中学复习资料

数学

SHUXUE

上

安徽省教育局教材编审室编

安徽人民出版社

目　　录

第一部分　代数

第二部分　平面几何

第三部分　立体几何

第一部分 代 数

第一章 实 数

复 习 要 点

一 实数

1.实数的系统

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数。}\end{cases}$$

2.实数与数轴

规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。任何实数都可以用数轴上的一个点来表示；数轴上任何一点都表示一个实数。实数和数轴上的点是一一对应的。

3.实数的绝对值

数轴上原点的两旁与原点距离相等的两个点所表示的两个

数，叫做互为相反数。如 $+3.5$ 是 -3.5 的相反数；$-\pi$ 是 π 的相反数；零的相反数仍是零。

数轴上表示一个数的点，离开原点的距离叫做这个数的绝对值。正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。实数 a 的绝对值记作 $|a|$。即

$$|a|=\begin{cases}a, (a\geqslant 0)\\ -a。(a<0)\end{cases}$$

4.实数的大小比较

数轴上两个点表示的两个实数，在右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大。

(1) 正数都大于零和负数，负数都小于零。

(2) 两个正数，绝对值大的较大。

(3) 两个负数，绝对值大的反而小。如 $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{6}$。

二 实数的运算

1.加法

(1) 法则 同号两数相加，和取相同的符号，并把它们的绝对值相加；异号两数相加，和的符号取绝对值大的加数的符号，和的绝对值等于绝对值大的减去绝对值小的。

(2) 运算律 交换律 $a+b=b+a$；

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

2.减法

(1) 法则 减去一个数等于加上这个数的相反数。

(2) 代数和 由减法法则，减法可归结为加法，所以任何一个加减法的混合算式，都可以写成正负数相加的形式，叫做代数和。

在一个代数和中，只有一种加法运算，为了书写简便，加

号可省略不写。例如

$$(+20)-2.5-\left(-3\frac{1}{4}\right)-7=(+20)+(-2.5)+\left(3\frac{1}{4}\right)$$

$$+(-7)=20-2.5+3\frac{1}{4}-7。$$

化成省略加号的代数和时，要注意符号法则：

$$+(\pm a)=\pm a, \qquad -(\pm a)=\mp a。$$

例如

$$(-3)-(-6)+(+2)-(+13)=-3+6+2-13。$$

3.乘法

(1) 法则　同号两数相乘，积取正号，并把绝对值相乘；异号两数相乘，积取负号，并把绝对值相乘。零乘以任何数，积仍为零。

(2) 运算律　交换律　$ab=ba$；

结合律　$(ab)c=a(bc)$；

分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

4.除法

法则　同号两数相除，商取正号，并把绝对值相除。异号两数相除，商取负号，并把绝对值相除。

零除以一个不为零的数，商为零。零不能做除数。

5.乘方　求相同因数的积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂，相同因数的个数叫做指数，相同的因数叫做底数。

法则　正数的任何次幂都是正数；负数的偶次幂是一个正数，奇次幂是一个负数。

零的任何次幂都是零。

6.开方　实数 a 开 n 次方，就是求一个数 x 使它的 n 次幂等于 a。x 叫做 a 的 n 次方根。a 叫做被开方数，n 叫做根指数。开方与乘方互为逆运算。

求一个数的平方根的运算叫做开平方，

求一个数的立方根的运算叫做开立方。

(1) 方根的性质

在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数。正数的偶次方根是互为相反数的两个数。因为任何实数的偶次方都不可能是负数，所以在实数范围内负数不能开偶次方。

(2) 算术根　正数的正的方根叫做算术根。零的算术根是零，因此，在 $a\geqslant 0$ 时，符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示算术根。当n是偶数时，

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

7.实数的运算顺序

在加、减、乘、除、乘方、开方六种运算中，加减是第一级运算，乘除是第二级运算，乘方和开方是第三级运算。在运算时，要注意：

(1) 一个算式里如果有括号，先算括号里面；

(2) 一个算式里如果同时有三级运算，就先算第三级，再算第二级，最后算第一级；

(3) 一个算式里只有同级运算，就依次计算；

(4) 为了简化运算，可以根据运算律改变上面的运算顺序。改变顺序可能涉及添括号、去括号。添、去括号的法则是：

添上或去掉前面带“+”号的括号时，括号里各项的符号不变；添上或去掉前面带“-”号的括号时，括号里的各项都要改变符号。

例　题

例1　计算：$\left(3\frac{1}{3}\right)^2+\left|(-6.5)\div\frac{13}{4}\right|$

$+(-2)^4\div[(-2)^3+2]+\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times(-1)^{15}-2^4\right]$。

解 $原式=\dfrac{100}{9}+\left|-\dfrac{13}{2}\times\dfrac{4}{13}\right|+16\div(-8+2)$

$$+\left(-\frac{4}{9}-16\right)$$

$$=11\frac{1}{9}+2-2\frac{6}{9}-\frac{4}{9}-16$$

$$=-6。$$

例2 计算 $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

解 $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

解这类问题要正确理解算术根的概念，因为$\sqrt{2}<\sqrt{3}$，所以$\sqrt{2}-\sqrt{3}$是一负数。因此，原式不应等于$\sqrt{2}-\sqrt{3}$。

例3 化简 $|m+1|-|2m-4|-|-2|$。

分析 解此类题目，关键在于能正确地去掉绝对值符号，化为不带绝对值的代数式。解题时，可把实数集合按题中各个绝对值号内式子的根，由小到大的顺序进行分段，然后逐段讨论。

解 当$m<-1$时，$m+1<0$，$2m-4<0$，

∴ $原式=-(m+1)-[-(2m-4)]-2=m-7$；

当$-1\leqslant m<2$时，$m+1\geqslant0$，$2m-4<0$，

∴ $原式=(m+1)-[-(2m-4)]-2=3m-5$；

当$m\geqslant2$时，$m+1>0$，$2m+4\geqslant0$，

∴ $原式=(m+1)-(2m-4)-2=3-m$。

例4 证明$\sqrt{2}$不是有理数。

证 用反证法。

假定$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可以表示成$\dfrac{p}{q}$，其中p、q

是自然数，且 p、q 互质。由此，可以推得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

即 $$\frac{p^2}{q^2} = 2,$$

∴ $$p^2 = 2q^2。$$

即 p^2 是偶数，从而 p 也是偶数，设 $p = 2r$（r是自然数），那么

$$(2r)^2 = 2q^2,$$

即 $$q^2 = 2r^2。$$

可见 q 也是偶数。

这样，p、q 都是偶数，与 p、q 互质的假定相矛盾。

因此，$\sqrt{2}$不是有理数。

在研究有理数性质时，通常可把一有理数记作既约分数$\frac{p}{q}$的形式。

习 题 A

1.有理数包括哪些数？正有理数包括哪些数？负有理数包括那些数？整数包括哪些数？分数包括哪些数？

2.指出下列各数哪些是自然数、整数、有理数、无理数、实数？并按从小到大的顺序排列起来：

0, -1, $7\frac{1}{3}$, 0.3, $\sqrt{5}$, π, 4.52, 9, $\sqrt[3]{-18}$。

3.用不等式表示 x 的范围：

x 是正数；x 是负数；x 是非负数。

4.如果一个数的倒数比它大，这个数该是什么数？如果比它小，它又是什么数？如果和它相等，它又是什么数？

5.写出：

（1）两个在$-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{3}$间的分数；

（2）一个在$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$间的无理数；

（3）从小到大，绝对值不小于2而又不大于4的整数。

6.回答下列问题：

（1）$-a$一定是负数吗？

（2）$2a$与$3a$哪个大？

（3）在什么条件下，$\frac{b}{a}$是正数？负数？零？大于1？没有意义？

（4）a是什么数时，$\frac{a-1}{2}$的值是自然数？整数？无理数？实数？

（5）两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗？举例说明。

（6）绝对值等于a的数是什么？

7.如果$|m|<3$，而且m是整数，求m的值，并将结果表示在数轴上。

8.x为何值时，$\frac{|x|}{x}$的值是1？是-1？不存在？

9.回答下列问题：

（1）如果$|m|=|n|$，能断定$m=n$吗？

（2）如果$|m|>|n|$，能断定$m>n$吗？

（3）如果$|m|<|n|$，能断定$m<n$吗？

10.计算：

（1）$\sqrt{(-3)^2}$；　　（2）$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$；

（3）$\sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3}$；　　（4）$|2x-3|$。

11.计算：

(1) $-1\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2.5)\div0.25\times\frac{2}{5}\times2\frac{1}{3}$

$+\left(-\frac{6}{7}\right)$;

(2) $[0-(-5)^3]\times(-2)$

$-9000\div\left[\left(-2\frac{1}{4}\right)\div\left(-9.75\right)\right]^2$;

(3) $\left\{2\frac{3}{16}-\left[4-\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\times35\right]\div0.16\right\}$

$\times\left(2\frac{28}{84}-1\frac{48}{60}\right)$;

(4) $-3^2\times(1.2)^2\div(-0.3)^3$

$+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\times(-3)^3\div(-1)^{25}$;

(5) $|3-5|-|(-3)-(-5)|+|(-243)+(-357)|$;

(6) $(-3)^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$。

习 题 B

1.下列各数，哪些是有理数？哪些是无理数？

(1) $\sqrt{\frac{2318}{9}}$; (2) 3.14; (3) $2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$;

(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (5) $-\log_2 3$.

2.$2\sqrt{3}$是否是实数？是否是偶数？试说明理由。

3.无理数都是无限小数，这句话对吗？无限小数都是无理数，这句话对吗？

4.在数3427□的□位置上，应填上哪几个一位的数字，才能使这个数是

(1) 2 的倍数； (2) 3 的倍数；

(3) 5 的倍数； (4) 11的倍数。

5.不等式$x+y<x-y$，什么时候能成立？什么时候不能成立？

6.已知$|a|=1$，$|b|=3$，求$a+b$的值。

7.化简：

(1) $|a+|a||$；

(2) $2a-|a-3|-|a+3|$；

(3) $|1-a|+|2a+1|+|a|$。$(a<-2)$

8.(1) 当$a<-3$时，$\sqrt{(a+3)^2}=?$

(2) a为何值时，$\sqrt{(a-3)^2}=a-3$?

(3) a为任意实数时，$\sqrt{(a+1)^2}=?$ $\sqrt{(1+a^2)^2}=?$

9.讨论下列两数的大小：（说明理由）

(1) $\frac{1}{2}a$和a； (2) $-a$和$|a|$；

(3) $2-|a-3|$和2； (4) $|a|+|b|$和$|a+b|$；

(5) $|a|\cdot|b|$和$|ab|$； (6) $|a-b|$和$|a|-|b|$。

10.如果a、b是自然数，那么下列各方程在什么数范围内恒有解？

$ax=b$， $\frac{x}{a}=b$， $x+a=b$， $x-a=b$， $ax^2=b$。

11.(1) 证明：两有理数的和、差、积、商是有理数；

(2) 证明：一个有理数与无理数的和、差、积、商为无理数。

12.证明任意两个有理数之间一定能插入另一个有理数。

13.求证：$a+b\sqrt{2}$形式的数（其中a、b都是有理数），经过加、减、乘、除以后，仍得这种形式的数（相除时除数中的a、b不能同时等于零）。

第二章　代数式

复习要点

一　一般概念

1.代数式　用代数运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数字或字母表示的数连接起来的式子叫做代数式。

2.代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{根式(无理式)}\end{cases}$$

有理式　只含加、减、乘(包括乘方)、除四种运算的代数式叫做有理式。除式中不含字母的有理式叫做整式(单项式、多项式*)，除式中含有字母的有理式叫做分式(分母不能为零)。不含加减运算的整式叫单项式，一个单项式里，数字因数叫做字母因数的系数；一个单项式里所有字母的指数和叫做这个单项式的次数。几个单项式的代数和叫做多项式。其中每一个单项式叫做这个多项式的项。次数最高项的次数叫做这个多项式的次数。

---

* 多项式的意义，有的书上和整式一样，不加区分，把单项式看作是多项式的特殊情形。

根式（无理式）* 当$\sqrt[n]{a}$有意义时，式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式。当n是奇数时，a可以是任何实数；当n为偶数时，a可以是任何正实数或零。

二 整式运算

1.整式的加减法

同类项 所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式，叫做同类项。

合并同类项 把同类项的系数相加，所得的和作为字母因数的系数，而字母因数和字母的指数不变，叫做合并同类项。

整式的加减法则 把各整式用加、减号连接起来，去括号后合并同类项。

2.整式的乘法

同底数幂的运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；（m、n 都是正整数）

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$；（m、n 都是正整数）

$(ab)^n = a^n b^n$。（n 是正整数）

单项式乘以单项式 把它们的系数的积作为积的系数，把相同字母的指数和作为积里这个字母的指数，单独的字母连同它的指数写到积里。

单项式乘以多项式，把单项式同多项式的每一项相乘，再把所得的积相加。

多项式乘以多项式 把一个多项式的各项和另一个多项式的各项相乘，再把所得的积相加。

乘法公式

* 无理式的意义，有的书上和根式一样，不加区分。也有把无理式专指最简根式的。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3。$$

3.整式的除法

同底数幂相除 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。(m、n 都是正整数，$m>n$，$a\neq 0$)

$$a^m\div a^m=1。$$

单项式除以单项式 系数相除，同底数幂相减。

多项式除以单项式 用单项式(除式)分别除多项式（被除式）各项。

多项式除以多项式

(1) 设 $A(x)$是被除式，$B(x)$是除式，$Q(x)$是商式，$R(x)$是余式。则

$$A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)。$$

当 $R(x)=0$ 时，$A(x)$能被 $B(x)$整除，商为 $Q(x)$。

(2) 多项式除以多项式（被除式和除式含有同一字母 x 的情形）

把被除式和除式都依 x 的降幂排列（把含有字母 x 的多项式的各项，按照 x 的次数从高到低排列），除式写在被除式右边，用一稍长竖线隔开，在除式下面划一横线，把商写在横线下面。计算时，用除式的最高次项除被除式的最高次项，将所得结果写在横线下面，得商式的第一项，用商式的第一项乘除式，把结果写在被除式下面，各同类项对齐，相减得第一余式；再用除式的最高次项除第一余式的最高次项，得商的第二项，用这项乘除式各项，将结果写在第一余式下面，同类项对齐，相减得第二余式；依此类推，直到余式的次数低于除式为止（具体做法见例5）。

例　题

例1　化简 $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]+2$；当 $x=-\frac{2}{5}$ 时，求这个代数式的值。

解　原式 $=3x^2-[7x-4x+3-2x^2]+2$

$$=3x^2-[3x+3-2x^2]+2$$

$$=3x^2-3x-3+2x^2+2$$

$$=5x^2-3x-1；$$

当　$x=-\frac{2}{5}$ 时，

原式 $=5\left(-\frac{2}{5}\right)^2-3\left(-\frac{2}{5}\right)-1=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}-1=1$。

在求代数式的值时，一般先化简后再求值比较简便。在式子变形时，要特别注意添、去括号时符号的变化。

例2　试用语言叙述下列各式所确定的实数 a、b（或 a、b、c）之间的关系或值的范围：

(1) $a^2=b^2$；　(2) $a+b=0$；　(3) $ab=1$；

(4) $ab=-1$；　(5) $ab=0$；　(6) $ab\neq 0$；

(7) $(a-b)^2=0$；　(8) $a^2+b^2=0$；　(9) $a^2+b^2>0$；

(10) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$；

(11) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$。

解　(1) a、b 的绝对值相等；

(2) a、b 互为相反数；　(3) a、b 互为倒数；

(4) a、b 互为负倒数；　(5) a、b 中至少有一个为零；

(6) a、b 均不为零；　(7) a、b 相等；

(8) a、b 均为零；　(9) a、b 不全为零；

(10) a、b、c 中至少有两个相等；

(11) a、b、c 不全相等。

例3 计算 $(x+y+a-b)(x-y+a+b)$。

解 $(x+y+a-b)(x-y+a+b)$

$$=[(x+a)+(y-b)][(x+a)-(y-b)]$$

$$=(x+a)^2-(y-b)^2=x^2+2ax+a^2-y^2+2by-b^2。$$

例4 计算 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$。

解法一 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=(x^2-y^2)[(x^2+y^2)^2-(xy)^2]$$

$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=x^6-y^6。$$

解法二 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)][(x-y)(x^2+xy+y^2)]$$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6。$$

例5 计算 $(x^3-x^2+x-6)\div(x+2)$。

解

$$
\begin{array}{l|l}
\text{被除式}\cdots\cdots x^3-x^2+x-6 & x+2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{除式} \\
\hline
 & x^2-3x+7\quad\cdots\cdots\text{商} \\
x^3+2x^2 & \\
\hline
-3x^2+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第一余式} & \\
-3x^2-6x & \\
\hline
7x-6\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第二余式} & \\
7x+14 & \\
\hline
-20\cdots\cdots\cdots\text{余式} &
\end{array}
$$

$\therefore\ x^3-x^2+x-6=(x+2)(x^2-3x+7)-20。$

习 题 A

1. 下列各式是不是代数式，如果是，加以分类：

$3x$，0，$\dfrac{3a-4b}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{2y}{\sqrt{x}}$，$\sin x$，$\lg x$，

$\dfrac{5x-y}{a-b}$，ax^2+bx+c。

2.下列计算是否有错，如果有错，指出错误原因。

(1) $2x+2y=4xy$； (2) $3a^2-a^2=3$；

(3) $-a^2-a^2=2a^2$； (4) $7x^2y-5xy^2=2x^2y$；

(5) $a^3+a^3=a^6$； (6) $(a-b)^2=a^2-b^2$。

3.把下列各式分别按 x 的降幂排列，并求当 $x=\sqrt{2}$ 时的值。

(1) $-7+x^5-3x^2+4x-5x^3+6x^4$；

(2) $-6x+\sqrt{2}x^3-4x^2-1$。

4.化简：$1-\{1-[1-(1-x)-x]-x\}-x$。

5.计算：

(1) $a(a+b)(a-b)-b(a+b)^2$；

(2) $3(x+5)(x+3)-5(x-2)(x-3)+2(x+1)(x-2)$；

(3) $(\sqrt{2}a^2-3b^2)-[-(a^2-2ab+b^2)$
$+(\sqrt{2}a^2-2ab-3b^2)]$；

(4) $(x+3y)^2(x-3y)^2-(2x+y)^2(2x-y)^2$；

(5) $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)(a-2)(a+2)$；

(6) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)$；

(7) $(x+y+z)(x+y-z)[(x+y)^2+z^2]$；

(8) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$；

(9) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$
$-(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$。

6.计算：

(1) $3x^2y^4z\div6x^2yz$；

(2) $(-ab^4c^2)\div\left(-\dfrac{5}{6}abc^2\right)$；

(3) $(24x^6y^3-12x^4y^2+8x^2y)\div(-6x^2y)$；

(4) $(9x^4-3x^3+7x^2-3x-2)\div(3x+1)$。