热点，着重突出重要数学思想方法的归纳与应用，注重一题多解，变式训练、创新点拨。

**【高考金题回放】**较全面地列出每部分近几年的新课程高考试题，并附以详尽解析，使学生在触摸高考中有所感悟提升。

**【综合过关检测】**紧扣全章知识点设计试题，题目覆盖面广，选题新颖、务实、典型。

***本书立足教材，侧重能力培养与考查，注重理论与社会生活的密切联系，关注社会热点，注重创新，定会成为广大师生的备考“智囊”和应试“锦囊”。***

编　者

2004年夏

立体几何·概率统计

# 目录

mu lu

## 一 直线、平面、简单几何体 1



## 二 排列、组合和概率 59

mu lu

# 一

# 直线、平面、简单几何体

## (一) 空间直线和平面

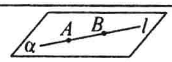
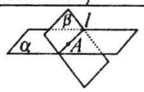
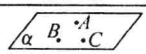
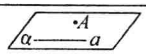
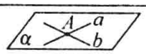
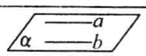
### §1.1 平面的基本性质

#### 考纲展示

掌握平面的基本性质,会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图,能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形,能够根据图形想像它们的位置关系.

#### 要点归纳

**1. 平面的基本性质**

| 名称 | 图形及符号表示 | 作 用 |
|---|---|---|
| 公理 1 |  | ①是说明平面是无限延展的<br>②是证明点在平面内的依据<br>③是判断直线是否在平面内的依据 |
| | $\left.\begin{array}{l}A\in l,B\in l\\A\in\alpha,B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha$ | |
| 公理 2 |  | ①是判断两个平面相交的依据<br>②是证明点共线问题的依据<br>③是证明线共点问题的依据 |
| | $A\in(\alpha\cap\beta)\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $A\in l$ | |
| 公理 3 |  | ①是确定平面的依据<br>②是证明点、线共面问题的依据<br>③是作截面、辅助平面的依据 |
| 推论 1 |  | |
| 推论 2 |  | |
| 推论 3 |  | |

2. 立体几何语言——文字语言、图形语言、符号语言

(1)用 $A,B,C,\cdots$ 表示点,用 $a,b,c,\cdots$ 表示线,用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示平面.

(2)用“$A\in a$”,“$A\in\alpha$”,“$a\subset\alpha$”分别表示点在直线上,点在平面内和线在平面内.

(3)立体几何问题实质上是三种语言的转换和交替使用.

#### 典例剖析

**【例1】**下列命题:

①5 个平面重叠起来要比 4 个平面重叠起来厚;

②直线上的所有点都在面内的面一定是平面;

③空间四点中,若有三个点共线,则这四点必共面;

④若 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in AB$,则 $C\in\alpha$;

⑤若 $a\subset\alpha,b\subset\alpha,l\cap a=A,l\cap b=B$,则 $l\subset\alpha$;

⑥若一直线上有两点在平面外,则直线上所有点都在平面外.

其中正确的是

(A)①③⑤ (B)③④⑤ (C)①②⑥ (D)②④⑤

**【点拨】**准确理解三个公理及推论的内涵和外延,是树立空间观念,学好立体几何的必要条件.

**【解析】**选 B.“平面”是一个只描述而不定义的概念,它可以无限延伸,也无厚度大小之分,故①错;

直线上所有的点都在面内,根据公理 1 只能说明沿直线方向是平的,但其他方向不一定是平的,也可能是曲面,故②错;

根据推论 1 可知③正确;

若 $A\in\alpha,B\in\alpha$,则 $AB\subset\alpha,C\in AB$,

则 $C\in\alpha$,故④正确;

$\because A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha$,

$\therefore AB\subset\alpha$,即 $l\subset\alpha$,故⑤正确;

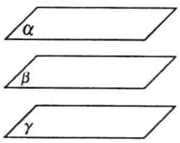
当直线和平面相交时,直线上有一点在平面内,其余各点在平面外,故⑥错.

综上,答案应选 B.

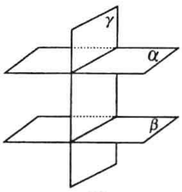
【例2】三个不重合的平面能将空间分成几部分?请画图说明.

【点拨】三个不重合的平面把空间分成的部分不同,可将它们的位置分类讨论.

【解析】(1)当三个平面互相平行时,可将空间分成四部分.(如图①)



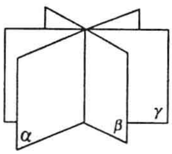

①



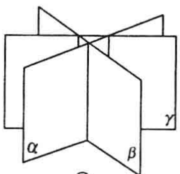

②

(2)当其中两个平面平行且与第三个平面相交时,可将空间分成六部分.(如图②)

(3)当三个平面两两相交,且交线重合时,可将空间分成六部分.(如图③)

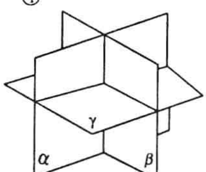



③




④

(4)当三个平面两两相交,且交线互相平行时,可将空间分成七部分.(如图④)



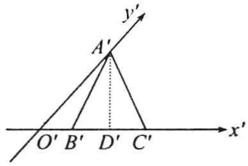

⑤

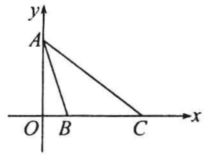
(5)当三个平面两两相交,且三条交线相交于一点,可将空间分成八部分.(如图⑤)

【归纳】(1)在解答过程中,采用了由简单到复杂的处理方法.首先对两个平面位置分类讨论,再让第三个平面以不同情况介入,然后分类解决.

(2)通过此题的解答,要学会处理问题的思维方法,注意逻辑思维能力、空间想像能力的培养与提高.

【例3】已知$\triangle ABC$ 的平面直观图是边长为 $a$ 的正$\triangle A'B'C'$,那么原三角形 $ABC$ 的面积是多少?




【点拨】如图,找到$\triangle ABC$ 的高是解题关键.

【解析】$\triangle A'B'C'$ 的高 $A'D'=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore O'A'=\sqrt{2}\cdot A'D'=\frac{\sqrt{6}}{2}a$,

$\therefore OA=2O'A'=\sqrt{6}a$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA=\frac{1}{2}a\times\sqrt{6}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

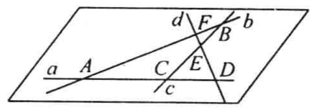
【归纳】(1)合理建立坐标系是解决此类题的一大关键.建立坐标系时,常利用图形的对称性,让顶点尽量多的落在坐标轴上或与坐标轴平行的直线上.

(2)明确原图形与直观图的线段长度关系,"二测"即"横不变,纵减半".

【例4】求证:两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

【点拨】此题应分有三线共点和无三线共点两种情况加以说明.

【解析】(1)若 $a,b,c,d$ 两两相交,不过同一点且无三线共点.设 $a\cap b=A,c\cap b=B,a\cap c=C,a\cap d=D,c\cap d=E,b\cap d=F$.如图.




方法一:$\because a\cap b=A$,$\therefore$ 由 $a,b$ 可确定平面 $\alpha$.

$\because B\in b,C\in a$,$\therefore BC\subset\alpha$,即 $c\subset\alpha$,同理 $d\subset\alpha$,

$\therefore a,b,c,d$ 共面.

方法二:过 $a,b$ 可确定平面 $\alpha$,

则 $A,B,C,D,F\in\alpha$,

过 $b,c$ 可确定平面 $\beta$,

则 $A,B,C,E,F\in\beta$.

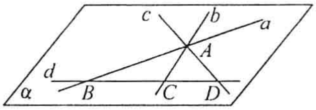
可知 $\alpha,\beta$ 为 $A,B,C$ 确定的平面,$\alpha,\beta$ 重合于 $\alpha$.

由 $D,E\in\alpha$,$\therefore d\subset\alpha$,

$\therefore a,b,c,d$ 共面.

(2)若有三线共点,设 $a,b,c$ 相交于点 $A$,$d$ 分别与 $a,b,c$ 相交于点 $B,C,D$,如图.

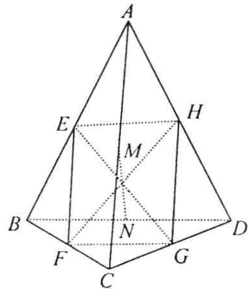
$\because a\cap b=A$，故过 $a,b$ 可确定平面 $\alpha$.
又 $\because c\cap d=D$，
$\therefore$ 过 $c,d$ 可确定平面 $\beta$.




$\because B\in a$，$\therefore B\in\alpha$，
又 $\because C\in b$，$\therefore C\in\alpha$，$\therefore BC\subset\alpha$，即 $d\subset\alpha$，
$\because D\in d$，$\therefore D\in\alpha$，$\therefore c\subset\alpha$，
$\therefore \alpha,\beta$ 为 $c,d$ 确定的平面，从而 $\alpha$ 与 $\beta$ 重合，
$\therefore a,b,c,d$ 共面.

【归纳】本题是证线共面问题. 关于点、线共面的基本思路是先由部分元素确定一个平面，再证明其他元素也在这一平面内；有时也用其中一部分元素确定的平面与另一部分元素确定的平面重合，从而得出所有元素共面的思路，需要指出的是后一种思路在证明平面的惟一性（确定性）时更常用.

【例5】如图所示，空间四边形 $ABCD$，对角线为 $AC$，$BD$，点 $E,F,G,H,M,N$ 分别是 $AB,BC,CD,DA,AC,BD$ 的中点. 求证：三线段 $EG,FH,MN$ 交于一点，且被该点平分.




【点拨】要证 $EG,FH$ 交于一点且被该点平分，只需证四边形 $EFGH$ 为平行四边形，同理可证其他.

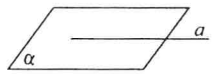
【解析】如图，连结 $EF,FG,GH,HE$.
$\because E,F,G,H$ 分别是 $AB,BC,CD,DA$ 的中点，
$\therefore EF/\!/GH,EH/\!/FG$，
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
设 $EG\cap FH=O$，则 $O$ 平分 $EG,FH$，同理四边形 $MFNH$ 也是平行四边形.
设 $MN\cap FH=O'$，则 $O'$ 平分 $MN,FH$.
$\because$ 点 $O,O'$ 都平分线段 $FH$，
$\therefore O$ 与 $O'$ 两点重合，
$\therefore MN$ 过 $EG,FH$ 的交点，即三线段共点且被该点平分.

【归纳】本题是证线共点问题.
(1)此题由线段中点惟一得出三线共点且线段在此点平分，一举两得.
(2)证明三线共点，常用方法是：先证其中两条直线交于一点，再证交点在第三条直线上，有时也可将问题转化为证明三点共线.

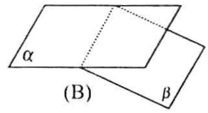
## 能力训练

### 一、选择题

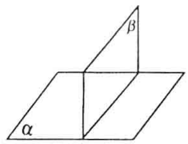
1. 下列图形正确的是（　　）



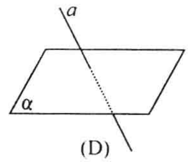
(A)



(B)



(C)



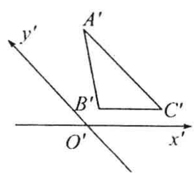
(D)

2. “直线 $a$ 经过平面 $\beta$ 外一点 $P$”用符号语言表示为（　　）
(A) $P\in a,a/\!/\beta$　　(B) $a\cap\beta=P$
(C) $P\in a,P\notin\beta$　　(D) $P\in a,a\subset\beta$

3. 已知四个命题：
①三点确定一个平面；
②若点 $P$ 不在平面 $\alpha$ 内，$A,B,C$ 都在平面 $\alpha$ 内，则 $P,A,B,C$ 四点不在同一平面内；
③两两相交的三条直线在同一平面内；
④两组对边分别相等的四边形是平行四边形.
其中正确命题的个数是（　　）
(A)0个　(B)1个　(C)2个　(D)3个

4. 空间四点中，如果任意三点都不共线，那么经过其中三点的平面有（　　）
(A)必定有4个　　(B)1个或4个
(C)1个或3个　　(D)1个，3个，4个都可能

5. 右图中直观图所示的平面图形是（　　）

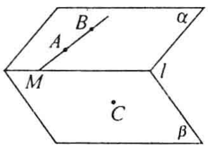



(A)正三角形
(B)锐角三角形
(C)钝角三角形
(D)直角三角形

6. $\alpha,\beta$是两个不重合的平面,在$\alpha$上取4个点,在$\beta$上取3个点,则由这些点最多可以确定平面的个数为 ( )

(A)30个 (B)32个 (C)35个 (D)40个

7. 如图,平面$\alpha\cap$平面$\beta=l$,$A,B\in\alpha$,$C\in\beta$,且$C\notin l$,直线$AB\cap l=M$,过$A,B,C$三点确定的平面记为$\gamma$,则$\gamma$与$\beta$的交线必通过 ( )




(A)点$A$ (B)点$B$

(C)点$C$但不过点$M$ (D)点$C$和点$M$

8. 设$E,F,G,H$为空间四点,命题甲:点$E,F,G,H$不共面;命题乙:直线$EF$和$GH$不相交,那么 ( )

(A)甲是乙的充分但不必要条件

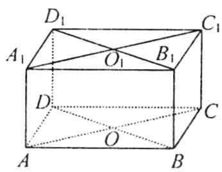
(B)甲是乙的必要但不充分条件

(C)甲是乙的充分必要条件

(D)甲不是乙的充分条件,也不是必要条件

## 二、填空题

9. 如图.




(1)$AC\cap BD=$________;

(2)平面$AB_1\cap$平面$A_1C_1=$________;

(3)平面$B_1D\cap$平面$AC=$________;

(4)平面$A_1C_1\cap$平面$AB_1\cap$平面$B_1C=$______;

(5)平面$A_1C\cap$平面$BD_1=$________.

10. 下面是一些命题的叙述语($A,B$表示点,$a$表示直线,$\alpha,\beta$表示平面).

①$\because A\subset\alpha,B\subset\alpha,\therefore AB\subset\alpha$;

②$\because A\in\alpha,B\in\alpha,\therefore AB\in\alpha$;

③$\because A\in\alpha,B\in\beta,\therefore \alpha\cap\beta=A$;

④$\because a\in\alpha,a\in\beta,\therefore \alpha\cap\beta=a$;

⑤$\because A\notin a,a\subset\alpha,\therefore A\notin\alpha$;

⑥$\because A\notin\alpha,a\subset\alpha,\therefore A\notin a$.

其中命题和叙述方法都正确的是________(请把正确命题的序号填上).

11. 一个水平放置的四边形的斜二测直观图是一个底角为$45^\circ$,腰和上底均为1的等腰梯形,则原图形的面积为______.

12. 直线$AB,AD\subset\alpha$,直线$CB,CD\subset\beta$,点$E\in AB$,点$F\in BC$,点$G\in CD$,点$H\in DA$,若直线$EH\cap$直线$FG=M$,则点$M$在______上.

## 三、解答题

13. 已知直线$m$与直线$a$,直线$b$分别交于$A,B$,且$a/\!/b$.求证:过$a,b,m$有且只有一个平面.

14. 正方体$ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$中,$E$为$AB$的中点,$F$为$AA_1$的中点.求证:

(1)$E,C,D_1,F$四点共面;

(2)$CE,D_1F,DA$三线共点;

(3)若$Q$是$A_1C$与平面$ABC_1D_1$的交点,则$B,Q,D_1$三点共线.

15. 三个平面两两相交,有三条交线.求证:这三条交线共点或互相平行.

## §1.2 空间两条直线

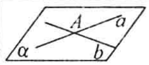
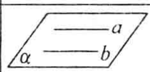
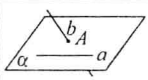
### 考纲展示

掌握两条直线平行与垂直的判定定理和性质定理.

掌握两条直线所成的角和距离的概念(对于异面直线的距离,只要求会计算已给出公垂线的距离).

### 要点归纳

**1. 两条直线的位置关系**

| 位置关系 | | 图示 | 表示方法 | 交点个数 |
|---|---|---|---|---|
| 两条直线共面 | 相交 |  | $a\cap b=A$ | 一个 |
| | 平行 |  | $a/\!/b$ | 无 |
| 两条直线异面:不同在任何一个平面内 | |  | $a$ 和 $b$ 是异面直线 | 无 |

**2. 平行公理和等角定理**

(1)公理 4:若 $a/\!/b$,$b/\!/c$,则 $a/\!/c$

作用:①判断空间两条直线的平行;②应用它证明等角定理,为研究异面直线所成角打基础.

(2)等角定理:如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

**3. 异面直线的有关问题**

(1)异面直线的判定:

①定义法(常用反证法说明)

②定理:过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.

(2)异面直线所成的角

通过平移转化为平面角,取值范围是$(0°,90°]$.

(3)异面直线的公垂线

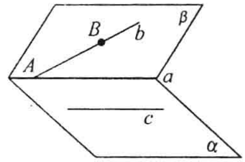
注:公垂线和两异面直线既垂直又相交,两异面直线有且只有一条公垂线.

(4)异面直线间的距离

夹在两异面直线间的公垂线段的长度,即连结两条异面直线上任意两点所得线段长度的最小值.

### 典例剖析

**【例1】**如图,已知 $\alpha\cap\beta=a$,$b\subset\beta$,$a\cap b=A$,且 $c\subset\alpha$,$c/\!/a$.求证:$b$,$c$ 为异面直线.




**【点拨】**要证两条直线异面,可根据异面直线的判定定理直接证明,或利用反证法进行间接证明.

**【解析】**方法一:直接法

$\because c\subset\alpha$,$a\cap b=A$,$\alpha\cap\beta=a$,

$\therefore A\in a\subset\alpha$,而 $a/\!/c$,$\therefore A\notin c$,

在 $b$ 上任取一点 $B$(不同于 $A$).$\because b\subset\beta$,$\therefore B\notin c$,

$\therefore AB$ 与 $c$ 是异面直线,即 $b$,$c$ 是异面直线.

方法二:反证法

假设 $b$,$c$ 不是异面直线,即 $b$,$c$ 在同一平面 $\gamma$ 内,则 $b\subset\gamma$,$c\subset\gamma$,在 $b$ 上任取不同于 $A$ 的一点 $B$,

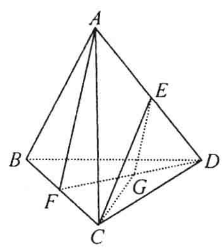
则 $B\notin a$,从而 $B\in\gamma$,$c\subset\gamma$.又 $A\in a$,$a/\!/c$,$\therefore A\notin c$.

于是过 $c$ 与 $c$ 外一点 $A$ 的平面就是平面 $\alpha$,而这样的平面有且只有一个.从而 $b$,$c$ 都在 $\alpha$ 内,则 $B\in b\subset\alpha$,这与 $B\notin\alpha$ 矛盾,因此 $b$,$c$ 为异面直线.

**【归纳】**(1)运用定理证异面直线时,要积极构造适合定理的条件.

(2)反证法是立体几何解题中用于确定位置关系的一种较好方法.它的一般步骤是:假设结论的反面成立,据理推出矛盾,从而断定原结论正确.当遇到"否定性"、"惟一性"、"至多"、"至少"等类型命题时,常用反证法.

**【例2】**在棱长都相等的四面体 $A—BCD$ 中,$E$,$F$ 分别为棱 $AD$,$BC$ 的中点,连结 $AF$,$CE$,求异面直线 $AF$ 和 $CE$ 所成角的大小.




**【点拨】**用"平移法""作角"再"求角"或用"补形法".

**【解析】**方法一:如图,连结 $DF$.在 $\triangle AFD$ 中,过点 $E$ 作 $EG/\!/AF$,且 $EG\cap DF=G$,再连结 $CG$,则 $\angle CEG$ 为所求异面直线的角.

设棱长为 $a$,则 $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$EG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AF$, $\therefore EG=\frac{\sqrt{3}}{4}a$,

$CG=\sqrt{FG^2+FC^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{4}a)^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$,

∴在$\triangle CEG$中,

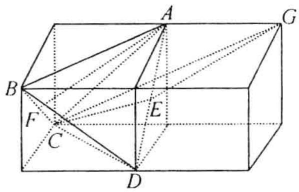
$$\cos\angle CEG=\frac{EG^2+EC^2-CG^2}{2EG\cdot EC}=\frac{\frac{3}{16}a^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{7}{16}a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{2}{3},$$

$\therefore \angle CEG=\arccos\frac{2}{3}$,

即异面直线$AF,CE$所成的角为$\arccos\frac{2}{3}$.

方法二:用“补形法”.



如图,将正四面体$A—BCD$放入正方体中,并在此正方体的右侧作一个与它完全一样的正方体,则$EG \underline{\underline{\parallel}} AF$.

连结$CG$,则$\angle CEG$为所求异面直线$AF,CE$所成的角或它的补角.

设正方体的棱长为$a$,

则$CE=EG=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{2a^2-\frac{1}{2}a^2}$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

$CG=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$,

∴在$\triangle CEG$中,

$$\cos\angle CEG=\frac{EC^2+EG^2-CG^2}{2EC\cdot EG}=\frac{\frac{6}{4}a^2+\frac{6}{4}a^2-5a^2}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{2}a}$$

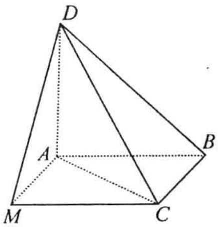
$$=-\frac{2}{3},$$

又∵异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$.

∴所求异面直线$AF,CE$所成角的大小为$\arccos\frac{2}{3}$.

**【归纳】**求“线、线所成角”就是将空间问题转化为平面问题,基本方法有“平移法”、“补形法”. 事实上“补形法”最终还得归结到“平移法”,只是为了平移方便,图像直观,易解答. 用“平移法”作角,选择“空间一点”是解题的关键.

**【例3】**如图,在三棱锥$D—ABC$中,$DA\perp$平面$ABC$,$\angle ACB=90°$,$AC=BC$,$\angle ABD=30°$,求异面直线$AB$与$CD$所成角的余弦值.



**【点拨】**利用平移法或向量法求值.

**【解析】**以$AB,BC$为邻边作▱$ABCM$,则$\angle DCM$即为异面直线$AB,CD$所成的角.

设$AC=BC=a$,∵$\angle ACB=90°$,

$\therefore AB=\sqrt{2}a, MC=\sqrt{2}a$,

∵$DA\perp$平面$ABC$,

$\therefore \angle DAB=\angle DAC=\angle DAM=90°$,

又$\angle ABD=30°$,$\therefore DA=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

又$AM=a$,$\therefore DM=\frac{\sqrt{15}}{3}a$,$DC=\frac{\sqrt{15}}{3}a$,

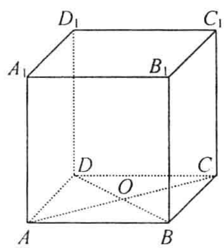
$\therefore \cos\angle DCM=\frac{DC^2+MC^2-DM^2}{2DC\cdot MC}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

**【归纳】**求异面直线所成的角,一般都把它转化为求两相交直线所成的角,本题用的是平行四边形性质,在图形中反映的是向外补形平移,如分别取$BD$,$AB,AC,BC$的中点$P,Q,M,N$,则$\angle PNM$也是所求的角,同样可得$\cos\angle PNM=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

**【例4】**如图,正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1=a$.

(1)求直线$BC$与$AA_1$之间的距离;

(2)求直线$AC$与$BB_1$之间的距离.



**【点拨】**要求距离须先找出异面直线的公垂线段,注意公垂线与两异面直线既垂直又相交.

**【解析】**(1)∵$AA_1\perp AB$,$AA_1\cap AB=A$,

$AB\perp BC$,$AB\cap BC=B$,

∴线段$AB$为$BC$与$AA_1$的公垂线段,

$\because AB=a$，$\therefore BC$ 与 $AA_1$ 之间的距离为 $a$.

(2)连结 $BD$，设 $AC\cap BD=O$，

$\because AC\perp BD$，即 $AC\perp OB$，$AC\cap OB=O$，

又 $B_1B\perp OB$，$B_1B\cap OB=B$，

$\therefore OB$ 是 $AC$ 与 $B_1B$ 的公垂线段，

$\because OB=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore$ 直线 $AC$ 与 $BB_1$ 之间的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

**【归纳】**求异面直线之间距离的步骤：①找(作)线段；②证线段是公垂线段；③求公垂线段的长度.

## 能力训练

### 一、选择题

1. 两条异面直线指的是　(　　)

(A)不同在一个平面内的两条直线

(B)分别在某两个平面内的两条直线

(C)既不平行又不相交的两条直线

(D)平面内的一条直线和平面外的一条直线

2. 设点 $P$ 是直线 $l$ 外一点，过 $P$ 与 $l$ 成 $30^\circ$ 角的异面直线有　(　　)

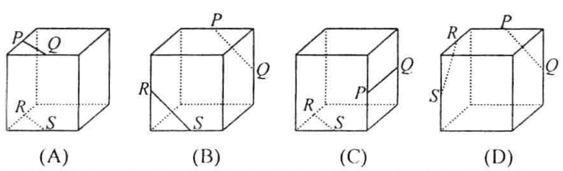
(A)无数条　(B)两条

(C)至多有两条　(D)一条

3. 如果两条异面直线称作"一对"，那么正方体的十二条棱中，共有几对异面直线　(　　)

(A)12 对　(B)24 对　(C)36 对　(D)48 对

4. 如图，点 $P,Q,R,S$ 分别在正方体的四条棱上，并且是所在棱的中点，则直线 $PQ$ 和 $RS$ 是异面直线的一个图是　(　　)




(A)　(B)　(C)　(D)

5. 空间四边形 $ABCD$ 的各边与两条对角线的长都为 1，点 $P$ 在 $AB$ 上移动，点 $Q$ 在 $CD$ 上移动，则点 $P$ 和 $Q$ 的最短距离为　(　　)

(A)$\dfrac{1}{2}$　(B)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C)$\dfrac{3}{4}$　(D)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 两条相交直线 $l,m$ 都在平面 $\alpha$ 内且都不在平面 $\beta$ 内，命题甲：$l$ 和 $m$ 中至少有一条与 $\beta$ 相交，命题乙：平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 相交，则甲是乙的　(　　)

(A)充分不必要条件　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　(D)既非充分又非必要条件

7. 异面直线 $a,b$ 成 $60^\circ$ 角，直线 $c\perp a$，则直线 $b$ 与 $c$ 所成角的范围是　(　　)

(A)$[30^\circ,90^\circ]$　(B)$[60^\circ,90^\circ]$

(C)$[60^\circ,120^\circ]$　(D)$[30^\circ,120^\circ]$

8. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$E,F$ 分别是棱 $AB$，$BB_1$ 的中点，$A_1E$ 与 $C_1F$ 所成的角是 $\theta$，则　(　　)

(A)$\theta=60^\circ$　(B)$\theta=45^\circ$

(C)$\cos\theta=\dfrac{2}{5}$　(D)$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$

### 二、填空题

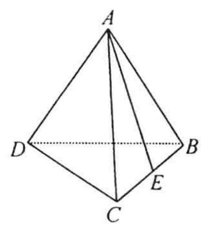
9. 以下两个命题：

①若四点不共面，则这四个点中任何三点不共线；

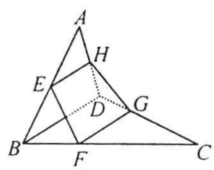
②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

其中逆命题为真命题的是________(填上符合要求的命题序号).

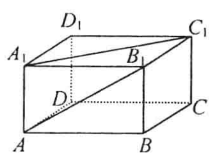
10. 如图，在正四面体 $ABCD$ 中，$E$ 是棱 $BC$ 的中点，则异面直线 $AE$ 和 $BD$ 所成角的余弦值是________.




11. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，$E,H$ 分别是 $AB,AD$ 的中点，$F,G$ 分别是 $CB,CD$ 上的点，且 $\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$，若 $BD=6$ cm，梯形 $EFGH$ 的面积为 $28\ cm^2$，则平行线 $EH$ 和 $FG$ 的距离为________.

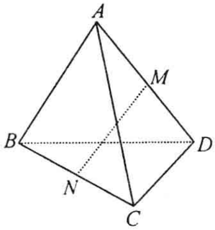



12. 长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle B_1A_1C_1=\angle BAB_1=30^\circ$，$AA_1=1$，则 $A_1A$ 与 $B_1C$ 间的距离为________.

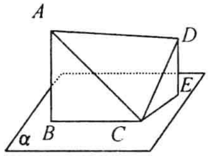


**三、解答题**

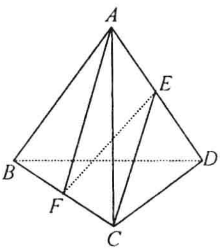
13. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$M,N$ 分别是 $AD,BC$ 的中点.求证：
(1)$MN$ 与 $AB$ 是异面直线；
(2)$AC+BD>2MN$.




14. 如图，已知线段 $AB\perp$ 平面 $\alpha$，线段 $BC\subset\alpha$，$CD\perp BC$ 且 $CD$ 与平面 $\alpha$ 成 $30^\circ$ 角，设 $AB=BC=CD=2$，$CE$ 是 $CD$ 在平面 $\alpha$ 内的射影.
(1)求证：$AD$ 与 $BC$ 是异面直线；
(2)求 $AC$ 与 $DE$ 之间的距离；
(3)求 $AD$ 与 $BC$ 所成角的度数.




15. 如图，在棱长为 $a$ 的正四面体 $A—BCD$ 中，$E$，$F$ 分别为 $AD,BC$ 的中点.
(1)求证：$EF$ 是 $AD$ 和 $BC$ 的公垂线；
(2)求 $EF$ 的长；
(3)求异面直线 $AF$ 和 $CE$ 所成的角.




## §1.3 直线和平面平行

### 考纲展示

了解直线和平面的位置关系；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理.

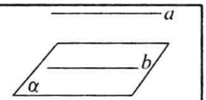
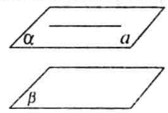
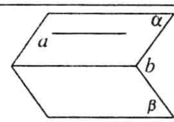
### 要点归纳

**1. 直线和平面的位置关系**

(1)直线在平面内——有无数个公共点

(2)直线在平面外 $\begin{cases}\text{相交——只有一个公共点}\\ \text{平行——没有公共点}\end{cases}$

**2. 直线和平面平行的判定定理与性质定理**

| | | |
|---|---|---|
| 判定定理 | ① $\left.\begin{array}{l}a\not\subset\alpha\\ a\parallel b\\ b\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$ |  |
| | ② $\left.\begin{array}{l}\alpha\parallel\beta\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\beta$ |  |
| 性质定理 | $\left.\begin{array}{l}a\parallel\beta\\ a\subset\alpha\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$ |  |

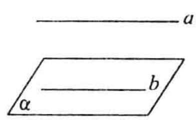
### 典例剖析

【例1】已知：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\parallel b$，求证：$a\parallel\alpha$.

【点拨】考虑用直线与平面平行的定义或空间直线与平面的位置关系，排除相交和在平面内两种情况.从而得出线面平行.

【解析】方法一：$\because a\parallel b$，

$\therefore a,b$ 确定的平面 $\beta$ 与平面 $\alpha$ 相交于 $b$，




$\because a,b$ 为同一平面内的两条直线，若 $a$ 与平面 $\alpha$ 相交于 $A$，则 $A$ 必在直线 $b$ 上，故 $a,b$ 相交，与 $a\parallel b$ 矛盾.

$\therefore a\parallel\alpha$.

方法二:设直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 相交于 $A$ 点,

$\because a/\!/b$,

$\therefore A$ 不在直线 $b$ 上但在平面 $\alpha$ 内.

设 $a,b$ 确定的平面为 $\beta$,则若 $A$ 在 $a$ 上,必在 $\beta$ 内,故 $A$ 在 $\alpha,\beta$ 内,于是 $\alpha,\beta$ 相交于过 $A$ 的另一条直线 $b'$,但 $\alpha,\beta$ 相交于直线 $b$,与两平面相交有且只有一条交线的公理矛盾.

$\therefore a/\!/\alpha$.

方法三:假设直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 相交于 $A$ 点,

$\because a/\!/b$,$\therefore A\notin b$,

由 $a,b$ 确定的平面 $\beta$ 与由 $b,A$ 确定的平面 $\alpha$ 都有公共直线 $b$ 与点 $A$,

$\therefore \alpha$ 与 $\beta$ 重合,则 $a$ 在 $\alpha$ 内,与题设 $a$ 在 $\alpha$ 外矛盾,

$\therefore a/\!/\alpha$.

**【归纳】**(1)本证明过程使用了"同一法",即通过证明 $\alpha$ 与 $\beta$ 重合,达到推出矛盾的目的.

(2)"同一法"是间接证法的一种,当一个命题的条件和结论都惟一存在时,这个命题和逆命题等价.同一法就是以证明逆命题正确来证明原命题成立的一种方法.用"同一法"证题的步骤是:

①作出与结论相符的直线(点、面等);

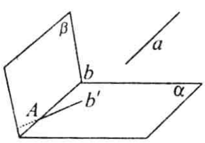
②利用有关惟一性公理、定理证明所作直线(点、面等)与题中的直线(点、面等)重合.

**【例2】**已知:$a/\!/\alpha,a/\!/\beta,\alpha\cap\beta=b$.

求证:$a/\!/b$.

**【点拨】**此题证明的难点是:构造图形,构造符合题意的图形,由于构造方法不同,可有不同的证法.

**【解析】**方法一:




$\because \alpha\cap\beta=b$,

在 $b$ 上任取一点 $A$,设过 $A$ 和直线 $a$ 的平面与平面 $\alpha$ 相交于直线 $b'$,

$\because a/\!/\alpha$,则 $a/\!/b'$,

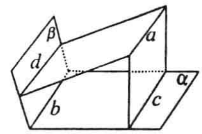
又设经过 $A$ 及直线 $a$ 的平面交 $\beta$ 于 $b''$,

$\because a/\!/\beta$,$\therefore a/\!/b''$,$b'$ 和 $b''$ 都经过 $A$ 且与 $a$ 平行,

$\therefore b'$ 和 $b''$ 重合,重合后的直线既在 $\alpha$ 内,又在 $\beta$ 内,因而为交线 $b$,

$\therefore b/\!/a$.

方法二:设过直线 $a$ 的两个平面分别与 $\alpha,\beta$ 交于直线 $c,d$,



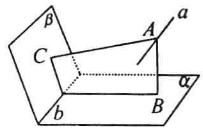

$\because a/\!/\alpha,a/\!/\beta$,

$\therefore a/\!/c,a/\!/d$,

$\therefore c/\!/d$,从而 $c/\!/\beta$,

$\therefore c/\!/b$,$\therefore a/\!/b$.

方法三:在 $a$ 上取一点 $A$,




作 $AB\perp\alpha$ 于 $B$,

$AC\perp\beta$ 于 $C$,

$\because a/\!/\alpha,a/\!/\beta$,

$\therefore a\perp AC,a\perp AB$,

设 $AB,AC$ 确定平面 $\gamma$,则 $a\perp\gamma$,

又$\because b\perp AB,b\perp AC$,$\therefore b\perp\gamma$,$\therefore a/\!/b$.

**【归纳】**证明线线平行的方法可归纳如下:

(1)利用线线平行的定义:证明线线共面且无公共点;

(2)利用平行公理;

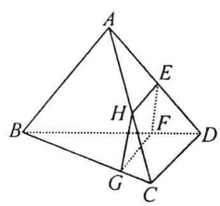
(3)利用线面平行的性质定理:证线面平行转化为证线线平行;

(4)利用线面垂直性质定理:垂直于同一平面的两线平行;

(5)利用面面平行的性质定理:把面面平行转化为线线平行;

(6)利用共线向量定理:通过向量坐标运算来实现证明线线平行.

**【例3】**如图,空间四边形 $ABCD$ 被一平面所截,截面 $EFGH$ 是一个矩形.




(1)求证:$CD/\!/$平面$EFGH$;

(2)求异面直线 $AB,CD$ 所成的角.

**【点拨】**欲证线面平行,可先证线线平行,欲证线线平行,可先证线面平行.

**【解析】**(1)$\because$截面 $EFGH$ 是一个矩形,

$\therefore HE/\!/GF$,

又 $GF\subset$平面 $BCD$,$\therefore HE/\!/$平面 $BCD$,

又 $HE\subset$平面 $ACD$,平面 $BCD\cap$平面 $ACD=CD$,

$\therefore HE/\!/CD$,$\therefore CD/\!/$平面 $EFGH$.

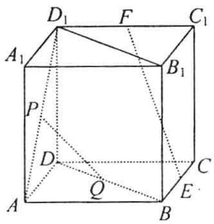
(2)由(1)知,$CD/\!/HE$,同理 $AB/\!/EF$,

由异面直线所成角的定义知$\angle HEF$ 即为所求.

$\therefore AB,CD$ 所成角为 $90^\circ$.

**【归纳】**线线平行和线面平行可以相互转化，要正确运用这些转化，就必须要熟记线面平行的定义及判定定理和性质定理的内容，明确定理中的条件和结论. 解题时，要仔细分析已知中的条件和结论，由已知想性质，由结论想判定，然后通过定理实现转化.

**【例4】**如图，在棱长为 $a$ 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$, $F$, $P$, $Q$ 分别是 $BC$, $C_1D_1$, $AD_1$, $BD$ 的中点.




(1) 求证：$PQ$ // 平面 $DCC_1D_1$；

(2)求 $PQ$ 的长；

(3)求证：$EF$//平面 $BB_1D_1D$.

**【点拨】**要证明线面平行，可证线线平行或转化为证明面面平行，这就要充分地利用中点的性质，因为已知中有关中点的信息较多.

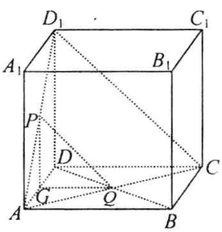
**【解析】**(1)方法一：连结 $AC$, $CD_1$.

∵$P$, $Q$ 分别是 $AD_1$, $AC$ 的中点，

∴在△$ACD_1$ 中，$PQ$//$CD_1$，

又 $CD_1$⊂平面 $DCC_1D_1$，∴$PQ$//平面 $DCC_1D_1$.

方法二：取 $AD$ 中点 $G$，连结 $PG$, $QG$，




∵$P$, $Q$ 分别为 $AD_1$, $AC$ 的中点，

∴$PG$//$DD_1$, $GQ$//$DC$,

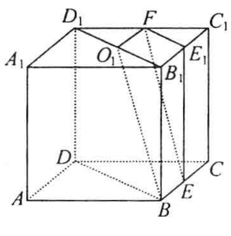
又∵$DD_1 \cap DC = D$,

∴ 平面 $PGQ$ // 平面 $DCC_1D_1$，

∵$PQ$⊂平面 $PGQ$，∴$PQ$//平面 $DCC_1D_1$.

(2)$PQ=\frac{1}{2}CD_1=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(3)方法一：取 $B_1D_1$ 的中点 $O_1$，连结 $FO_1$, $BO_1$，




则 $O_1F \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B_1C_1$，

又 $BE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B_1C_1$，

∴$O_1F \underline{\underline{/\!/}} BE$，

∴四边形 $BEFO_1$ 是平行四边形，

∴$EF$//$BO_1$，

又 $BO_1$⊂平面 $BB_1D_1D$，∴$EF$//平面 $BB_1D_1D$.

方法二：取 $B_1C_1$ 的中点 $E_1$，连结 $FE_1$, $EE_1$，

可证明平面 $EE_1F$//平面 $BB_1D_1D$，

∴$EF$//平面 $BB_1D_1D$.

**【归纳】**(1)解这类问题的关键是在平面内找(作)出与已知直线平行的直线，找(作)的方法就是充分利用已知条件，创造出三角形的中位线、平行四边形、线段的比值相等来达到证明线线平行的目的.

(2)证明线面平行的方法主要有：

①利用定义，证线面无公共点；

②利用线面平行的判定定理；

③利用面面平行的性质.

## 能力训练

**一、选择题**

1. $a$, $b$ 是两条异面直线，$A$ 是不在 $a$, $b$ 上的点，则下列结论成立的是 ( )

(A)过 $A$ 有且只有一个平面平行于 $a$, $b$

(B)过 $A$ 至少有一个平面平行于 $a$, $b$

(C)过 $A$ 有无数个平面平行于 $a$, $b$

(D)过 $A$ 且平行于 $a$, $b$ 的平面可能不存在

2. $\alpha$, $\beta$ 表示平面，$m$, $n$ 表示直线，则 $m$//$\alpha$ 的一个充分条件是 ( )

(A)$\alpha \perp \beta$ 且 $m \perp \beta$　　(B)$\alpha \cap \beta = n$ 且 $m$//$n$

(C)$m$//$n$ 且 $n$//$\alpha$　　(D)$\alpha$//$\beta$ 且 $m \subset \beta$

3. 如果直线 $l$, $m$ 与平面 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 满足：$\beta \cap \gamma = l$, $m$//$l$, $m \subset \alpha$，则必有 ( )

(A)$l$//$\alpha$　　(B)$\alpha$//$\gamma$

(C)$m$//$\beta$ 且 $m$//$\gamma$　　(D)$m$//$\beta$ 或 $m$//$\gamma$

4. 直线 $a$//平面 $\alpha$，直线 $b$//$\alpha$，则 $a$, $b$ 的位置关系是 ( )

(A)平行　　(B)相交

(C)异面　　(D)不能确定

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$E$, $F$ 分别是 $AB$, $AD$ 上的点，且 $AE:EB=AF:FD=1:4$，又 $H$, $G$ 分别为 $BC$, $CD$ 的中点，则 ( )