▶ 21世纪大学数学丛书

复变函数与积分变换

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORMS

王丽霞 主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

21 世纪大学数学丛书

复变函数与积分变换

主　编　王丽霞
编　者　（按姓氏笔画为序）
孙桂荣　余丽琴　沈启庆
黄志刚　蒋书敏

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

内 容 提 要

本书是根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程教学改革计划”的精神，并参照近年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见编写而成的. 主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换共8章.

本书在编排上，内容精炼、通俗易懂，突出基本概念和方法，定理证明简明扼要，力求与工程问题紧密结合. 每章后都配有本章小结、例题选讲、自测题、习题，题型丰富，便于读者复习巩固，检查掌握程度.

本书可作为高等院校相关专业的教材，也可供科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 王丽霞主编. —镇江：江苏大学出版社，2012. 8
ISBN 978-7-81130-358-2

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教材②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ. ①O174. 5②O177. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 181632 号

复变函数与积分变换
FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

主　　编/王丽霞
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press. ujs. edu. cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/扬中市印刷有限公司
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787 mm×960 mm　1/16
印　　张/13
字　　数/255 千字
版　　次/2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-358-2
定　　价/26. 00 元

前　　言

“复变函数与积分变换”课程是高等学校理工科多个专业学生的一门重要基础课，在自然科学和工程技术的许多领域有着广泛的应用．通过本课程的学习，学生能够掌握复变函数的基础理论和方法以及积分变换的性质与方法，为后续课程的学习奠定基础．

本书是在几所学校多年来讲授“复变函数与积分变换”课程的基础上，组织教学经验丰富的老师，结合理工科院校的专业特点，吸收同类教材的优点编写而成的．本书分为8章，其中前6章为复变函数的内容，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、保形映射；后2章为积分变换的内容，包括傅里叶变换、拉普拉斯变换．

参加本书编写工作的老师有：江苏科技大学沈启庆（第2，5章），苏州科技学院黄志刚（第4章）、孙桂荣（第6章），江苏大学王丽霞（第1，7章）、余丽琴（第3章）、蒋书敏（第8章）．

21世纪大学数学丛书编委会及其主任田立新教授，对本书的编写给予了高度的关注和指导；本书在编写过程中还得到了作者所在学校相关领导及江苏大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！还要感谢研究生蔡冰等，为本书的编写做了不少有益的工作．

由于编者水平有限，书中不妥与错误之处在所难免，欢迎读者提出宝贵意见．

编　者

2012年6月

目 录

1 复数与复变函数

复数,最早出现在16世纪,是数学家为了求一元二次、三次方程的根而提出来的.起初,很多大数学家不承认复数,在经历一个多世纪的怀疑之后,复数终于被接受了.在此基础上,19世纪又诞生了复变函数论.复变函数论被誉为19世纪最独特的创造,是抽象数学中最和谐的理论之一.复数使代数方程成为一个完美的理论.代数基本定理是整个数学中最重要的定理之一,而没有复数就没有代数基本定理.复数也是研究实分析的得力工具,计算积分、证明代数基本定理等等都要用到复数.复变函数的理论和方法,如今已被广泛应用于理论物理、流体力学、空气动力学、光谱检测、各类电子技术等方面.

本章首先介绍复数的概念、表示方法和复数的运算,然后介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续等概念,为进一步学习解析函数的理论和方法奠定基础.

1.1 复　　数

1.1.1 复数的概念

众所周知,在实数范围内,方程

$$x^2=-1$$

无解.为此,引进一个新数 i,称为虚数单位,并规定

$$\mathrm{i}^2=-1,$$

从而 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个根.在此基础上进一步引进复数的概念.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$(或 $z=x+y\mathrm{i}$)的表达式称为复数,其中 x,y 为两个任意实数,分别称为复数 z 的实部和虚部,记作

$$x=\mathrm{Re}\,z,\ y=\mathrm{Im}\,z.$$

当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,$z=x$ 为实数.因此,实数是复数的子集.但要注意的是,和实数不同,两个复数之间一般不能比较大小.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等，当且仅当实部 $x_1=x_2$，虚部 $y_1=y_2$；一个复数 z 等于 0，当且仅当它的实、虚部同时为 0.

实部相等且虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数，与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 特别地，实数的共轭复数是它本身.

1.1.2 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数，则 z_1，z_2 的加、减、乘、除运算定义如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),\tag{1.1}$$

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),\tag{1.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ (x_2^2+y_2^2\neq0).\tag{1.3}$$

不难验证，上述运算满足以下规律：

(1) 交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1z_2=z_2z_1$；

(2) 结合律　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

(3) 分配律　$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

并且还满足性质：

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq0)$；

(5) $\bar{\bar{z}}=z$；

(6) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2$；

(7) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\ z$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\ z$.

在计算 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 时，可以利用性质(6)，将分子分母同乘以 $\overline{z_2}$，即得式(1.3).

例 1.1　设 $z_1=3-4\mathrm{i}$，$z_2=-1+\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 及 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

例 1.2　设 z_1，z_2 是任意两个复数，证明：$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证　因为

$$\overline{\overline{z_1}z_2}=\overline{\overline{z_1}}\ \overline{z_2}=z_1\overline{z_2},$$

故由性质(6)，有

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

1.1.3 复数的几何表示

1. 复平面与复数的表示法

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，可由一对有序实数(x,y)唯一确定，从而在给定的直角坐标系下，就与平面上的点建立了一一对应的关系. 因此复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用该平面上坐标为(x,y)的点表示. 这是复数的一个常用表示法. 此时，称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或 z 平面. 从而复数与复平面上的点一一对应，在以后的叙述过程中，“复数 $z=x+\mathrm{i}y$”与“点 $x+\mathrm{i}y$”被认为具有相同的含义.

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还与以原点 O 为起点、以点 $P(x,y)$ 为终点的平面向量一一对应，因此，复数 z 也能用向量$\overrightarrow{OP}$表示（见图 1.1）. 这种表示法称为复数 z 的向量表示法. 向量的长度称为复数 z 的模或绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.4}$$

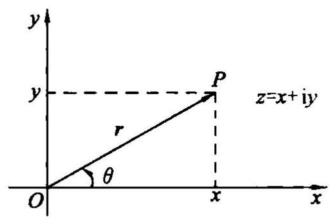

图 1.1

显然，

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$
$$z\bar{z}=|z|^2.$$

在 $z\neq0$ 的情况下，以正实轴为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角 θ 称为复数 z 的辐角，记作 $\mathrm{Arg}\,z=\theta$.

这时，有

$$\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\frac{y}{x}. \tag{1.5}$$

每一个 $z\neq0$ 都有无穷多个辐角，如果 θ_1 是其中的一个，则

$$\mathrm{Arg}\,z=\theta_1+2k\pi \quad (k\text{ 为任意整数}) \tag{1.6}$$

就给出了全部辐角. 在 $z(\neq0)$的辐角中，满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 称为辐角的主值，记作 $\arg z$. 当 $z=0$ 时，$|z|=0$，辐角无意义.

辐角的主值 $\arg z(z\neq0)$与反正切的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$有如下关系：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y>0 \text{ 时},\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y<0 \text{ 时},\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0, y\geqslant 0 \text{ 时},\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0, y<0 \text{ 时},\end{cases} \tag{1.7}$$

其中，$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

由复数的运算可知，两个复数的加、减运算与相应向量的加、减运算一致，可用平行四边形法则或三角形法则来表示(见图 1.2). 易见，$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与 z_2 之间的距离. 结合图 1.2，由三角形两边之和不小于第三边，得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \ (\text{三角不等式}), \tag{1.8}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1.9}$$

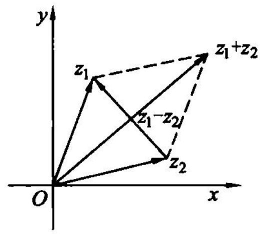

图 1.2

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置关于实轴对称，故有$|z|=|\bar{z}|$. 如果 z 不在负实轴和原点上，还有$\arg z=-\arg\bar{z}$.

利用直角坐标系与极坐标的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

还可以把 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示成下面的形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.10}$$

这个式子称为复数 z 的三角表示式.

利用欧拉(Euler)公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，又可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1.11}$$

此式称为复数 z 的指数表示式.

例 1.3 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

(1) $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$.

解 (1) $r=|z|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$，$z$ 在第一象限，因此

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3},$$

则 z 的三角表示式为

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

z 的指数表示式为

$$z=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

(2) $r=|z|=1$，又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi,$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi,$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi.$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

例 1.4 将通过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程表示.

解 通过两点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}$$

其中，$-\infty<t<+\infty$.

因此，它的复数形式的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1)\ (-\infty<t<+\infty),$$

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时即表示从 z_1 到 z_2 的直线段. 取 $t=\dfrac{1}{2}$得线段$\overline{z_1z_2}$的中点为

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 1.5 求下列方程表示的曲线：

(1) $|z-\mathrm{i}|=1$；

(2) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$；

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程$|z-\mathrm{i}|=1$ 在几何上表示，所有与点 i 距离为 1 的点的轨迹，即中心为 i、半径为 1 的圆. 下面用代数方法来验证.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，方程变为

$$|x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}|=1.$$

即

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

(2) 方程$|z+i|=|z-i|$在几何上表示，到点 i 与 $-i$ 等距离的点的轨迹，即两点 i 与 $-i$ 的垂直平分线. 读者可以将它化为直角坐标方程进行验证.

(3) 设 $z=x+iy$，方程变为

$$i+\bar{z}=x+(1-y)i,$$

所以

$$\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y.$$

可得所求曲线方程为 $y=-3$，即为一条平行于 x 轴的直线.

2. 复球面与无穷远点

复数不仅可以用平面上的点表示，也可以用球面上的点表示.

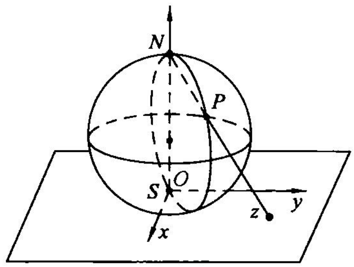

图 1.3

取一球面与复平面相切于坐标原点 O，球面上一点 S 与原点 O 重合(见图 1.3)，过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N，这里 N,S 分别称为北极与南极.

对于复平面上的任一点 z，如果用一直线段连接点 z 与北极 N，则该线段与球面必有唯一的异于 N 的交点 P；反之，对于球面上异于 N 的任一点 P，直线段 NP 的延长线也必然与复平面有唯一的交点 z. 这样，复平面上的点与球面上除 N 外的点建立了一一对应的关系. 因此，可以用球面上的点 P 表示复数 z，此称为复数的球面表示.

显然，复平面上的任何一个有限点都不可能与球面上的北极点 N 对应. 而当球面上的点 P 逐渐接近于北极点 N 时，复平面上相应的点 z 便逐渐远离点 O. 作为极限情形，规定与北极点 N 对应的是复平面上的“无穷远点”，它所代表的复数被称为“无穷大”，记作∞. 这样，球面上每一点，都有一个唯一的复数与之对应，这样的球面称为复球面.

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面，不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，简称复平面. 以后如无特别说明，本书所指“平面”一般仍指有限平面，“点”仍指有限平面上的点.

复数∞的实部、虚部、辐角都无意义，而约定$|\infty|=+\infty$. 对于每一个有限复数 z，有$|z|<+\infty$.

为了今后使用方便，规定∞的运算如下：

加法 $z+\infty=\infty+z=\infty\ (z\neq\infty)$；

减法 $z-\infty=\infty-z=\infty\ (z\neq\infty)$；

乘法 $z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty\ (z\neq 0)$；

除法 $\dfrac{z}{\infty}=0\ (z\neq\infty)$，$\dfrac{\infty}{z}=\infty\ (z\neq\infty)$，$\dfrac{z}{0}=\infty\ (z\neq 0$，但可为$\infty)$.

注意$\infty \pm \infty$,$0 \cdot \infty$,$\frac{0}{0}$以及$\frac{\infty}{\infty}$均没有意义.

1.1.4 复数的乘幂与方根

复数的乘除运算,采用三角式或指数式往往比代数式更方便.若有两个复数

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则有乘积

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.12}$$

商

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \quad (z_2 \neq 0). \tag{1.13}$$

于是

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0), \tag{1.14}$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2, \quad \mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2. \tag{1.15}$$

公式(1.14)表明:两个复数乘积的模等于它们模的乘积;两个复数商的模等于它们模的商.

公式(1.15)表明:两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和;两个复数商的辐角等于它们辐角的差.注意到辐角的多值性,上面关于辐角的等式应该理解为集合的相等.也就是说,对于等式左端的任意值,等式右端必有一值和它相等,反之亦然.

由此可见复数乘法的几何意义:表示复数乘积 $z_1 z_2$ 的向量,是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}\,z_2$,并伸长(或缩短)$|z_2|$倍得到的.特别当$|z_2|=1$时,乘法运算就相当于只旋转.例如 $\mathrm{i}z$ 就相当于将 z 所对应的向量逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$,$-z$ 相当于将 z 所对应的向量逆时针旋转 π.而当 $\mathrm{Arg}\,z_2=0$ 时,乘法运算就变成了仅仅是伸长(或缩短).

作为乘积的特例,下面考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n.它是 n 个相同因子的乘积,设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.16}$$

如果定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$,可证上式当 n 为负整数时也成立.

特别地,当$|z|=1$时,上述公式成为

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.17}$$

此公式称为棣莫弗(De Moivre)公式.

利用公式(1.16)可求方程 $w^n=z$ 的根 w,其中 z 为已知非零复数,称满足方程$w^n=z$ 的解 w 为 z 的 n 次根,记为 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$.

为求根 w,令

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$

则有

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n=r,\quad \cos n\varphi=\cos\theta,\quad \sin n\varphi=\sin\theta.$$

由后两式,得

$$n\varphi=\theta+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

从而有

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 是算术根,所以

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right). \tag{1.18}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到方程 $w^n=z$ 的 n 个相异的根. 在几何上,这 n 个根表示以原点为中心、$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点. 当 k 取其他整数值时,方程 $w^n=z$ 的根必与这 n 个根中的某个根相同.

例 1.6 计算 $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值.

解 先将括号中的复数化成三角表示式

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

于是

$$\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

根据幂的计算公式,得

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}=\cos\frac{20\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{20\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 1.7 求方程 $w^3=-1+\mathrm{i}$ 的 3 个单根.

解 因为
$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
所以
$$\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right]\quad(k=0,1,2).$$
即方程的 3 个单根分别为
$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$
这 3 个根,恰好是以原点为圆心,半径为$\sqrt[6]{2}$的圆的内接正三角形的 3 个顶点.

1.2 区 域

同实变函数一样,本节学习平面点集的一些基本概念,有所不同的是,这里的平面为复平面.

1.2.1 区域的概念

邻域 复平面上以一点 z_0 为中心,任意正数 δ 为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域,而称满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点集为 z_0 的去心邻域.

设实数 $M>0$,满足不等式 $|z|>M$ 的点集称为无穷远点的邻域,它是圆周 $|z|=M$ 外部所有点的集合(包括无穷远点本身).满足不等式 $M<|z|<+\infty$ 的点集称为无穷远点的去心邻域,它是圆周 $|z|=M$ 外部所有点的集合(不包含无穷远点本身).

开集 设 G 为一平面点集,z_0 为 G 内任一点.如果存在 z_0 的一个邻域,使得该邻域内的所有点都属于 G,则称 z_0 为 G 的内点.如果 G 内的每个点都是 G 的内点,则称 G 为开集.

区域 平面点集 D 称为一个区域,它须满足下列两个条件:

(1) D 是一个开集;

(2) D 是连通的,即 D 中任何两点都可以用一条完全属于 D 的折线连接起来.