普通高等教育"十二五"规划教材

数学物理方程

陈明文 刘宇 ◎ 编著

EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

数学物理方程

陈明文　刘　宇　编著
郑连存　　　　　审

机械工业出版社

本书系统地介绍了数学物理方程的基本概念、基本方法，内容深入浅出，语言简练、通俗易懂，讲解推理自然，理论推导系统完整．

全书内容共分十章．书中不仅介绍了三类典型的偏微分方程（波动方程、热传导方程和调和方程）和定解条件的推导、二阶偏微分方程的基本概念和分类、分离变量法、特殊函数法、行波法、积分变换法、基本解与格林函数法，还介绍了适用于求解非线性数学物理问题的摄动和渐近方法，及其在解决材料和冶金等领域数学物理问题中的一些应用．

本书可作为数学、物理学、材料科学、冶金、电子信息科学等专业的本科教材，也可作为相关专业的研究生教材和参考书．

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程/陈明文，刘宇编著．—北京：机械工业出版社，2013.2
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-40978-6

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①陈…②刘…　Ⅲ.①数学物理方程－高等学校－教材
Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 311781 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐
版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
责任印制：邓　博
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×240mm・14.75 印张・295 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-40978-6
定价：33.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：(010) 68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：(010) 88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010) 88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

数学物理方程是一门基础性和应用性很强的学科，是从事数学、物理学、材料科学和信息科学等工程技术领域研究必不可少的理论和方法．数学是研究空间形式和数量关系的科学，数学一直在自然科学研究中发挥着举足轻重的作用．数学物理方程更是在创立和发展物理学理论进程中的主要工具之一．当年，柯朗(R. Courant)和希尔伯特(D. Hilbert)合著的《数学物理方法》在早期只有数学家们感兴趣，物理学家们不屑一顾．可是，当物理学家们对冥思苦想很多年而不得其解的方程无可奈何而不得不求助于数学家时，发现这本书中的理论恰恰是他们所期望的解答，甚至比他们所期望的还要好．数学物理方程通过对具体物理过程的分析，抓住主要因素，对物理现象建立系统的数学模型，并且依据物理实际背景对数学模型进行分析、求解，揭示物理现象的本质，以达到对物理现象的深入的理解．从这个意义上说，数学物理方程是数学和物理学系统理论的结晶．

本书根据编者多年的教学经验，在已有教材的基础上，力求系统地介绍数学物理方程的基本概念、基本方法，内容深入浅出，语言叙述准确、简练，讲解推理自然、易懂，对于某些内容不惜笔墨，便于读者理解．本书理论推导和方法具有系统性和完整性，例如：在第1章数学物理方程的定解问题中增加流体中的热传导方程的建立和推导；在第4章贝塞尔函数中增加球贝塞尔函数和虚宗量贝塞尔函数内容；在第5章增加伴随勒让德函数与球函数内容．充实这些内容使圆柱形区域和球形区域内的数学物理问题的解决趋于完善，以适应不同专业领域读者的要求．非线性问题是近几十年来科学研究的重要课题，本书第10章介绍适用于求解非线性数学物理问题的摄动和渐近方法，及其在解决材料和冶金等领域数学物理问题中的一些应用．

本书内容安排：第1章介绍了数学物理方程的基本概念以及三类典型的二阶偏微分方程和定解条件的建立和推导，增加了在流体中热传导方程的推导；第2章介绍了二阶线性偏微分方程的分类和化简；第3章到第6章介绍了分离变量法，其中第4章至第6章分别以贝塞尔函数、勒让德多项式和埃尔米特多项式介绍了求解数学物理方程常用的特殊函数法；第7章介绍了积分变换法；第8章介绍了基本解的概念和格林函数法；第9章介绍了关于定解问题解的适

定性问题的研究；第 10 章介绍了摄动和渐近方法．

本书可作为数学、物理学、材料科学、冶金、电子信息科学等专业的本科教材，也可作为相关专业的研究生教材和参考书．全书分为十章．第 1 章至第 5 章、第 10 章由陈明文编写，第 6 章至第 9 章由刘宇编写．全部讲授大约需要 60 学时．不同的专业可根据不同的需要选用教材的不同章节．

本书由北京科技大学郑连存教授审阅，谨此表示感谢．

由于编者的水平有限，错误及缺点在所难免，敬请同行与读者指正．

编　者

目　　录

第 1 章

数学物理方程的定解问题

在定量地研究许多物理和工程技术问题时，需要用数学语言精确地描述物理过程. 首先，选定某个(或某些)描述物理过程的物理量，根据物理定律归结出一些偏微分方程(称为泛定方程)，由于这些偏微分方程是从物理过程、力学和工程技术问题导出的，人们称之为数学物理方程；其次，确定物理量在某个特定区域边界上的数值(称为边界条件)，如果在所研究的问题与时间有关的情况下需要确定这一区域内各点在初始时刻的数值(称为初始条件). 这些偏微分方程和边界条件、初始条件组成了数学物理方程的定解问题. 在这一章中，我们从几个不同的物理模型出发，建立数学物理中三类典型的数学物理方程：描述振动和波动特征的**波动方程**、描述输运过程的**热传导**(或**扩散**)**方程**以及描述稳恒状态或平稳状态的**调和方程**，并列出边界条件和初始条件，给出适当的数学物理方程定解问题. 数学物理方程一方面直接地联系着物理学和工程技术问题，另一方面广泛地运用了许多数学学科中的成果，因而它成为数学与物理学和工程技术的实际问题之间的桥梁.

1.1 数学物理方程的建立

一般来说，一个物理量是空间变量 x，y，z 和时间变量 t 的函数，例如流体的温度 T、速度 v、压强 p，其数学形式均可以表示为

$$u = u(x,\ y,\ z,\ t).$$

根据物理定律，这个物理量满足某个数量关系式，在数学上表现为满足某个偏微分方程(组). 因为方程中的自变量不止一个，所以方程中所出现的导数是以偏导数的形式出现的. 下面，我们通过建立具体物理问题的数学模型推导出一些简单的数学物理方程.

1. 均匀弦的横向振动方程

弦的横向振动问题是数学物理方程中的一个典型问题．

设有一根柔软且具有弹性的均匀细弦，长度为 l，两端拉紧后，让弦离开平衡位置，在垂直于弦线的恢复力作用下作微小的横向振动，求在不同时刻不同位置的弦线的运动状态．

注意：这里所指的柔软且具有弹性的"**弦**"是指弦可以任意地变形，在任意点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向．"**均匀**"是指弦的线密度为常数．"**细**"是指弦的直径远远小于弦的长度，弦的重力可以忽略不计，在数学上可以把弦看做一条光滑的曲线．这里所指的"**横向振动**"是指在一个平面内弦上各点的运动方向垂直于最初的平衡位置．"**微小的**"是指弦上各点的位移与弦的长度相比很小，弦的纵向伸长量可以忽略不计．

现在我们建立弦的横向振动的偏微分方程．首先需要明确要研究的物理量是什么．本问题研究的是弦沿着垂直于平衡位置方向的横向位移．

其次，判断要研究的物理量遵循的物理定律是什么．本问题的物理量遵循牛顿第二定律．

最后，按照物理定律得出弦的横向振动的数学物理方程．

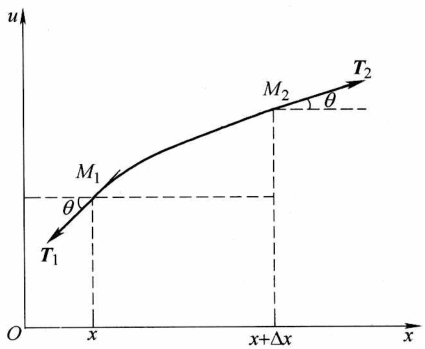

图 1.1　弦横向振动的微元示意图

因为这根弦是均匀、柔软且有弹性的，平衡时沿一条直线拉紧，故取这条直线为 x 轴，弦在一个平面上振动，我们用 $u(x, t)$ 表示弦的 x 点在时刻 t 的位移．如图 1.1 所示，取弦的一小弧段 $(x, x+\Delta x)$，设 ρ 为弦的线密度，M_1M_2 的弧长为 Δs，$\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 分别为弦在 x 点和 $x+\Delta x$ 点所受的张力，θ_1，θ_2 分别为相应的倾角，所以张力在 x 点和 $x+\Delta x$ 点的横向分量分别为 $-T_1\cos\theta_1$，$T_2\cos\theta_2$，纵向分量分别为 $-T_1\sin\theta_1$，$T_2\sin\theta_2$.

根据牛顿第二定律，此小弧段的运动方程为

$$\begin{cases} \rho\cdot\Delta s\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}=T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1 \quad \text{（其中 } \overline{u} \text{ 为弧段的平均位移），} & (1.1.1)\\ T_2\cos\theta_2-T_1\cos\theta_1=0. & (1.1.2)\end{cases}$$

因为弦作垂直于 x 轴的微小横向振动，横向位移 $u(x, t)$ 关于 x 的偏导数满足 $|u_x(x, t)|\ll 1$，所以倾角 θ_1，θ_2 是很小的，保留一阶小量，舍去高于一阶的小量，则有 $\cos\theta_1\approx\cos\theta_2$．于是由方程(1.1.2)可知弦在 x 轴方向是平衡的，$T_1=T_2=T$，即在没有沿 x 轴方向的外力时，弦中各点的张力大小是相同的．同时，张力在 x 点和 $x+\Delta x$ 点的纵向分量分别为

$$-T_1\sin\theta_1 = -T\sin\theta_1 \approx -T\tan\theta_1 = -T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$T_2\sin\theta_2 = T\sin\theta_2 \approx T\tan\theta_2 = T\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}.$$

又有

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta u)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x \approx \sqrt{1+\tan^2\theta_1}\cdot\Delta x \approx \Delta x,$$

所以方程(1.1.1)可变为

$$\begin{aligned}\rho\cdot\Delta x\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2} &= T(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\\ &\approx T(\tan\theta_2-\tan\theta_1)\\ &= T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\\ &= T\frac{\partial^2 u(x+\eta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x,\end{aligned}$$

其中，$0<\eta<1$. 消去两边的 Δx，当令 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\overline{u}\to u$，于是

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1.3}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1.4}$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$. 因为弦没有受到外力的作用，方程(1.1.4)称为**弦的自由振动方程**.

如果弦还受到垂直于 x 轴方向的外力的作用，其单位长度所受的外力为 $F(x,t)$，那么我们得到

$$\rho\cdot\Delta x\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u(x+\eta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x + F(x,t)\Delta x. \tag{1.1.5}$$

消去两边的 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，于是得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1.1.6}$$

其中 $f(x,\ t)=\dfrac{F(x,\ t)}{\rho}$表示单位质量所受的力. 这个方程称为**弦的受迫振动方程**.

方程(1.1.4)和方程(1.1.6)只含有一个空间变量，我们称之为**一维弦振动方程**(或**一维波动方程**). 因为未知函数 $u(x,\ t)$以及 $u(x,\ t)$关于变量 x 和 t 的导数的幂次为一次，所以方程关于未知函数是线性方程.

建立数学物理方程是一个辩证分析的过程. 由于客观事物的复杂性，要求对所研究的对象能够抓住事物发展的主要因素，摈弃次要因素，使问题得到适度的简

化．在上面的推导过程中，我们假设弦是完全柔软的，所以张力 $\boldsymbol{T}$ 才会沿着弦的切线方向；又假设弦的横振动是很小的，所以可以舍去高于一阶的小量，用 $\sin\theta$ 代替 $\tan\theta$，并且弦的纵向伸长量可以忽略不计．如果我们不作出这些假设，问题将变得复杂．例如，因为各点张力大小不相同，张力 T 就会依赖于横向位移 $u(x, t)$，所以得到的方程将不是线性方程，而是非线性方程．

2. 均匀薄膜的横向振动方程

设有一绷紧的柔软且有弹性的均匀薄膜，静止平衡时薄膜的平面为 xOy 平面，薄膜上各点在任意时刻 t 的横向位移是$u(x, y, t)$.

因为薄膜是均匀的，柔软且有弹性，所以薄膜上各点的张力为常数 T. 在薄膜上任取一微元，其原来的静止位置在 $[x, x+\Delta x; y, y+\Delta y]$，如图 1.2 所示．

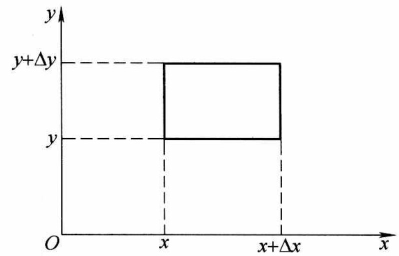

图 1.2　静止平衡时均匀薄膜平面区域微元示意图

先看 x 和 $x+\Delta x$ 这两边．薄膜所受的张力的横向分量分别为 $-T\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$ 和 $T\dfrac{\partial u(x+\Delta x,y,t)}{\partial x}$，所以薄膜在 x 和 $x+\Delta x$ 两边所受的总横向作用力是

$$\left(T\frac{\partial u(x+\Delta x,y,t)}{\partial x}-T\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right)\Delta y=T\frac{\partial^2 u(x+\alpha\Delta x,y,t)}{\partial x^2}\Delta x\Delta y, \tag{1.1.7}$$

其中 $0<\alpha<1$. 同理，在 y 和 $y+\Delta y$ 两边所受的总横向作用力是

$$T\frac{\partial^2 u(x,y+\beta\Delta y,t)}{\partial y^2}\Delta x\Delta y, \tag{1.1.8}$$

其中 $0<\beta<1$.

设 ρ 表示薄膜的面密度，$\overline{u}$ 为该微元的平均位移，根据牛顿第二定律，我们就得到这小块薄膜微元的横向运动方程

$$\rho\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}\Delta x\Delta y=T\frac{\partial^2 u(x+\alpha\Delta x,y,t)}{\partial x^2}\Delta x\Delta y+T\frac{\partial^2 u(x,y+\beta\Delta y,t)}{\partial y^2}\Delta x\Delta y. \tag{1.1.9}$$

两边消去 Δx，Δy，令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，有 $\overline{u}\to u$，于是

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.1.10}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.1.11}$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$. 这个方程称为**均匀薄膜的自由振动方程**．

如果薄膜在单位面积上所受的横向外力是 $F(x, y, t)$，那么

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{1.1.12}$$

其中 $f(x, y, t) = \dfrac{F(x, y, t)}{\rho}$. 这个方程称为**均匀薄膜的受迫振动方程**，它含有两个空间变量，我们也称它为二维波动方程. 若用二维拉普拉斯算子 $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$表示，则方程(1.1.12)可写为简洁的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f, \tag{1.1.13}$$

类似地，可导出三维波动方程(如电磁波、声波的传播)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t). \tag{1.1.14}$$

3. 均匀细杆的热传导方程

设有一根导热性各向相同的等截面材料细长杆（图 1.3），截面面积为 S，导热系数 k，比热容 c 及密度 ρ 均为已知. 假设外界介质温度为 0℃，由牛顿热交换定律可知，在长为 Δx 的一段杆上，单位时间内细杆与周围介质进行热交换所损失的热量与这段杆和外界介质的温度差成正比，即

$$Q_{\mathrm{N}} = \alpha(u(x, t) - 0)S\Delta x, \tag{1.1.15}$$

其中 α 为热交换系数. 假设沿着细杆有热源分布，热源在单位时间内提供的热源密度为 $g(x, t)$(即在单位时间内、单位体积内提供的热量).

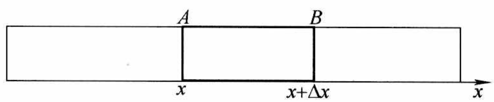

图 1.3　细杆的微元示意图

现在我们用微分法来建立细杆的热传导方程. 在杆上取一小段杆作为微元，其两个截面 A 和 B 分别对应坐标 x 和 $x + \Delta x$，由热传导的傅里叶(Fourier)定律可知，在从 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内由截面 A 流入这个微元的热量与时间间隔 Δt、截面面积 S 以及温度梯度 u_x 成正比，即

$$Q_A = -ku_x(x, t)\Delta t \cdot S. \tag{1.1.16}$$

在从 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内由截面 B 流出这个微元的热量为

$$Q_B = -ku_x(x + \Delta x, t)\Delta t \cdot S. \tag{1.1.17}$$

因此，通过截面 A 和截面 B 流进这个微元的热量为

$$\begin{aligned} Q_A - Q_B &= -ku_x(x, t)\Delta t \cdot S - (-ku_x(x + \Delta x, t)\Delta t \cdot S) \\ &\approx \frac{\partial}{\partial x}(ku_x(x, t))\Delta x\Delta t \cdot S. \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

从 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内热源提供的热量为

$$Q_S \approx g(x,\ t)\cdot S\cdot \Delta x\Delta t, \tag{1.1.19}$$

而从 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内细杆与外界进行热交换所损失的热量为

$$Q_N = \alpha(u(x,\ t)-0)\Delta x\Delta t\cdot S. \tag{1.1.20}$$

因此，从 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内，流入微元的净热量为

$$Q_A - Q_B + Q_S - Q_N \approx \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)S\Delta x\Delta t - \alpha u(x,t)S\Delta x\Delta t + g(x,t)S\Delta x\Delta t. \tag{1.1.21}$$

根据能量守恒定律，流入微元的净热量等于细杆的温度由 $u(x,\ t)$ 增加到 $u(x,\ t+\Delta t)$ 所需热量，即

$$c\rho[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]\Delta x\cdot S = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}S\Delta x\Delta t.$$

因此，

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}S\Delta x\Delta t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)S\Delta x\Delta t - \alpha u(x,t)S\Delta x\Delta t + g(x,t)S\Delta x\Delta t. \tag{1.1.22}$$

将两端同除以 $S\cdot\Delta x\Delta t$，并令 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$，得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \alpha u + g(x,t). \tag{1.1.23}$$

方程(1.1.23)称为**一维热传导方程**．特别地，当物性参数 k，α，c 及 ρ 均为常数时，方程(1.1.23)可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(x,t), \tag{1.1.24}$$

其中 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，$b=\dfrac{\alpha}{c\rho}$，$f(x,\ t)=\dfrac{1}{c\rho}g(x,\ t)$．当物性参数为常数，细杆与外界物质无热交换且无热源时，方程(1.1.24)可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.1.25}$$

4. 三维热传导方程

在一般的导热固体中，温度是不均匀的，热量总是从温度高的地方向温度低的地方转移，这就是热传导现象．考虑一均匀的各向同性的导热固体，假定其内部没有热源，与周围介质没有热交换，推导固体内部的温度分布方程．

设 $u=u(x,\ y,\ z,\ t)$ 表示物体在点$(x,\ y,\ z)$处任意时刻 t 的温度，根据热传导的傅里叶定律，热流密度矢量 $\boldsymbol{q}$(即单位时间内通过单位面积的边界流出的热量)与温度梯度的关系是

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u,$$

其中负号表示热流与温度梯度的方向相反，比例系数 k 为导热系数，∇称为哈密尔

顿(Hamilton)算子或梯度算子,

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

现在物体中任意取一微元 Ω(图 1.4),$\partial\Omega$ 为其边界面. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内,通过边界面$\partial\Omega$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$、热流通过边界面$\partial\Omega$ 的面积元 $\mathrm{d}S$ 和热流密度矢量沿 $\mathrm{d}S$ 的法向 $\boldsymbol{n}$ 的投影 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla u$ 成正比,流入微元 Ω 的热量为

$$Q_1 = -\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t = \int_{\partial\Omega}k(\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

Ω 内各点由 t_1 时刻的温度 $u(x,y,z,t_1)$变化到 t_2 时刻的温度 $u(x,y,z,t_2)$,需要吸收热量

$$Q_2 = \int_{\Omega}(\rho c u(x,y,z,t_2) - \rho c u(x,y,z,t_1))\mathrm{d}V = \int_{\Omega}(\rho c)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t,$$

即流入微元 Ω 的热量必然使得内能 $\rho c u$ 增加,其中 ρ 是密度,c 是比热容,$\mathrm{d}V$ 是空间微元. 根据热量守恒定律,$Q_1 = Q_2$,得到

$$\int_{\Omega}(\rho c)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \int_{\partial\Omega}k(\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{1.1.26}$$

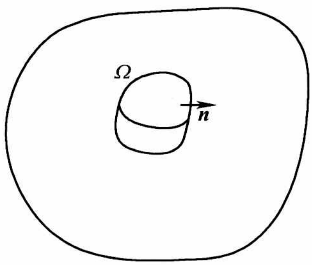

图 1.4　物体中微元 Ω 示意图

由高斯公式,得

$$\int_{\partial\Omega}k(\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_{\Omega}\nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}V, \tag{1.1.27}$$

将式(1.1.27)代入式(1.1.26),得到

$$\int_{\Omega}\left[(\rho c)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(k\nabla u)\right]\mathrm{d}V = 0.$$

再由 Ω 的任意性,我们得到在导热固体中的温度场方程

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(k\nabla u). \tag{1.1.28}$$

这个方程称为**三维热传导方程**. 如果假定热力学参数 ρ, c, k 均为常数,那么方程(1.1.28)可化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1.1.29}$$

其中 $a^2 = \dfrac{k}{\rho c}$为热扩散系数. 在有热源的情形时,得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t). \tag{1.1.30}$$

特别地,如果温度的分布与某个空间坐标(如 z)无关,那么方程(1.1.29)和方程

(1.1.30)分别变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.1.31}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t). \tag{1.1.32}$$

它们称为**二维热传导方程**.

5. 扩散方程

假如物体中物质的浓度不是均匀的，那么物质的分子就从浓度高的地方向低的地方转移，由此就发生了扩散现象. 以 $u(x,\ y,\ z,\ t)$表示物质中某点在任何时间 t 的浓度，根据扩散现象的菲克(Fick)定律，扩散流强度 $\boldsymbol{q}$ 与浓度梯度 ∇u 的关系是

$$\boldsymbol{q}=-D\nabla u,$$

其中 D 为扩散系数，所以物质在时间 $\mathrm{d}t$ 内通过某一截面积 $\mathrm{d}S$ 所扩散的量 $\mathrm{d}m$ 与该点的浓度梯度成正比，符号相反，即

$$\mathrm{d}m=-D\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

与热传导问题完全类似，在没有扩散源的情况下，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{1.1.33}$$

其中 D 是扩散系数. 在有扩散源的情况下，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1.1.34}$$

方程(1.1.33)和方程(1.1.34)称为**扩散方程**.

特别地，如果物质是均匀的，那么扩散系数 D 为常数，方程(1.1.33)和方程(1.1.34)分别变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\qquad(a^2=D) \tag{1.1.35}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1.1.36}$$

当方程只与变量 x, y 有关时，方程变为二维扩散方程. 当方程只与变量 x 有关时，方程变为一维扩散方程.

6. 稳定温度分布

当热传导或物质扩散达到稳定状态时，温度或浓度的变化与时间 t 无关，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

所以扩散方程(1.1.34)变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t)=0. \tag{1.1.37}$$

方程(1.1.37)称为**泊松方程**. 如果物体是均匀的、各向同性的，则方程(1.1.37)化为如下的方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{k}f(x,y,z,t). \tag{1.1.38}$$

如果 $f=0$，那么方程(1.1.38)化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1.1.39}$$

7. 流体的无旋稳恒流动

以 $\boldsymbol{U}(x,\ y,\ z)$ 表示流体的速度分布，流体源的强度为 $f(x,\ y,\ z)$，其中

$$f(x,\ y,\ z)=\nabla\cdot\boldsymbol{U}(x,\ y,\ z). \tag{1.1.40}$$

当流动是无旋的时候，存在速度势 u 使得

$$\boldsymbol{U}=-\nabla u. \tag{1.1.41}$$

将式(1.1.41)代入式(1.1.40)，得到流体无旋稳恒流动的速度势满足泊松方程

$$\Delta u=-f. \tag{1.1.42}$$

若流体在某区域内没有流体源，即 $f=0$，则在该区域上式(1.1.42)简化为拉普拉斯方程

$$\Delta u=0. \tag{1.1.43}$$

8. 流体的连续性方程

考虑一维理想流体，其横截面积为 S，流体密度为 $\rho(x,\ t)$，流体的流速为 $U(x,\ t)$，在内部无源的条件下推导流体的连续性方程.

在流体柱上任取一微元 Δx，微元有点 x 处和点 $x+\Delta x$ 处两个截面，任取一个时间段 $[t,\ t+\Delta t]$. 流体从 0 到 Δt 这段时间内从 x 处截面流入的质量为

$$S\cdot U(x,\ t)\cdot\rho(x,\ t)\Delta t,$$

从 $x+\Delta x$ 处截面流出的质量为

$$S\cdot U(x+\Delta x,\ t)\cdot\rho(x+\Delta x,\ t)\Delta t,$$

所以流体从 0 到 Δt 这段时间内此微元中流体净增量为

$$\Delta_x=S\cdot(U(x,\ t)\rho(x,\ t)-U(x+\Delta x,\ t)\cdot\rho(x+\Delta x,\ t))\Delta t. \tag{1.1.44}$$

由于在时刻 t 的流体质量为 $\Delta x\cdot S\cdot\rho(x,\ t)$，在时刻 $t+\Delta t$ 的流体质量为 $\Delta x\cdot S\cdot\rho(x,\ t+\Delta t)$，在 Δt 时间内该微元 Δx 内的流体净增量为

$$\Delta_t=\Delta x\cdot S\cdot\rho(x,\ t+\Delta t)-\Delta x\cdot S\cdot\rho(x,\ t). \tag{1.1.45}$$

由于流动的连续性和质量守恒，有

$$\Delta_x=\Delta_t.$$

令 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$，得到如下的方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho U(x,t))}{\partial x}=0, \tag{1.1.46}$$

方程(1.1.46)称为一维的**连续性方程**.

类似地，在一般的情形时，设流体密度为 $\rho(x, y, z, t)$，流体的流速为

$$\boldsymbol{U}(x, y, z, t)=(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)),$$

则理想流体的**连续性方程**为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U})=0. \tag{1.1.47}$$

因为

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{U},$$

所以方程(1.1.47)可写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0.$$

又因为对于不可压缩流体，有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0,$$

其中$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$表示全导数，所以

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\rho=0. \tag{1.1.48}$$

因此，得到不可压缩流体的**连续性方程**

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0. \tag{1.1.49}$$

9. 流体中的热传导方程

前面的热传导方程是在导热固体中推导的，我们可以类似地推导出导热流体的热传导方程．设想在液体内任意取一微元 $\Omega(t)$（图 1.5），液体的流动速度为 $\boldsymbol{U}$，随着液体的运动，其边界面 $\partial\Omega(t)$ 是随着时间变化的，这个微元将会移动而且体积也会改变．流入微元 $\Omega(t)$ 的热量为

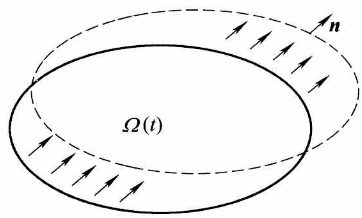

图 1.5 物体中微元 $\Omega(t)$ 及其边界 $\partial\Omega(t)$ 随时间演化示意图

$$Q(t)=-\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

流入微元的热量必然使得内能增加，根据能量守恒定律，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}(\rho c)u\mathrm{d}v=-\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{1.1.50}$$

其中 u 表示温度，ρ 和 c 分别表示密度和比热容．由高斯公式，得到