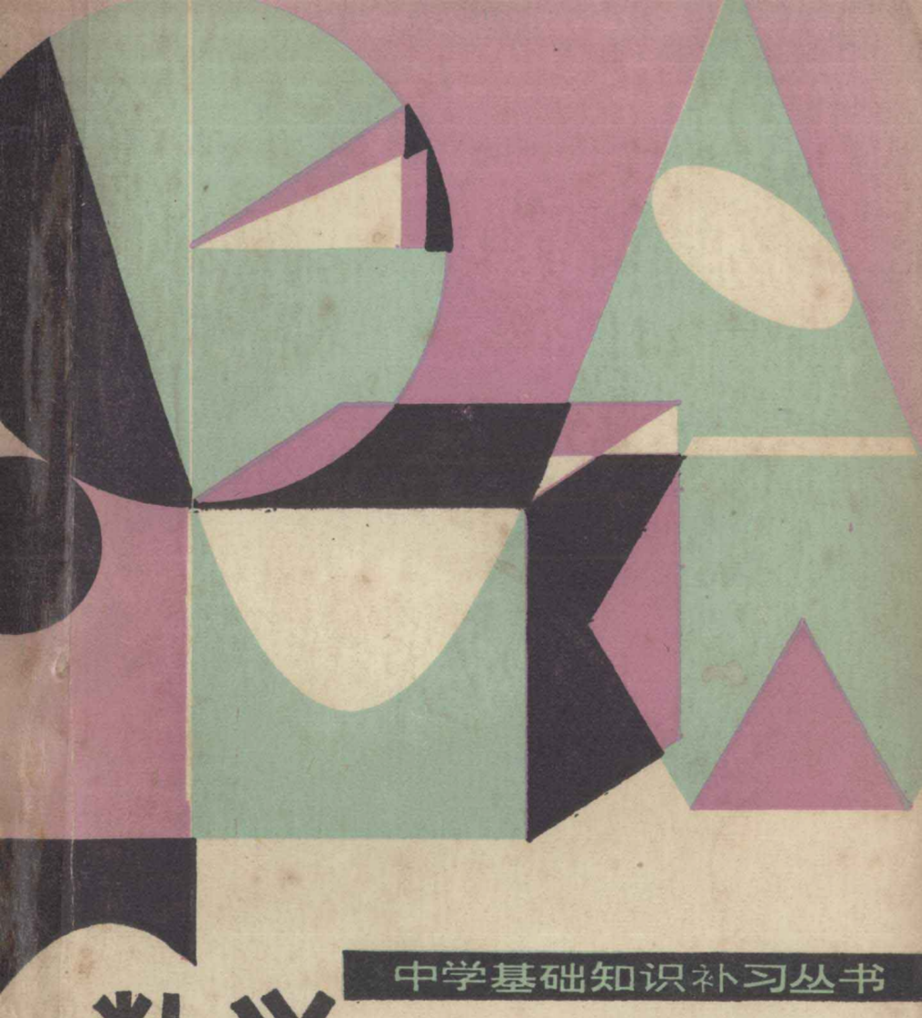

中学基础知识补习丛书

数学复习与题解（上）

北京市海淀区教师进修学校主编

封面设计：赵景伟

书号：7143・5223
定价：　1.70　元

中学基础知识补习丛书

数学复习与题解

上 册

北京市海淀区教师进修学校主编

编 者

北京第三师范学校： 张君达
北京立新学校： 任光辉
北京工业学院附属中学： 关民乐
清华大学附属中学： 孔令颐
北京四十七中： 王健民
北京市海淀区教师进修学校：
张士充 赵大悌 陈宝民
尹秀盈 李纪良 王增民
毕德权

审阅者

北京师范大学第二附属中学：
金文清 李文英 古永喜
于广兴 金宝铮
北京铁路二中： 刘崇俊
华北电力学院：
刘国隆 宋文松 李洪敏
北京电力学校：张齐金 王维锦

水利电力出版社

中学基础知识补习丛书
数学复习与题解（上）
北京市海淀区教师进修学校主编
（根据电力工业出版社纸型重印）
*
水利电力出版社出版
（北京德胜门外六铺炕）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
机械工业出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 20.25印张 449千字
1981年1月第一版
1983年6月新一版 1983年6月北京第一次印刷
印数 000001--400000册 定价 1.70元
书号 7143·5223

《中学基础知识补习丛书》介绍

本丛书包括以下内容：

《数学复习与题解》(上、下册)，内容包括代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何五篇，每篇又分为若干章。各章均由复习指导、A组习题及详解、B组习题及详解，以及自我检查题和详解所组成。每篇之后还配有综合练习题及详解，以提高读者解综合题能力。全书之末附有总复习测验题与详解，供读者检查学习效果用。本书共精选了数学习题1000题并给出了详细解答，以便循序渐进地指导读者复习和巩固数学基础知识和基本技能、技巧，提高解题能力。

《物理复习与题解》，内容包括力学、热学、电磁学、光学和原子物理学各篇，每篇分若干章。每章首先是复习重点，简述本单元的基本知识要点，继之是解题方法指导，告诉读者解题的关键和基本的解题方法；随后是习题和解答。全书共精选了各种类型的习题约800题，用以使读者通过做题巩固基础知识和掌握解题技巧。每个单元之后有测验题，全书之末还有总复习测验题，可以帮助读者检查自学效果。

《化学复习与题解》，内容包括中学化学的基本概念、基本理论、元素及其重要的化合物、有机化合物、化学基本计算、基本实验技能等六章。本书各章均由基础知识的复习指导、习题及题解所组成。全书共精选了各种习题600题并给出了详细解答，以帮助读者全面复习和掌握中学化学基础知识和基本技能，提高分析和解决各类问题的能力，为学习科技知识打下牢固基础。书末还附有总复习测验题和解答，以便读者检查学习效果。

《语文复习与题解》，内容包括纠正错别字、词汇、语法和标点、修辞、逻辑、记叙文的写作、议论文的写作、文言文、文学常识等九个部分。本书的每一个单元是由基础知识、练习题和参考答案所组成。书末附录为总复习测验题及其参考答案和评分标准，供读者检查学习效果用。本书针对性强，循序渐进，文字通俗，适合读者自学。

《中学基础知识补习丛书》主要供青年工人和广大知识青年系统地复习中学数学、物理、化学和语文知识用，亦可供职工文化补习学校师生参考。

前　言

为了帮助广大青年工人和知识青年系统地、全面地复习和掌握中学数学的基础知识及训练基本技能，更好地适应生产建设的需要，我们根据《中学数学教学大纲》及现行新编中学数学教材编写了这本《数学复习与题解》。

为便于读者自学，本书在编写时除将解题所用的知识系统地列出外，还将书中习题全部解出，对某些较难的习题给出了思路指导，对一些有代表性的习题在解题后做了分析说明，以使读者能够循序渐进地巩固学习成果，掌握解题技巧和方法，并逐步培养出一定的解题能力。

为使读者获得较为满意的学习效果，建议按以下步骤学习本书：

一、先复习所列基础知识，达到能默记的程度再用以解题。

二、解题时，先自己想．如果作不出，再看解答，并尽量找出不会做的原因．做完后，要进一步想想从本题能学到什么。

三、循序渐进，先做A组题，总结一下收获，再做B组题；经过对一篇的复习和总结以后，再做综合题．甚至可以在复习完全书以后，再做各篇的综合题（因综合题所用到的知识、方法，不限于本篇）。

如上所述，本书编者虽力图为青年学习作出贡献，但限于水平和时间，缺点和不足之处一定不少。希望读者提出意

见或建议，以便逐渐修改完善。

本书原稿，承北京师范大学第二附属中学、北京铁路二中、华北电力学院、北京电力学校的领导和数学教研组有关同志大力支持，进行了认真审阅，提出不少宝贵意见，特此致谢。

北京市海淀区教师进修学校等

一九八〇年七月

目录

第二篇　平 面 三 角

第一篇　代　　数

第一章　数的概念、性质和运算

一、实　　数

1.自然数（正整数）：

自然数，即正整数，1、2、3、…。

任意一个自然数都可以用10的幂的多项式的形式表示，即$a_0\cdot10^n+a_1\cdot10^{n-1}+a_2\cdot10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot10+a_n$，其中$a_0$、$a_1$、$a_2$、…、$a_n$分别是0、1、2、…、9这十个数字中的一个，且$a_n\neq0$。

（1）质数与合数：在自然数中，除1以外只能被1和本身整除的数，叫质数（或素数）；能被1和本身以外的数整除的数，叫合数。

（2）因数、质因数、公约数、最大公约数：如果数A能被数B整除，则B叫A的因数（或约数）。如果C是A的因数，而且C是质数，则C叫A的质因数．几个数所公有的约数，叫这几个数的公约数．几个数的公约数中最大的一个，叫最大公约数．如果两个数的最大公约数是1，就称两个数是互质的数。

（3）倍数、公倍数、最小公倍数：如果数A能被数B整除，则A叫B的倍数．几个数所公有的倍数，叫这几个数的公倍数．公倍数中最小的一个，叫最小公倍数．

2.整数：

正整数、零、负整数总称为整数。

（1）有关整数的一些表示方法：

能被2整除的整数叫偶数，可用$2n$（n是整数）表示。不能被2整除的整数，叫奇数，可用$2n+1$（n是整数）表示。

按被3除所得的余数可以把整数分类，即$3n$、$3n+1$、$3n+2$（n是整数）。仿此，可以把整数按除以其他整数的余数进行分类。

连续的整数可以表示为n，$n+1$，$n+2$，…。

（2）有关整数的整除问题的定理：

若一个整数的个位数字是0、2、4、6或8，则这个数能被2整除。

若一个整数各个数位上的数字和能被3整除，则这个整数能被3整除。

若一个整数的末两位数是零或者是可被4整除，则这个数能被4整除。

若一个整数的个位数字是0或5，则这个数能被5整除。

若一个整数的奇位数字的和等于偶位数字的和或这两和数的差能被11整除，则这个数能被11整除。

m个连续整数中，必有一个能被m整除。

m个连续整数之积，能被$m!$整除。

几个整数都能被某一个数整除，则其和、差、积也能被这个数整除。

若一个整数能被几个互质的数整除，则它能被这些数的乘积整除。

3.有理数：

整数和分数总称为有理数。

任何有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$，其中p、q为整数，且$q \neq 0$。

有理数的和、差、积、商（除数不为0），仍是有理数。

若$\sqrt{a}$是有理数，则a是一个有理数的平方数。

4.无理数：

无限不循环小数叫无理数。

无理数不能表示成$\frac{p}{q}$（p、q为整数，$q \neq 0$）。

无理数$\neq$有理数。

若$a+b\sqrt{A}=0$（$\sqrt{A}$是无理数，a、b是有理数），则$a=0$且$b=0$。更一般地，若$a+bM=c+dM$（M是无理数，a、b、c、d是有理数），则$a=c$，且$b=d$。

5.实数：

有理数和无理数总称实数。

（1）数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线，叫数轴。

实数与数轴上的点存在一一对应关系。

（2）实数的绝对值：若a是实数，则$|a|$叫a的绝对值。

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时,} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

其几何意义是，a在数轴上所对应的点到原点的距离。

（3）常用的有关实数的性质：

①对于两个实数a、b，$a>b$、$a=b$、$a<b$的充要条件是$a-b>0$、$a-b=0$、$a-b<0$。

②（实数）$^2 \geqslant 0$。

③若$\sqrt{a}$为实数，则$a \geqslant 0$。

④若一元二次方程的根为实数，则其判别式$\Delta \geqslant 0$。

⑤实数具有连续性。

（4）实数的运算：

①运算顺序：加、减为一级运算，乘、除为二级运算，乘方、开方为三级运算。演算时先高级后低级。若有运算顺序符号（如（ ）、[ ]、{ }等），则括号由小到大逐步解脱。

②运算定律：a、b、c为实数，则

$a+b=b+a$ （加法交换律），

$(a+b)+c=a+(b+c)$ （加法结合律），

$ab=ba$ （乘法交换律），

$(ab)c=a(bc)$ （乘法结合律），

$(a+b)c=ac+bc$ （乘法对加法的分配律）。

例1. 求两个非互质的正整数，它们的和为667，又它们的最小公倍数被最大公约数除，所得的商为120。

解： 设所求二数为x、y，则$x+y=667$。

又设x、y的最大公约数为q，则$x=mq$，$y=nq$（m、n为互质正整数），且x、y的最小公倍数为mnq。

依题意，得

$$\begin{cases} mq+nq=667, \\ \dfrac{mnq}{q}=120. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} q(m+n)=667, \\ mn=120. \end{cases}$$

$$\because \quad q(m+n)=667=1\times 667=23\times 29=29\times 23$$
$$=667\times 1,$$

$\therefore$ q可能为1，23，29，667。

①$\because$ x、y不互质，$\therefore$ $q\neq 1$。

②当$q=23$时，$m+n=29$。与$mn=120$联立，解得：$m_1=5$，$n_1=24$；$m_2=24$,$n_2=5$。$\therefore x_1=m_1q=5\cdot 23=115$，$y_1=n_1q=24\times 23=552$；$x_2=552$，$y_2=115$。

③当$q=29$时，$m+n=23$。与$mn=120$联立，解得：$m_3=15$，$n_3=8$；$m_4=8$，$n_4=15$。$\therefore x_3=435$，$y_3=232$；$x_4=232$，$y_4=435$。

④当$q=667$时，$m+n=1$。与m、n都是正整数，则$m\geqslant 1$，$n\geqslant 1$，于是$m+n\geqslant 2$矛盾。$\therefore q=667$是不可能的。

$\therefore$所求的两个数分别为115，552或435，232。

说明：对于用字母表示的数，要能分别不同情况讨论。

例2. 求证：奇数平方减去1，能被8整除。

证明： 奇数可以表示为$2n+1$（n是整数）。

$\because (2n+1)^2-1=4n^2+4n=4n(n+1)$，$\therefore$它能被4整除。又$n$与$n+1$是两个连续的整数，其中必有一个偶数，因此$n(n+1)$能被2整除。$\therefore 4n(n+1)$能被8整除，即奇数的平方减去1，能被8整除。

说明：（1）对于"n"的使用应当很好掌握。如用$2n+1$表示奇数，用$(-1)^n$表示当n为奇（偶）数时为负（正）号，用$a_n=n^2-2$（n是自然数）表示数列的通项，等等。

（2）证明A能被B整除，无非证明A中含B为因式（数）。因此，基本方法是将A分解出含B的因式。对于有些较复杂的问题，也常采取先把A拆成两部分的和（或差），使其中一部分能被B整除，从而把问题转化成只研究另一部分能否被B整除。

例3. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是无理数。

证明： 设$\sqrt{3}+\sqrt{2}=m$是有理数，则$\sqrt{3}=m-\sqrt{2}$。于是，$3=m^2-2\sqrt{2}m+2$。$\therefore\sqrt{2}=\dfrac{m^2-1}{2m}$。

此式左边是无理数，右边是有理数。这是不可能的。

$\therefore\sqrt{3}+\sqrt{2}$是无理数。

说明：有关无理数的一些证明题，往往用到反证法。其步骤为：反设，推演，矛盾，结论。在无理数部分常反设所求证的无理数为$\dfrac{p}{q}$或m（p、q为互质的整数，m为有理数）。

例4. 解方程$|x-4|+|x+1|=5$。

解： 当$x<-1$时，原方程为$-(x-4)-(x+1)=5$。解得$x=-1$。考虑到前提是$x<-1$，所以这时方程无解。

当$-1\leqslant x<4$时，原方程为$-(x-4)+(x+1)=5$，即$5=5$。$\therefore x$可为任何实数。考虑到前提是$-1\leqslant x<4$，所以这时方程的解应为$-1\leqslant x<4$的一切实数。

当$x\geqslant 4$时，原方程为$(x-4)+(x+1)=5$。解得$x=4$。考虑到前提是$x\geqslant 4$，所以这时方程的解为$x=4$。

$\therefore$原方程的解为$-1\leqslant x\leqslant 4$的一切实数。

说明：解决任何问题，都应当首先明确方向。以本题为例，看到这一x在绝对值符号内的方程，首先应明确：关键在于合理地去掉绝对值的符号，以便转化为不带绝对值符号的方程来解。

本题中去掉绝对值符号的根据是绝对值的定义。此外，有时还可以使用公式$|a|^2=a^2$或绝对值的几何意义（如：$|x|<3\Longleftrightarrow-3<x<3$）把绝对值符号去掉。

当使用定义去掉绝对值符号时，需要分段进行讨论。如