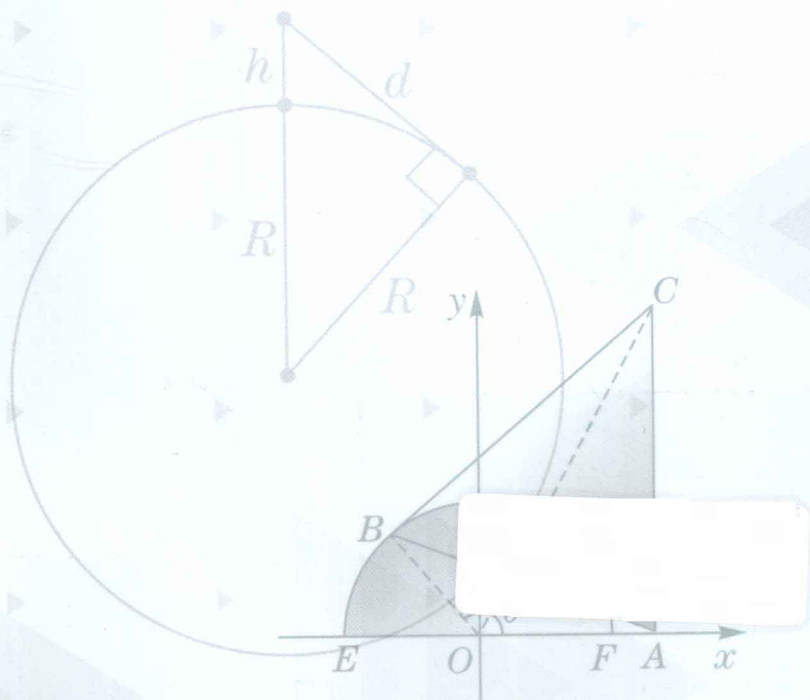


数学思想与数学文化

SHUXUE SIXIANG YU SHUXUE WENHUA

董毅主编

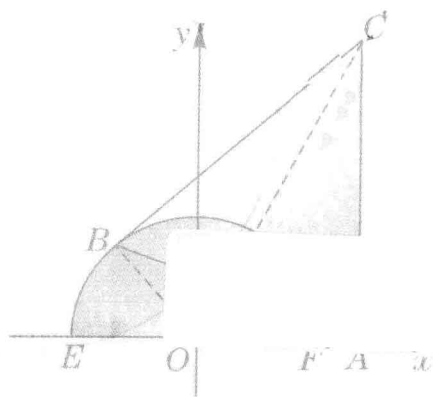


北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

数学思想与数学文化

SHUXUE SIXIANG YU SHUXUE WENHUA

董毅主编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想与数学文化/董毅主编. —合肥:安徽大学出版社,2012.9
ISBN 978-7-5664-0555-5

I. ①数… II. ①董… III. ①数学—研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 186339 号

数学思想与数学文化

董毅 主编

出版发行: 北京师范大学出版集团
安徽大学出版社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

经 销: 全国新华书店
印 刷: 合肥创新印务有限公司
开 本: 184mm×260mm
印 张: 18.75
字 数: 456 千字
版 次: 2012 年 9 月第 1 版
印 次: 2012 年 9 月第 1 次印刷
定 价: 35.00 元
ISBN 978-7-5664-0555-5

责任编辑: 武溪溪 蒋 芳
责任印制: 赵明炎

装帧设计: 李 军

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 0551-5106311

外埠邮购电话: 0551-5107716

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 0551-5106311

前 言

数学是思维的体操,也是辩证的辅助工具和表现方式。随着时代的进步,数学的应用越来越广,数学科学的思想、方法与内容已经渗透到人类生活的各个领域,科学技术以及社会科学的数学化已成为一种趋势。人类的现实生活需要数学,国家的发展、科学技术的进步更离不开数学。数学是任何人分析问题和解决问题的思想工具,数学素养已成为人才的重要素质。

数学是充满魅力与情趣的。但从中学到大学,学生对数学普遍缺乏兴趣。他们对数学敬而远之,望而生畏,讨厌数学、害怕数学。因此,面向全体学生,特别是新建本科院校文科学生,普及数学文化,展现数学魅力,凸显数学思想,激发数学兴趣,促进学生数学素养提升,十分必要。本书就是基于此而立项的公选课教材,也是蚌埠学院周之虎教授、董毅教授主持的高等数学省级教学团队建设项目的(项目编号:20101093)的举措之一。

本书具有如下特点:

第一,注重文化性:作为文化课程而不是数学课程,重在普及数学文化;

第二,注重思想性:凸显数学思想方法,特别是数学中的哲学思想;

第三,注重针对性:吸收了作者与很多专家的研究成果,适合新建地方本科院校学生基础与应用型专业人才培养目标;

第四,注重通俗性:不求系统全面,不求严格深入,但求通俗易懂;

第五,注重趣味性:展现数学魅力,激发数学兴趣;

第六,注意选择性:对不同专业大类学生,选择讲授或阅读,力求人人听懂,人人受益。

本书由董毅主编,周之虎教授主审。本书第六章由孙西超博士编写,其他章节由董毅编写。全书由董毅统稿、修改,周之虎教授审阅。

感谢蚌埠学院张裕生、陈德琥、李四保、胡飞四位副教授和张浩硕士分别阅读了部分书稿并提出了不少有益的建议;感谢蚌埠学院韦立群硕士所做的校对工作;感谢出版社同志的辛勤工作。由于我们水平所限,拙作的缺点和不当之处在所难免,恳请读者、专家学者批评指正。

编者

2012年5月20日

目 录

第一章 绪 论	(1)
第一节 数学是重要的工具与方法	(1)
第二节 数学是科学与技术的基础	(4)
第三节 数学推动社会发展的重要作用	(6)
第四节 数学思想文化的展现	(8)
第二章 数学艺术的魅力	(14)
第一节 数学符号的艺术	(14)
第二节 数学猜想的艺术	(22)
第三节 数学抽象的艺术	(35)
第四节 数学美的赏析	(40)
第三章 数学与生活	(55)
第一节 生活中的数字	(55)
第二节 俗语与数学	(62)
第三节 游戏里的数学	(64)
第四节 生活中的数学	(70)
第五节 历史故事与数学思想方法	(80)
第四章 数学与文学	(84)
第一节 数学与文学的联系	(84)
第二节 精通数学与文学的大家	(94)
第三节 小说中的数学	(99)
第四节 诗歌与对联中的数学	(106)
第五节 文学中的数学思想方法	(122)
第五章 数学与艺术	(128)
第一节 数学与艺术的关系	(128)
第二节 精通数学与艺术的大家	(132)
第三节 数学与艺术形式的联系	(135)
第四节 数学与艺术的差异	(149)

第六章 数学与经济	(152)
第一节 数学与经济的不解之缘	(152)
第二节 精通数学的经济学家	(155)
第三节 经济学中的主要数学方法	(160)
第四节 数学与经济结合的精彩例子	(168)
第七章 数学与管理	(182)
第一节 数学与管理关系密切	(182)
第二节 数学与管理都运用模型	(188)
第三节 数学在管理领域中的应用	(193)
第四节 数学在交通管理中的应用举例	(199)
第八章 数学与哲学	(206)
第一节 数学与哲学结伴而行	(206)
第二节 精通数学的哲学家	(211)
第三节 数学对哲学的影响	(219)
第四节 哲学对数学的影响	(222)
第九章 数学中的哲学思想	(226)
第一节 研究数学中的哲学思想的意义	(226)
第二节 数学中的唯物辩证法思想	(228)
第三节 数学中常见矛盾内容的转化	(259)
第四节 数学思维和方法中的辩证法	(275)
第五节 数学思想方法的几次重大突破	(286)
第六节 运动观点在数学中的作用	(290)

第一章 绪 论

为什么要学习数学思想与数学文化？这是我们首先想了解的。这可以从数学的重要性说起。

第一节 数学是重要的工具与方法

一、数学是重要的工具

数学的重要性首先在于数学的工具性。数学是人们生活和生产的重要工具。这种工具的重要性主要体现在以下方面。

(一) 数学是科学的语言

1. 数学语言是表达数学思想的专门语言 数学语言可分为抽象性数学语言和直观性数学语言,包括数学概念、术语、符号、式子、图形等。数学语言又可归结为文字语言、符号语言、图形语言三类。各种形态的数学语言各有其优越性:概念定义严密,揭示本质属性;术语引入科学、自然,体系完整规范;符号表意简明,书写方便,且集中表达数学内容;式子将关系融于形式之中,有助运算,便于思考;图形表现直观,有助记忆与思维,有益于解决问题。

2. 数学语言具有抽象性、准确性、简约性和形式化等特点 数学是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具。数学作为一种科学语言,表现在它能以其特有的语言(概念、公式、法则、定理、方程、模型、理论等)对科学真理进行深刻、精确和简洁的表述。比如,英国著名的理论物理学家、数学家麦克斯韦(1831—1879)通过发现麦克斯韦方程组,预见了电磁波的存在,推断出电磁波速度等于光速,并断言光就是一种电磁波。这样,麦克斯韦创立了系统的电磁理论,把光、电、磁统一起来,实现了物理学上重大的理论结合和飞跃。再如,德国数学家黎曼(1826—1866)创造的黎曼几何和不变量理论,为爱因斯坦(1879—1955)发现相对论提供了绝妙的描述工具;边界值数学理论使20世纪二三十年代的远距离原子示波器的制成变为现实;矩阵理论为20世纪20年代德国理论物理和原子物理学家海森堡(1901—1976)和诺贝尔奖获得者英国理论物理学家狄拉克(1902—1984)引起的物理学革命奠定了基础。

有不少自然科学家、特别是理论物理学家都曾明确地强调了数学的语言功能。例如,17世纪初意大利哲学家和天文学家伽利略(1564—1642)就认为:“数学语言是解读宇宙语言的钥匙”;当代美国天文学家萨根(1934—1996)深信,宇宙中的技术文明无论差异多大,都有一种共同的语言——数学语言;丹麦著名物理学家玻尔(1885—1962)就曾指出:“数学不应该被看成以经验的积累为基础的一种特殊的知识分支,而应该被看成普通语言的一种精确化,这种精确化给普通语言补充了适当的工具来表示一些关系,对这些关系来说普通字句是不精确的或过于纠缠的”^[1];狄拉克也曾写道:“数学是特别适合于处理任何种类的抽象概念的

工具,在这个领域内,它的力量是没有限制的”^[2];中国数学家和语言学家周海中(1955—)在论文《宇宙语言:设计、发送与监听》中指出:“数学语言具有明确性、单义性、紧凑性、普遍性、抽象性、逻辑性等优点,是星际交流的理想工具。”^[3]

随着社会的数学化程度日益提高,数学语言已成为人类社会中交流和储存信息的重要手段。高等数学(如微积分等)的一些概念、语言正在越来越多地渗透到现代社会生活的各种信息系统中,而现代数学的一些新的概念(如算子、泛函、拓扑、张量、流形等)则开始大量涌现在科学技术文献中,日渐发展成为现代的科学语言。

(二)数学是思维的工具

数学是人们分析问题和解决问题的思维工具。数学思维的方法是解决问题的艺术^[4]。具体表现为以下几点。

1. 数学具有运用抽象思维去把握现实的能力 数学概念是以极度抽象的形式出现的。在现代数学中,“集合”、“结构”等概念,作为数学的研究对象,它们本身是一种思想的创造物。与此同时,数学的研究方法也是抽象的,这就是说数学命题的真理性不能建立在经验之上,而必须依赖于演绎证明。数学家像是生活在一个抽象的数学王国中,然而他们在数学王国的种种发现,即数学结构内部和各种结构之间的规律性的东西,最终还是现实的摹写。而数学应用于实际问题的研究,其关键还在于能建立一个较好的数学模型。建立数学模型的过程,是一个科学抽象的过程,即善于把问题中的次要因素、次要关系、次要过程先撇在一边,抽出主要因素、主要关系、主要过程,经过一个合理的简化步骤,找出所要研究的问题与某种数学结构的对应关系,使这个实际问题转化为数学问题。在一个较好的数学模型上展开数学的推导和计算,以形成对问题的认识、判断和预测。这就是运用抽象思维去把握现实的力量所在。

2. 数学赋予科学知识以逻辑的严密性和结论的可靠性 数学是使认识从感性阶段发展到理性阶段,并使理性认识进一步深化的重要手段。在数学中,每一个公式、定理都要严格地从逻辑上加以证明以后才能够确立。数学的推理步骤严格地遵守形式逻辑法则,以保证从前提到结论的推导过程中,每一个步骤都在逻辑上准确无误。所以当运用数学方法从已知的关系推求未知的关系时,所得结论有逻辑上的确定性和可靠性。数学的逻辑严密性还表现在它的公理化方法上。以理性认识的初级水平发展到更高级的水平,表现在一个理论系统还需要发展到抽象程度更高的公理化系统,通过数学公理化方法,找出最基本的概念、命题,作为逻辑的出发点,运用演绎理论论证各种派生的命题。牛顿所建立的力学系统则可看成自然科学中成功应用公理化方法的典型例子。

3. 数学是辩证的辅助工具和表现方式^[5] 这是恩格斯(1820—1895)对数学的认识功能的一个重要论断。数学中充满着辩证法,而且有自己特殊的表现方式,即用特殊的符号语言、简明的数学公式,明确地表达出各种辩证的关系和转化。如英国物理学家、数学家和哲学家牛顿(1643—1727)与德国哲学家、数学家莱布尼茨(1646—1716)发现的牛顿—莱布尼茨公式,描述了微分和积分两种运算之间的联系和相互转化;概率论和数理统计表现了事物的必然性与偶然性的内在关系^[6]。

4. 数学是思维的体操 这种思维操练,确实能够增强思维本领,提高科学抽象能力、逻辑推理能力和辩证思维能力。比如,英国的律师至今要在大学里学习许多数学知识,这不是

因为英国的律师学习数学对他的工作有何直接联系,而是律师们通过严格的数学训练,使之养成一种坚定不移而又客观公正的品质,有助于其在律师工作上取得成功。闻名于世的美国西点军校把高深的数学课程设立为必修基础课,使他们的学员经过严格的数学训练后,把数学特殊的思维活动和灵活的快速性活动结合起来,把数学的思维方法带到工作中去,为学员今后驰骋于疆场打好基础。他们所受到的数学训练和数学活动,那种铭刻于头脑的数学思想和方法,能长期在他们的生活和工作中发挥着重要作用,奠定了他们成功的基础。

二、数学是重要的思想方法

数学的思想方法体现着它作为一般方法论的特征和性质,是物质世界质与量的统一、内容与形式的统一的最有效的表现方式。这些表现方式主要有:提供数量分析和计算方法;提供推理方法;建立数学模型。

任何一种数学方法的具体运用,首先必须将研究对象数量化,进行数量分析、测量和计算。毛泽东(1893—1976)曾指出:“对情况和问题一定要注意到它们的数量方面,要有基本的数量的分析。任何质量都表现为一定的数量,没有数量也就没有质量。”^[7]

数学作为推理方法的作用是巨大的。特别是对由于技术条件限制暂时难以观测的感性经验以外的客观世界,推理更有其独到的功效。例如,正电子的预言就是由英国理论物理学家狄拉克根据逻辑推理而得出的,后来由宇宙射线观测实验证实了这一论断;牛顿将其最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》,是因为他发现新宇宙的思维方式是数学的思维方式;太阳系第八大行星——海王星的发现,是由英国数学家、天文学家亚当斯(1819—1892)和法国天文学家勒维烈(1811—1877)运用万有引力定律,通过复杂的数量分析和计算,在尚未观察到海王星的情况下推理并预见其存在的。

值得指出的是,数学模型方法作为对某种事物或现象中所包含的数量关系和空间形式所进行的数学概括、描述和抽象的基本方法,已经成为应用数学最本质的思想方法之一。模型这一概念在数学上已变得如此重要,以至于许多数学家都把数学看成“关于模型的科学”。英国数学家、哲学家怀特海(1861—1947)认为:“模式具有重要性的看法和文明一样古老……社会组织的结合力也依赖于行为模式的保持;文明的进步也侥幸地依赖于这些行为模式的变更。”^[8]他进一步指出:“数学对于理解模式和分析模式之间的关系,是最强有力的技术。”^[8]奥地利物理学家玻尔兹曼(1844—1906)认为:“模型,无论是物理的还是数学的,无论是几何的还是统计的,已经成为科学以思维能力理解客体和用语言描述客体的工具。”这一观点目前不仅流行于自然科学界,还遍布于社会科学界。为自然界和人类社会的各种现象或事物建立模型,是把握并预测自然界与人类社会变化与发展规律的必然趋势。在欧洲,在人文科学和社会科学中称为结构主义的运动,雄辩地论证了各种范围的人类行为与意识都以有形式的数学结构为基础。在美国,社会科学自夸有更坚实、定量的东西,这通常也是用数学模型来表示的。从模型的观点看,数学已经突破了量的确定性这一较狭义的范畴而获得了更广泛的意义。既然数学的研究对象已经不再局限于“量”而扩展为更广义的“模型”,那么,数学概念的本质也在发生嬗变。数学正成为一个动态的、变化的、泛化了的体系,其涵盖的科学对象也必然随之增加。数学在社会科学中的模型建构大都以结构分析为目标,即在高度简化与理想化的框架中去理解社会行为机制。在某些框架下,利用科学去预测与控制一个社会系统的一切变量的更高层次的目标已经实现。

数学的模型方法把数学的思想方法功能转化成科学研究的实际力量。数学中有一个分支叫应用数学,主要就是研究如何从实际问题中提炼数学模型。这是一个对研究对象进行具体分析、科学抽象和做出判断与预见的过程。如对客观事物的必然现象,人们用确定性模型去描述;对或然现象,人们建立了随机性模型去研究;对弗晰现象,人们建立了模糊数学模型去刻画;对各种突变现象,如地震、洪灾等,则可以由突变理论给出数学模型。

数学除了原理和计算以外,还提供了别具特色的思考方式,包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断以及运用符号的能力,这些都是普遍适用而且高效的思考方法。应用这些思考方式的经验构成了一种在当今这个时代日益重要的一种智力,它使人们能批判地阅读、识别谬误、探察偏见、估计风险、提出变通办法。学习数学能使我们获得一种不断更新知识的能力,能更好地了解我们生活在其中的这个充满信息的世界^[9]。

第二节 数学是科学与技术的基础

数学不仅是自然科学的基础,也是技术革命的基础,它已深入到社会科学,其应用范围深入而广泛。

一、数学是自然科学的基础

无论哪种流派的科学史,都不约而同地赋予“数学是一切自然科学之基础”的尊崇地位。一般说来,数学的对象可以包括客观现实中的任何形式和关系,正如伟大的科学家伽利略所说:“大自然,这部伟大的书,是用数学语言写成的。”^[10]回顾科学技术的发展历史就会发现,物理学、力学、天文学、化学、生物学等领域的许多重大发展无不与数学的支撑息息相关,数学为它们提供了描述大自然魅力的语言与探索大自然奥秘的工具。而且数学的发展常常在科学发现之前。比如,牛顿力学(特别是万有引力定律)依赖于微积分发现;爱因斯坦的相对论则与黎曼几何及其他数学的发展紧密相关,数学中的黎曼几何早在爱因斯坦发现相对论几十年以前,就为相对论准备了数学思想和方法。

法国最早的马克思主义理论家拉法格(1842—1911)在《忆马克思》中谈到,马克思(1818—1883)认为:“一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。”^[11]美籍匈牙利数学家冯·诺依曼(1903—1957)说:“数学方法渗透并支配着一切自然科学的‘理论’分支……它越来越成为衡量科学成就的主要标准。”^[12]德国哲学家康德(1724—1804)认为:“在任何特定的理论中,只有其中包含数学的部分才是真正的科学。”^[13]爱因斯坦在谈到数学时说:“数学之所以有高声誉,还有另一个理由,那就是数学给予精密自然科学以某种程度的可靠性,没有数学,这些科学是达不到这种可靠性的。”^[14]英国哲学家培根(1561—1626)说过:“数学是打开科学大门的钥匙。”^[15]德国数学家高斯(1777—1855)认为:“数学是科学的皇后。”

二、数学是技术革命的基础

数学不仅是自然科学的基础,也是重大技术革命的基础。例如,英国物理学家麦克斯韦概括了由实验建立起来的电磁现象规律,把这些规律表述为“方程的形式”,用纯粹数学的方法推导出可能存在着电磁波,并且这些电磁波应该以光速传播,并据此提出了光的电磁理

论。又如,20世纪最伟大的技术成就首推电子计算机的发明与应用,它改变了人们的日常生活,使人类进入了信息时代。在电子计算机的发明史上,里程碑式的人物——科学家图林(1912—1954)和冯·诺依曼都是数学家。现代电子计算机是数学与微电子技术相结合而诞生的。而网络的无限延伸,信息技术的数字化,是数学应用与作用的又一有力例证。再如,北京大学王选(1937—2006)院士发明的方正汉字激光照排系统,使印刷业发生了革命性变化,这与他擅长建立数学模型并利用数学模型解决计算机汉字信息处理技术的难题是分不开的。

不仅仅是电子计算机,从医学上的CT技术到中文印刷排版的自动化,从飞行器的模拟设计到指纹的识别,从石油地质勘探的数据处理到信息安全技术,在这些形形色色的技术革命的背后,数学都扮演着重要的角色。比如,第二次世界大战太平洋战场的关键时刻,由于采用数学方法破译日军密码,美国海军才能在舰只力量对比绝对劣势的情况下,赢得中途岛海战的胜利,歼灭日本联合舰队的主力,扭转了整个太平洋战局;石油勘探与生产普遍采用数学技术了解地层结构;数学处理能将人体各个方面的状况清晰地呈现出来,帮助医生有效了解病人;在“神舟六号”的研制过程中,数学起了不可替代的作用,尤其是在轨道测算、时间测算等方面。

数学在很多领域内是真正能解决问题的“一把锋利的剑”。因数学对当代人们的生产和生活所起的重要作用,美国国家研究委员会把数学、能源、材料等并列为必须优先发展的基础研究领域。物理学家伦琴(1845—1923)因发现了X射线而成为诺贝尔物理学奖的第一位获得者。当有人问这位卓越的实验物理学家需要什么样的修养时,他的回答是:“第一是数学,第二是数学,第三还是数学。”^[16]

三、数学深入到社会科学的各个领域

数学也已广泛深入到社会科学的各个领域,比如,用数学模型研究宏观经济与微观经济,用数学手段进行市场调查与预测,用数学理论进行风险分析和指导金融投资……如此种种。数学模型在发达国家已被广泛采用,在我国也开始受到重视。在经济、金融理论研究上,数学的地位更加特殊——诺贝尔经济学奖获得者中,数学家或有研究数学经历的经济学家占了相当大的比例,如1976年的得主美国经济学家弗里德曼(1912—2006),1978年的得主美国管理学家和社会科学家西蒙(1916—2001),1980年的得主美国经济学家克莱因(1920—),1981年的得主美国经济学家托宾(1918—2002),1982年的得主美国经济学家斯蒂格勒(1911—1991),1983年的得主法籍美国经济学家德布鲁(1927—2004),1984年的得主英国经济学家斯通(1913—1991)、1985年的得主意大利籍美国人莫迪利安尼(1918—2003)、1987年的得主美国人索洛(1924—)、1989年的得主挪威人哈维默(1911—1999)等,都是具有深厚数学基础的经济学家,有的就是数学家。

经济学的发展历经了数百年,每一次经济学取得的巨大突破都离不开数学思想的巨大推动作用。伴随数学的大发展,数学被越来越多的经济学家引入到经济研究中去。目前可以说,一部经济学论著如果没有严密的数学理论作为基础,是很难站得住脚的。

四、数学的应用深入而广泛

数学有最广泛的应用性。数学是各门学科的基础和工具。它为人们日常生活、生产以

及科学、技术、经济、管理、医药等诸多方面的工作提供方法和工具；它为各种创新提供数学思想、模型和方法。数学与哲学、经济、管理、语言学、文学、历史学等都有一定的关系。数学的高度抽象性决定了数学应用的广泛性。1959年5月，伟大的数学家华罗庚(1910—1985)在《人民日报》发表文章中指出：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，日用之繁，无处不用数学。”^[16]美国哈佛大学领衔教授格罗斯(1950—)说：“数学无处不在，就像生活的影子。”^[17]

随着科技进步与社会发展，数学越来越多地应用于各个领域，各个领域人才对数学的要求越来越高。

第三节 数学推动社会发展的重要作用

数学对社会发展的重要作用主要体现在数学是推动社会发展的重要力量，数学水平反映科学和经济发展水平，数学是一种重要文化。

一、数学是推动社会发展的重要力量

数学在推动经济社会可持续发展、实现科技进步等方面都有不可替代的作用。

(一)人类历史上有三次重大的社会进步都与数学密切相关

在人类社会的发展史上，有三次重大社会进步是与数学密切相关的^[18]。第一次是牛顿时代的科学革命。牛顿用几个最著名的数学公式去描绘万有引力、牛顿运动定律，创立微积分等，使数学在社会上取得重要地位，他也因此而成为18世纪思想启蒙运动的先驱者之一。第二次重大社会进步是生物学家达尔文(1809—1882)进化论和孟德尔(1822—1884)遗传规律的发现和发展，进化论促进高尔顿(1822—1911)发展了相关及回归的概念，遗传规律引发了数理统计的建立和发展。今天，统计数学已成为发展的重要工具。第三次重大社会进步是计算机的产生与发展，导致了人类社会的重大变化，人类已由过去的工业经济进入信息化时代和知识经济时代。美国数学史家克莱因(1849—1925)曾经说：“数学不仅是一种方法，一门艺术或一种语言，更主要的是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说；满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想；甚至可能以难以察觉到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程。”^[19]数学已经广泛地影响着人类的生活和思想。数学一直是形成现代文化的主要力量，同时又是这种文化极其重要的因素^[19]。

(二)数学广泛而深入地进入众多领域

随着数学本身，特别是电子计算机的不断发展，数学应用的实际领域日益扩大，使数学同时具有“科学与技术的两种品质”。“数学技术”这一术语的出现，标志着数学应用达到了新的水平。数学的飞速发展和更加广泛地应用于科学、技术、经济、管理等众多领域，纯粹数学与数学的应用在更高层次上结合，特别是在高新技术领域方面的进展层出不穷，甚至出乎人们的预料，展现出数学对社会发展的巨大推动作用。1992年，联合国科教文组织在里约热内卢郑重宣布：“2000年是世界数学家年”，并明确指出：“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙。”《里约热内卢宣言》给予数学如此厚爱，是因为数学是推动人类

进步的最重要的学科之一,数学素质已成为现代人在社会发展中极为重要的素质,对提高全人类的素质起着极其重要的作用^[18]。

(三)数学的发展带动了其他学科发展

数学的发展有力地带动了其他学科的发展,大大加速了人类文明史的进程。数学除了一切科学的基础和工具之外,更有着独特的思维教育和智力开发的作用。从1969年到1989年这21届的诺贝尔经济学获奖名单来看,经济学与数学就是在一种较高水平上联系起来的,没有数学思想的融入,经济学是很难有大的作为的。每一次经济学取得的巨大突破都离不开数学思想的巨大推动作用。伴随数学的大发展,数学被越来越多的经济学家引入到经济研究中去。目前可以说,一部经济学论著如果没有严密的数学理论作为基础,是很难站得住脚的。数学在经济学领域中的发展取得了空前的成果,也体现在所运用的数学知识的广度和深度上,产生了一些规范运用数学方法分析经济现象的学科,如计量经济学、数理经济学等。伴随着这两门学科的不断发展,归纳演绎的方法也被越来越多地作为一种重要的方法来进行经济现象的分析和经济理论的论证,从而使经济学的结论也变得越来越具有说服力。数学的观点和方法也常常被运用到经济学中去,现在比较普遍的有投入产出方法、最优化求解方法、矩阵的思想、数学规划理论、凸集理论、不动点理论、微分拓扑、代数拓扑等。经济学在发展,而其也必将吸收更多更广的数学方法与数学思想。

(四)数学素质成为人才的重要素质

人才是推动社会发展的重要力量,而数学素质是人才的重要素质的重要方面。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新特征,集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。良好的数学素质不仅是理工人才必须具备的,而且也是其他人才需要具备的。比如,当今在华尔街叱咤风云的许多人物,都曾出身数学专业。再如,大学校长是综合素质比较好的学者,我国不少大学的校长都是数学教授,这说明数学教育对人的综合素质的提高影响很大。所以,学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练,被称为“思想的体操”。

综上所述,数学的应用是多方面的、广泛的、深刻的,对社会发展起着普遍的、巨大的推动作用。

二、数学水平反映科学和经济发展的水平

科学技术的发展离不开数学已是不争的事实。美国著名的《戴维报告》指出:“很少有人知道,如此被人们称颂的新技术本质上是数学的高技术”^[9],道出了当代高新技术中凝结着数学含量的事实。克莱因说:“实际上,在现代经验科学中,能否接受数学方法已越来越成为该学科成功与否的主要判别标准。”^[16]由王梓坤(1929—)先生起草的《今日数学及其应用》课题中,特别强调了数学的贡献,他说:“数学的贡献在于对整个科学技术(尤其是高新技术)水平的推进与提高,对科技人才的培养和滋润,对经济建设的繁荣,对全体人民的科学思维与文化素质的哺育,这四方面的作用是极为巨大的,也是其他学科所不能全面比拟的。”^[16]

拿破仑(1769—1821)说:“一个国家只有数学蓬勃地发展,才能展现它国力的强大。数学的发展和至善和国家繁荣昌盛密切相关。”科学技术是第一生产力。在科学技术飞速发展的当今世界,对数学的需求将与日俱增。数学被使用的程度,往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。因此,世界各国对数学学科的发展和建设都非常重视。数

学学科的成就往往作为衡量一个学校,乃至一个国家科技水平与实力的重要指标。迄今为止,我国国家自然科学一等奖有相当比例为数学家所获得。很难设想,在一个低技术的国家,会产生高深的数学,而高技术的社会形态,必有与之相适应的数学水平。美国国家研究委员会所属的数学委员会在一份报告中,曾就数学科学对于经济竞争力的生死攸关性给出了六点说明,以说明数学在技术转移中的作用^[18]。

三、数学是一种重要文化

美国著名数学家、数学教育家、数学史家克莱因在《西方文化中的数学》^[20]前言中指出:“数学是西方文化中的一种主要的文化力量。”“数学决定了大部分哲学思想的内容和研究方法。”“在人类文明中,数学如果脱离了其丰富的文化基础,就会被简化成一系列的技巧,它的形象也就被完全歪曲了。”《西方文化中的数学》系统地阐述了各个不同历史时期数学与文学、绘画、哲学、宗教、美学、音乐等文化领域的内在联系,详细而透彻地说明了数学对西方文化、理性精神、现代人类思想的发展所产生的深刻影响,有力地证明了数学是人类文化的重要组成部分和不可缺少的重要力量。

人们把数学作为一种文化来研究,是因为文化的含意比科学更广泛。文化涵盖所有科学,而数学具备这种广泛的涵盖性,既表现在它的原创性方面,也表现在它的应用性方面,还在于它表现了一种前所未有的探索精神、创新精神,它的理性思维的功能发挥得淋漓尽致,它提供给人们的不仅仅是思维模式,同时又是一种有力的解决问题的工具和武器。“数学也是人类文化的一个影响全局的部分”^[21]。数学作为一种重要的社会文化,在推动社会进步、提高人类素质等方面具有其他学科无法替代的作用^[16]。“数学因其对塑造人的文化素质以及对形成正确的宇宙观的特有作用,国内外学界已普遍认识到数学是人类文化的重要组成部分。”^[22]有的数学家说:“数学在人类历史中的地位绝不亚于语言、艺术和宗教,今天数学正对科学和社会产生着翻天覆地的影响。”^[23]我国数学家齐民友(1930—)认为,数学作为一种文化,在过去和现在都大大地促进了人类的思想解放,人类无论是在物质生活上还是在精神生活上得益于数学的都实在太多,今后数学还会大大地促进人的思想解放,使人成为更完全、更丰富、更有力量的人。他指出:“历史已经证明,而且将继续证明,一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”他进而说:“没有现代的数学就不会有现代的文化。没有现代数学的文化是注定要衰落的。”^[24]

第四节 数学思想文化的展现

数学充满魅力与情趣,具有重要的文化价值。而展现数学思想文化,就必须激发数学兴趣,“走出”严密的数学。

一、数学思想文化的内涵

狭义的数学文化内涵指的是数学的思想、精神、方法、观点、语言,以及它们的形成和发展。广义的数学文化内涵是指数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分,以及数学与各种文化的关系。

数学的文化内涵主要包括以下五个方面。

(一) 数学的理性精神

这种理性精神的养成与发展有着特别重要的意义,它是人类文明、特别是西方文明的核心所在。

(二) 数学思想与方法

数学是人类抽象思维的产物,是一种理性化的思维范式和认识模式,它不仅仅是一些运算的规则和变换的技巧,它的实质内容是能够让人们终身受益的思想方法。因此,我们应该始终关注数学的这个本质特征,避免单纯追求数学学习的知识化倾向,注重能力、思维的培养,让学生终身受益。

(三) 数学中的美

数学美是一种具有新的美学维度的精神空间。正如英国著名数学家哲学家 1950 诺贝尔文学奖得主罗素(1872—1970)所说:“数学,不但拥有真理,而且有至高的美。”数学的美不像自然美、艺术美那么鲜明、亮丽而潇洒,甚至也不像其他社会美那么的直观和具体,它抽象、严谨、深沉、冷峻而含蓄,是一种理智的美。我们应该努力发掘数学的特有的理智美,引导学生去欣赏、体会数学的美,领会数学的美学价值,培养对美的鉴赏能力。

(四) 数学的应用价值

数学的文化意义不仅在于知识本身和它的内涵,还在于它的应用价值。因此,应该加强数学与实际生活的联系,增强数学的应用性,体会数学的应用价值,了解数学与社会发展的相互作用,让学生体验到数学的应用价值。

(五) 数学的历史文化

数学文化的内涵不仅表现在知识本身,还在于它的历史。数学的文化是人类在生存与发展中不断探索与创造出来的一种文化。挖掘蕴藏在数学之中的丰富的文化资源,让学生体验数学知识的形成过程、人文价值,寻找数学进步的历史轨迹,感受优秀文化的熏陶;深刻理解数学的本质,进而培养学生独特的创新精神,发展其理性思维,使学生获得终身受益的文化力量。

国内最早注意数学文化的学者是北京大学的教授孙小礼(1932—),她和邓东皋(1935—2007)等合编的《数学与文化》^[25],汇集了一些数学名家的有关论述,也记录了从自然辩证法研究的角度对数学文化的思考。后来出版的有齐民友的《数学与文化》^[26],主要从非欧几何产生的历史阐述数学的文化价值,特别指出了数学思维的文化意义。郑毓信(1944—)等出版的专著《数学文化学》^[27]的特点是用社会建构主义的哲学观强调“数学共同体”产生的文化效应。这些著作以及许多论文,都力图把数学从单纯的逻辑演绎推理的圈子中解放出来,重点是分析数学文明史,充分揭示数学的文化内涵,肯定数学作为文化存在的价值。

二、数学充满魅力与情趣

数学的魅力与情趣主要体现为以下五个方面。

(一) 数学历史悠久、内容丰富

数学是一门伟大的科学,它作为一门科学具有悠久的历史,有很多逸闻趣事,蕴含着富有启发的思想。

(二) 数学的应用广泛而深入

数学在不同领域的应用以及在日常生活中的应用无处不在,日益广泛,日益深入并更加重要。

(三) 数学与其他学科联系密切

数学与其他学科之间具有广泛而深刻的联系,相互之间共同促进,共同发展,从而对社会发展起着普遍的、巨大的推动作用。

(四) 数学的作用巨大

历史已经充分证明,数学不仅是一种工具,而是一种思维模式;不仅是一种知识,而是一种素养;不仅是一门科学,而是一种文化。数学是人类文化的重要组成部分和不可缺少的重要力量。

(五) 数学充满美

数学具有简洁美、和谐美、奇异美、突变美、对称美等,数学学习与研究可以是数学美的鉴赏过程,就像欣赏艺术品一样,在其过程中得到精神的愉悦。

但是,数学美并不像艺术美那么外显,以学生现有的知识水平和审美能力,很难体会出数学美的真正意蕴。这就要求我们必须深入挖掘教材的内涵,充分展示数学美的特征,才能唤起学生的审美情趣,引导他们体会数学美的独特品质,使得他们在美的体验之中获得知识,提高数学素养,促进学习兴趣由不稳定走向稳定,由低层次走向高层次。为此,我们需要挖掘数学的内涵,揭示数学的内在魅力,克服数学的枯燥无味与抽象难学,让学生陶醉、享受其中的神奇,激发数学兴趣,体会其中包含的数学思想方法。

三、展现数学思想文化的要求

展现数学思想文化有多方面要求。

(一) 必须激发数学兴趣

数学本是充满魅力与情趣的。但从中学到大学,学生对数学普遍缺乏兴趣。他们对数学敬而远之,望而生畏,讨厌数学,害怕数学。据调查表明^[28],学生对数学兴趣始终不高,初二、初三年级的数学被认为是最没兴趣的课程。随着年级的升高,学生对数学学科认知的兴趣不是增强,而是减退或停滞。大学生讨厌数学也很普遍。心理上抵触数学成为学习数学的天敌。学生对数学学科兴趣淡薄的主要原因,是教师忽视学生学习兴趣的培养或不能有效地激发学生兴趣。

兴趣是学好数学的重要因素。心理学的研究表明:兴趣是学习动机中最活跃、最现实的成分之一。学习兴趣可以产生高度集中的注意力和较为稳定的学习情感。对于感兴趣的事情,学生会有无限的热情和巨大的干劲,会想尽一切办法、克服一切困难去做。日本教育家木村久一(1883—1977)有句名言:“天才就是强烈的兴趣和顽强的入迷。”^[22]研究表明,数学家中58%承认自己学好数学的主要原因是兴趣。其中,有52%的人是从初中阶段开始对数学产生兴趣的,有29%的人是在小学对数学产生兴趣的,43%的人承认是某个重要的人(绝大多数是其老师)激发了他对数学的兴趣,23%的人是一件小事激发了自己对数学的兴趣,19%的人是由一道数学题激发了他对数学的兴趣。^[29]有趣的问题可以极大地调动

学习的积极性、主动性,而且可能改变学生对数学的态度,从对数学感到害怕、枯燥,转变到喜欢、爱好,甚至从此终生研究数学。江泽涵(1902—1994)在《数学中的智巧》翻译说明中指出:“要学好数学,必须喜爱数学”。^[30]

数学教师要激发学生学习数学的兴趣作为教学的首要任务。《数学课程标准》指出:“数学教学活动中,教师应激发学生学习数学的积极性,向学生提供充分从事数学活动的机会,帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得广泛的数学活动经验。”^[31]数学家 R. H. Bing 说:“数学教师不仅要传授事实与理解,还要讲出数学魅力和挑战的闪光。他应该引导他的学生们观看数学之美,给他们尝到支配数学家的兴趣的那种数学型的滋味,启发学生的想象力,并使他们愿意从事和渴望从事长期的艰苦工作,以获得对其具有挑战味的结果。”^[32]要使学生喜欢数学,教师要包装数学知识,采取合适的方式,引导学生欣赏数学之美、品味数学之趣、感受数学之妙、领略数学之奇,展现数学的魅力,激发学生对知识产生好奇、期盼与等待,让学生在数学学习中体验数学思考的乐趣和数学文化的魅力。

(二)必须“走出”严密的数学^[33]

增强学生学习数学的兴趣,必须走出数学是“绝对严密”的误区。“数学界历来以数学的绝对严格而自豪,断言数学的严格性是数学的生命,不容许有任何含糊不清”。^[34]传统数学教材的编制以学科为中心,强调系统性和严密性,仅仅选取定论性知识,而数学老师以其理性的分析、严密的逻辑诠释着数学的内涵。教师吸引学生走进数学,主要是要把抽象的概念具体化,深奥的思想形象化,枯燥的理论趣味化,陌生的内容生活化。但这样的处理很难非常准确,难以绝对严密。我们认为,数学教师不能有效激发学生兴趣的主要原因是一味追求数学的“严密性”,没有处理好数学的“严密性”与数学教学的“生动性”之间的矛盾。

数学是严密的,这也是数学的生命所在。但是我们认为,数学的严密性应有一个循序渐进的过程,在数学教育中更是这样,不能也不可能一步到位。第一,客观世界是无限发展的,人们对客观世界的认识也是逐步发展的。人们的认识过程是一个不断由相对真理向绝对真理逼近的过程,任何知识都有其条件性和历史性,严密也有其相对性,数学也不例外。比如, x 在小学表示一个量,在中学可以表示变量,在大学可以表示一个文字,其内涵是逐步发展的。又如,设在某变化过程中有两个变量 x 和 y ,如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值和它对应,那么就把 y 叫做 x 的函数, x 叫做自变量。这个定义只是反映了函数的本质特征。如果在刚接触函数时,一下子就给出映射(函数),虽然严谨性有保证,但是学生接受上的困难是可想而知的。再如,关于数学研究的对象,19世纪恩格斯论述为:“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系。”^[35]因而辞海中对数学的定义是:“数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学。”^[36]这种表述对直到18世纪末的数学来说是恰当的,但也不严格。第一,从当今数学发展的现状与趋势来看,数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系^[37]。第二,在即使不太严格的背景下展现数学,让学生喜欢数学,进而愿意努力研究数学并逐步严谨化,比一味追求绝对严谨而将学生吓在数学大门之外更策略。第三,那些“管用”但不严格的数学方法^[38]也有价值,牛顿发明的微积分,欧拉的大量数学发现,以及中国古代的数学成果,以现今的观点看,都是不严格的,但却无损于它们的历史光辉^[39]和应用价值。第四,数学的严谨性更多更重要的是其体