高等代数习题解

上海市业余工业大学数学教研室编

前　　言

为了配合电视大学和业余高等院校的教学工作，以便于教师辅导和学员自学参考，我们对北京大学数学力学系编的“高等代数”一书中的习题和补充题作了详细解答，有的并作了一题多解．但解题的思路和方法是多种多样的，不要因为我们的解答而束缚了思想，只有通过自己的钻研和独立思考，才能起到对内容加深理解和灵活运用的作用．

由于我们水平有限，所作题解中的缺点和错误在所难免，希望同志们批评指正．

上海市业余工业大学数学教研室

目　　录

第一章 多项式

习 题

1．用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1 \qquad g(x)=3x^2-2x+1$

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, \quad r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}.$$

2) $f(x)=x^4-2x+5 \qquad g(x)=x^2-x+2$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-x+2 & x^4 \qquad -2x+5 & x^2+x-1 \\
 & x^4-x^3+2x^2 & \\
\cline{2-2}
 & x^3-2x^2-2x+5 & \\
 & x^3-x^2+2x & \\
\cline{2-2}
 & -x^2-4x+5 & \\
 & -x^2+x-2 & \\
\cline{2-2}
 & -5x+7 &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad q(x)=x^2+x-1, \quad r(x)=-5x+7.$$

2．m, p, q 适合什么条件时，有

1) $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

解：设 $\qquad x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x+t)$

$$x^3+px+q=x^3+(m+t)x^2+(mt-1)x-t$$

$$\therefore \quad m+t=0, \quad mt-1=p \quad q=-t$$

$\therefore \quad m, p, q$ 满足 $\quad q=m, \quad p=-m^2-1.$

2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

解：设：$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2+kx+l)$

$$x^4+px^2+q=x^4+(m+k)x^3+(1+l+km)x^2+(k+ml)x+l$$

$$\therefore \begin{cases} m+k=0\\ 1+l+km=p\\ k+ml=0\\ q=l\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} m(q-1)=0\\ q=l\\ p=1+q-m^2\end{array}$$

$$\therefore \quad m=0, \quad p=1+q$$

或 $$q=1, \quad p=2-m^2.$$

3．用综合除法求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x \qquad g(x)=x+3.$

$$\begin{array}{r|l|l}
x+3 & 2x^5 \qquad -5x^3 \qquad\qquad -8x & 2x^4-6x^3+13x^2-39x+109\\
 & 2x^5+6x^4 & \\
\hline
 & \quad -6x^4-5x^3 \qquad -8x & \\
 & \quad -6x^4-18x^3 & \\
\hline
 & \qquad 13x^3 \qquad -8x & \\
 & \qquad 13x^3+39x^2 & \\
\hline
 & \qquad\quad -39x^2-8x & \\
 & \qquad\quad -39x^2-117x & \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 109x & \\
 & \qquad\qquad\quad 109x+327 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -327 &
\end{array}$$

$$\therefore \quad q(x)=+2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$$
$$r(x)=-327.$$

2) $f(x)=x^3-x^2-x. \quad g(x)=x-1+2i$

解：

$$\begin{array}{r|l|l}
x-1+2i & x^3-x^2-x & x^2-2ix-(5+2i)\\
 & x^3-(1-2i)x^2 & \\
\hline
 & \quad -2ix^2-x & \\
 & \quad -2ix^2+(4+2i)x & \\
\hline
 & \qquad -(5+2i)x & \\
 & \qquad -(5+2i)x+9-8i & \\
\hline
 & \qquad\qquad -9+8i &
\end{array}$$

$$\therefore \quad q(x)=x^2-2ix-(5+2i), \quad r(x)=-9+8i.$$

4．把 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots \quad \text{的形式:}$$

1) $f(x)=x^5 \qquad x_0=1$

解：$$f(x)=x^5=[(x-1)+1]^5$$
$$=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$$

2) $f(x)=x^4-2x^2+3 \qquad x_0=-2$

解：$$f(x)=x^4-2x^2+3=[(x+2)-2]^4-2[(x+2)-2]^2+3$$
$$=(x+2)^4-8(x+2)^3+24(x+2)^2-32(x+2)+16-2(x+2)^2+8(x+2)-8+3$$
$$=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11.$$

3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i \qquad x_0=-i$

解: $f(x)=[(x+i)-i]^4+2i[(x+i)-i]^3-(1+i)[(x+i)-i]^2$

$-3[(x+i)-i]+7+i$

$=(x+i)^4-4i(x+i)^3+6i^2(x+i)^2-4i^3(x+i)+i^4+2i(x+i)^3-6i^2(x+i)^2$

$+6i^3(x+i)-2i^4-(1+i)(x+i)^2+2i(1+i)(x+i)-(1+i)i^2$

$-3(x+i)+3i+7+i$

$=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$

5. 求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式:

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1 \qquad g(x)=x^3+x^2-x-1$

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x-1$	$-2x^2-3x-1$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

$\therefore\ (f(x),\ g(x))=x+1.$

2) $f(x)=x^4-4x^3+1 \qquad g(x)=x^3-3x^2+1$

$-\frac{x}{3}+\frac{10}{9}$	x^3-3x^2+1	x^4-4x^3+1	$x-1$
	$x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x$	x^4-3x^3+x	
	$-\frac{10}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$	$-x^3-x+1$	
	$-\frac{10}{3}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{20}{9}$	$-x^3+3x^2-1$	
	$\frac{16}{9}x-\frac{11}{9}$	$-3x^2-x+2$	$-\frac{27}{16}x-\frac{441}{256}$
		$-3x^2+\frac{33}{16}x$	
		$-\frac{49}{16}x+2$	
		$-\frac{49}{16}x+\frac{539}{256}$	
		$-\frac{27}{256}$	

$\therefore\ (f(x),\ g(x))=1.$

3) $f(x)=x^4-10x^2+1 \qquad g(x)=x^4-4\sqrt{2}\,x^3+6x^2+4\sqrt{2}\,x+1$

$-\frac{x}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$	x^4-10x^2+1	$x^4-4\sqrt{2}\,x^3+6x^2+4\sqrt{2}\,x+1$	1
	$x^4-2\sqrt{2}\,x^3-x^2$	x^4-10x^2+1	
	$2\sqrt{2}\,x^3-9x^2+1$	$-4\sqrt{2}\,x^3+16x^2+4\sqrt{2}\,x$	$4\sqrt{2}\,x$
	$2\sqrt{2}\,x^3-8x^2-2\sqrt{2}\,x$	$-4\sqrt{2}\,x^3+16x^2+4\sqrt{2}\,x$	
	$-x^2+2\sqrt{2}\,x+1$	0	

$$\therefore\ (f(x),\ g(x))=x^2-2\sqrt{2}\,x-1.$$

6. 求 $u(x)$, $v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$:

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2 \qquad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2.$

$q_1(x)=1$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x+1=q_2(x)$
	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	x^4-2x^2	
$q_3(x)=x$	$r_1(x)=x^3-2x$	x^3+x^2-2x-2	
	x^3-2x	x^3-2x	
	0	$r_2(x)=x^2-2$	

$$(f(x),\ g(x))=x^2-2=g(x)-(x+1)r_1(x)=g(x)-(x+1)(f(x)-g(x))$$
$$=-(x+1)f(x)+(x+2)g(x)$$
$$\therefore\ u(x)=-(x+1),\quad v(x)=x+2.$$

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9 \qquad g(x)=2x^3-x^2-5x+4$

$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=q_2(x)$	$2x^3-x^2-5x+4$	$4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$	$2x=q_1(x)$
	$2x^3+x^2-3x$	$4x^4-2x^3-10x^2+8x$	
9	$-2x^2-2x+4$	$r_1(x)=-6x^2-3x+9$	$6x+9$
	$-2x^2-x+3$	$-6x^2+6x$	
	$r_2(x)=-x+1$	$-9x+9$	
		$-9x+9$	
		0	

$$(f(x),\ g(x))=x-1=-r_2(x)=-\left[g(x)-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)r_1(x)\right]$$
$$=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)[f(x)-2xg(x)]-g(x)$$
$$=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)f(x)+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)g(x)$$
$$\therefore\ u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},\quad v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1.$$

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1 \qquad g(x)=x^2-x-1$

解:

$q_2(x)=x+1$	x^2-x-1	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	$x^2-3=q_1(x)$
	x^2-2x	$x^4-x^3-x^2$	
	$x-1$	$-3x^2+4x+1$	
	$x-2$	$-3x^2+3x+3$	
	1	$r_1(x)=x-2$	

$$(f(x),\ g(x))=1$$

$$1=g(x)-(x+1)r_1(x)=g(x)-(x+1)[f(x)-(x^2-3)g(x)]$$
$$=-(x+1)f(x)+(x^3+x^2-3x-2)g(x)$$

$\therefore\ \ u(x)=-(x+1),\quad v(x)=x^3+x^2-3x-2.$

7．设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u\quad g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 $t,\ u$ 的值.

解：设 $(f(x),\ g(x))=d(x)\quad \partial(d(x))=2$

$\because\ \ d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x)$

$\therefore\ \ d(x)\mid[f(x)-g(x)]$

$$f(x)-g(x)=(1+t)x^2+(2-t)x+u$$

$\therefore\ \ (1+t)x^2+(2-t)x+u$ 就是最大公因式的 $(1+t)$ 倍

$\therefore\ \ (1+t)[x^3+(1+t)x^2+2x+2u]=(x+\alpha)[(1+t)x^2+(2-t)x+u]$

$(1+t)x^3+(1+t)^2x^2+2(1+t)x+2u(1+t)$

$=(1+t)x^3+[\alpha(1+t)+(2-t)]x^2+[u+\alpha(2-t)]x+u\alpha$

$\therefore\ \ (1+t)^2=\alpha(1+t)+2-t$ ①

$2(1+t)=u+\alpha(2-t)$ ②

$2u(1+t)=u\alpha$ ③

由 ③ $u=0$ 或 $\alpha=2(1+t)$

如 $\alpha=2(1+t)$ 代入 ①

$2(1+t)^2-(1+t)^2+2-t=0,\ t^2+t+3=0$ 这是不可能的

$\therefore\ \ \alpha\neq2(1+t)$ 则 $u=0$

$\alpha(2-t)=2(1+t)$ 代入 ①

$$(1+t)^2(2-t)=2(1+t)^2+(2-t)^2$$

$$t^3+3t^2-3t+4=0\quad (t+4)(t^2-t+1)=0$$

$\therefore\ \ t=-4,\ u=0.$

8．证明：如果 $d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$ 且 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式.

证：设 $$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

$r(x)$ 为 $f(x),\ g(x)$ 任一公因式

$\because\ \ r(x)\mid f(x)\quad \therefore\ \ r(x)\mid u(x)f(x)$

$\because\ \ r(x)\mid g(x)\quad \therefore\ \ r(x)\mid v(x)g(x)$

则 $r(x)\mid(u(x)f(x)+v(x)g(x))$ 即 $r(x)\mid d(x)$

$\therefore\ \ d(x)=(f(x),\ g(x)).$

9．证明：$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$，($h(x)$ 首数系数为 1).

证：1．设 $$(f(x),\ g(x))=d(x)$$

$$d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x)$$

$$d(x)h(x)\mid f(x)h(x),\ d(x)h(x)\mid g(x)h(x)$$

$\therefore\ \ d(x)h(x)\mid(f(x)h(x),\ g(x)h(x))$ (1)

2．设 $(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=q(x)$

$$q(x)\,|\,f(x)h(x),\ q(x)\,|\,g(x)h(x)$$

$$\because\quad d(x)=(f(x),\ g(x))$$

$\therefore$ 存在 $u(x)$, $v(x)$ $\quad d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

$$d(x)h(x)=u(x)[f(x)h(x)]+v(x)[g(x)h(x)]$$

$$\because\quad q(x)\,|\,f(x)h(x)\quad q(x)\,|\,g(x)h(x)$$

$$\therefore\quad q(x)\,|\,d(x)h(x) \tag{2}$$

综合(1)(2) $(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$.

10. 如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))},\ \frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}\right)=1$$

证: 存在 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$$

则
$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}=1$$

即
$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),\ g(x))},\ \frac{g(x)}{(f(x),\ g(x))}\right)=1.$$

11. 证明: 如果 $f(x)$, $g(x)$ 不全为零,

且
$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),\ g(x))$$

那么
$$(u(x),\ v(x))=1$$

证: 设
$$(f(x),\ g(x))=d(x)$$

则
$$f(x)=d(x)\cdot\varphi(x)$$
$$g(x)=d(x)\cdot\psi(x)$$

代入上式
$$u(x)\cdot\varphi(x)d(x)+v(x)\cdot\psi(x)d(x)=d(x)$$
$$\varphi(x)u(x)+\psi(x)v(x)=1$$
$$\therefore\quad (u(x),\ v(x))=1.$$

12. 证明: 如果 $\quad (f(x),\ g(x))=1,\ (f(x),\ h(x))=1$

那么 $\quad (f(x),\ g(x)h(x))=1$

证: $\because\quad (f(x),\ g(x))=1\quad \therefore\quad$ 存在 $u_1(x)$ $v_1(x)$

使
$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$$

同理存在 $u_2(x)$, $v_2(x)$ 使 $u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1$

则
$$(u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x))(u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x))=1$$
$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+u_2(x)v_1(x)g(x)+u_1(x)u_2(x)h(x)]f(x)$$
$$+[v_1(x)v_2(x)][g(x)h(x)]=1$$

令
$$u(x)=u_1(x)u_2(x)f(x)+u_2(x)v_1(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)$$
$$v(x)=v_1(x)v_2(x)$$

则
$$u(x)f(x)+v(x)(g(x)h(x))=1$$
$$\therefore(f(x),\ g(x)h(x))=1.$$

13. 设 $f_1(x)$, $\cdots$, $f_m(x)$, $g_1(x)$, $\cdots$, $g_n(x)$ 都是多项式而且

$$(f_i(x),\ g_j(x))=1\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

求证:
$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),\ g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

证：先证：若 $(f_i(x), g_j(x))=1$ $\begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, m \\ j=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$

则 $$(f_i(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$$

由题 12 可知 若 $(f_i(x), g_1(x))=1$, $(f_i(x), g_2(x))=1$

则 $$(f_i(x), g_1(x)g_2(x))=1$$

∴ 说明 $n=2$ 时，上式成立

若 $n=k$ 时，上式成立

即若 $(f_i(x), g_j(x))=1 \quad j=1, 2, \cdots, k$

则 $$(f_i(x), g_1(x)\cdots g_k(x))=1$$

当 $n=k+1$ 时

由于 $$(f_i(x), g_{k+1}(x))=1$$

及归纳假设 $$(f_i(x), g_1(x)\cdots\cdots g_k(x))=1$$

即得 $$(f_i(x), g_1(x)\cdots\cdots g_k(x)g_{k+1}(x))=1$$

于是就有 $$(f_i(x), g_1(x)\cdots\cdots g_n(x))=1$$

同理再对 $f_i(x)$ 作归纳证明即得：

$$(f_1(x)\cdots f_m(x), g_1(x)\cdots\cdots g_n(x))=1.$$

14．证明：如果 $(f(x), g(x))=1$，那么 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$.

证：设 $$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=d(x)$$

即 $d(x)\,|\,f(x)g(x)$ 又 ∵ $(f(x), g(x))=1$

于是必有 $d_1(x)\,|\,f(x)$ 与 $d_2(x)\,|\,g(x)$ 这里 $d_1(x)d_2(x)=d(x)$

又 ∵ $d(x)\,|\,f(x)+g(x)$，∴ $d_1(x)\,|\,f(x)+g(x)$. ∴ $d_1(x)\,|\,g(x)$. 则 $d_1(x)=1$. 同理 $d_2(x)=1$，则 $d(x)=d_1(x)d_2(x)=1$. 即 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$.

15．求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

解：在复数范围内 1 的 n 次方根为

$$1, e^{\frac{i2k\pi}{n}} \quad K=1, 2, \cdots, n-1$$

记 $$e^{\frac{i2\pi}{n}}=\varepsilon.$$

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

在实数范围内：当 n 为奇数

ε 与 ε^{n-1}, ε^2 与 ε^{n-2}, $\cdots$, $\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$ 与 $\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$ 互为共轭复数

$$\begin{aligned} \therefore \quad x^n-1 &= (x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1]\cdot[x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\cdots \\ &\quad\cdot[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})x+1] \\ &= (x-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right)\left(x^2-2\cos\frac{4\pi}{n}x+1\right)\cdots \\ &\quad\cdot\left(x^2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x+1\right) \end{aligned}$$

当 n 为偶数

$$x^n-1=(x+1)(x-1)\left[x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\right]\left[x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right]\cdots\left[x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right].$$

16. 求下列多项式的公共根:

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1,\quad g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

解: 先求$f(x)$, $g(x)$的最大公因式

$$g(x)=f(x)(x+1)+2x^2+2x+2$$

$$f(x)=(2x^2+2x+2)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad (f(x),\ g(x))=x^2+x+1$$

则它们公共根是: $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

17. 判别下列多项式有无重因式:

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

解: 1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

$f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$

$\because\quad (f(x),\ f'(x))=x^2-4x+4,\quad \therefore\quad f(x)$有重因式

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$

$f'(x)=4x^3+8x-4=4(x^3+2x-1)$

于是$(f(x),\ f'(x))=1,\quad \therefore\quad f(x)$没有重因式

18. 求t值使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根.

解: $\because\quad f(x)$有重根, $\therefore\quad f(x)$与$f'(x)$有公共根

设公共根为a, $\qquad f(a)=0,\ f'(a)=0$

$$a^3-3a^2+ta-1=0 \tag{1}$$

$$3a^2-6a+t=0 \tag{2}$$

$(2)\times a-(1)\qquad 2a^3-3a^2+1=0$

$$(a-1)^2(2a+1)=0,\quad \therefore\quad a=1\text{ 或 }a=-\frac{1}{2}$$

$$t=6a-3a^2,\quad \therefore\quad t=3\text{ 或 }t=-\frac{15}{4}.$$

19. 求多项式x^3+px+q有重根的条件.

解: 设a是x^3+px+q二重根(该多项式不能有三重根)

b是一重根 $(x+a)^2(x+b)=x^3+px+q$

$$(x^2+2ax+a^2)(x+b)=x^3+px+q$$

$$x^3+(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x+a^2b=x^3+px+q$$

$$\therefore\quad 2a+b=0\quad b=-2a$$

$$x^3+(a^2-4a^2)x-2a^3=x^3+px+q$$

$$p=-3a^2,\ q=-2a^3;\quad p^3=-27a^6,\ q^2=4a^6$$

$$4p^3=-108a^6,\ 27q^2=108a^6$$

$$\therefore\quad \text{条件是}\quad 4p^3+27q^2=0.$$

20. 如果$(x-1)^2|Ax^4+Bx^2+1$ 求A, B.

解: $\qquad f(x)=Ax^4+Bx^2+1\quad \because\quad (x-1)^2|Ax^4+Bx^2+1$

$$\therefore\quad f(1)=0 \quad 且 \quad f'(1)=0$$

$$\begin{cases} A+B+1=0 \\ 4A+2B=0, \end{cases} \quad \therefore\quad A=1,\ B=-2.$$

21．证明：$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

证：
$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$
$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

设 a 为 $f(x)$ 重根则

$$f(a)=0 \quad f'(a)=0$$
$$1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}=0$$
$$1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}=0$$

两式相减 $\quad \dfrac{a^n}{n!}=0 \quad a=0.$

但 $a=0$ 不是 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的根

$$\therefore\quad 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \text{ 不能有重根.}$$

22．如果 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根，证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $(k+3)$ 重根

证：$\because\quad a$ 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根

$$\therefore\quad f'''(a)=f^{(4)}(a)=\cdots=f^{(k+2)}(a)=0$$

而
$$f^{(k+3)}(a)\neq 0$$

$$g(a)=\frac{a-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(a)+f(a)=0$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)+f'(a)]+\frac{x-a}{2}[f''(x)]-f'(x)$$

$$g'(a)=\frac{1}{2}[f'(a)+f'(a)]+\frac{a-a}{2}[f''(a)]-f'(a)=0.$$

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{x-a}{2}f'''(x)-f''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)$$

$$\therefore\quad g''(a)=0 \quad g'''(x)=\frac{1}{2}f'''(x)+\frac{x-a}{2}f^{(4)}(x)\cdots\cdots$$

$$g^{(k+2)}(x)=\frac{x-a}{2}f^{(k+3)}(x)+\frac{k}{2}f^{(k+2)}(x)$$

$$\therefore\quad g'''(a)=g^{(4)}(a)=\cdots=g^{(k+2)}(a)=0$$

$$g^{(k+3)}(x)=\frac{x-a}{2}f^{(k+4)}(x)+\frac{k+1}{2}f^{(k+3)}(x) \qquad g^{(k+3)}(a)=0+\frac{k+1}{2}f^{(k+3)}(a)\neq 0$$

$$\because\quad g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=g^{(k+2)}(a)=0 \quad 而 \quad g^{(k+3)}(a)\neq 0$$

$\therefore\quad a$ 是 $g(x)$ 的 $(k+3)$ 重根.

23．证明：x_0是$f(x)$的k重根的充分必要条件是

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0 \quad 而 \quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

证：必要性

设x_0是$f(x)$的k重根

则 $$f(x)=(x-x_0)^k\cdot g(x) \qquad g(x_0)\neq 0$$

$$f'(x)=k(x-x_0)^{k-1}g(x)+(x-x_0)^k g'(x) \quad \therefore \quad f'(x_0)=0$$

$$f''(x)=k(k-1)(x-x_0)^{k-2}g(x)+2k(x-x_0)^{k-1}g'(x)+g''(x)(x-x_0)^k$$

$$\therefore \quad f''(x_0)=0$$

…………

$$f^{(k-1)}(x)=k!(x-x_0)g(x)+c_{k-1}^1\cdot\frac{k!}{2!}(x-x_0)^2g'(x)+c_{k-1}^2\frac{k!}{3!}(x-x_0)^3g''(x)$$
$$+\cdots+(x-x_0)^k g^{(k-1)}(x)$$

$$\therefore \quad f^{(k-1)}(x_0)=0$$

$$f^{(k)}(x)=k!g(x)+c_k^1\cdot k!(x-x_0)g'(x)+\cdots+(x-x_0)^k g^{(k)}(x)$$

$$\therefore \quad f^{(k)}(x_0)=k!g(x_0)\neq 0$$

$$\therefore \quad f(x_0)=f(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0 \quad 而 \quad f^{(k)}(x_0)\neq 0$$

充分性

设 $$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$$

而 $$f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

$\because$ $f(x_0)=0$ x_0是$f(x)$的根，设x_0是$f(x)$ r重根 $\therefore$ $f(x)=(x-x_0)^r\cdot g(x)$

若$r>k$，则$f^{(k)}(x_0)=0$（由上证$f^{(r-1)}(x_0)=0$）与条件矛盾 $\therefore$ $r \ngtr k$

若$r<k$，则 $f^{(r)}(x_0)\neq 0$ $r<k$

即$f^{(k-(k-r))}(x_0)\neq 0$与条件矛盾 $\therefore$ $r \nless k$ 则$r=k$.

24．举例说明断语"如果a是$f'(x)$的m重根，则a是$f(x)$的$m+1$重根"是不对的.

例如 $$f(x)=(x-2)^4+1$$

2是$f'(x)=4(x-2)^3$的3重根

但2不是$(x-2)^4+1$的根，更不是4重根.

25．证明：如果$(x-1)|f(x^n)$，那么$(x^n-1)|f(x^n)$

证： $$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

其中 $$\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

$$\because \quad (x-1)|f(x^n) \quad \therefore \quad f(1^n)=0, \quad 即 \quad f(1)=0$$

$$f[(\varepsilon^k)^n]=f(\varepsilon^{kn})=f(1)=0 \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

$$\therefore \quad \varepsilon^k 是 f(x^n) 的根 \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$(x-\varepsilon^0)(x-\varepsilon^1)\cdots(x-\varepsilon^{k-1})|f(x^n) \quad 即 \quad (x^n-1)|f(x^n)$$

26．证明：如果 $$(x^2+x+1)|f_1(x^3)+xf_2(x^3),$$

那么 $$(x-1)|f_1(x), \ (x-1)|f_2(x).$$

证： $$(x^2+x+1)=\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$\therefore$ $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$是$f_1(x^3)+xf_2(x^3)$的根

$$\begin{cases} f_1\left[\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]+\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}f_2\left[\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]=0 \\ f_1\left[\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]+\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}f_2\left[\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right]=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1)+\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}f_2(1)=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad f_1(1)=0,\quad f_2(1)=0$$

即 $$(x-1)\mid f_1(x),\quad (x-1)\mid f_2(x).$$

27．求下列多项式的有理根：

1) $x^3-6x^2+15x-14$

解：$x^3-6x^2+15x-14=(x-2)(x^2-4x+7)$ ∴ 有理根是2.

2) $4x^4-7x^2-5x-1$

解：$4x^4-7x^2-5x-1=(2x+1)(2x^3-x^2-3x-1)=(2x+1)^2(x^2-x-1)$

∴ 有理根 $-\dfrac{1}{2}$ （二重根）.

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

解：$x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=(x+1)(x^4-6x^2-8x-3)=(x+1)^2(x^3-x^2-5x-3)$

$=(x+1)^2(x-3)(x^2+2x+1)=(x+1)^4(x-3)$

∴ 有理根：3与(-1)，(-1)是四重根.

28．下列多项式在有理数域上是否可约?

1) x^2+1 不可约

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$

用艾森斯坦因判别法

$$2\mid(-8),\ 2\mid 12,\ 2\mid 2.\quad 但\ 2\nmid 1,\ 2^2\nmid 2$$

∴ 原式在有理数域上不可约.

3) x^6+x^3+1

令 $$x=y+1$$

$$x^6+x^3+1=y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1+y^3+3y^2+3y+1+1$$
$$=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

存在系数3.

$$3\mid 6,\ 3\mid 15,\ 3\mid 21,\ 3\mid 18,\ 3\mid 9,\ 3\mid 3,\ 3\nmid 1,\ 3^2\nmid 3$$

$$\therefore\quad y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

在有理数域上不可约

则 x^6+x^3+1 在有理数域上也不可约.

4) x^p+px+1 p为奇素数.

证：令 $$x=y-1$$

$$x^p+px+1=(y-1)^p+p(y-1)+1$$
$$=y^p-py^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}y^{p-2}-\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot2\cdot3}y^{p-3}+\cdots+py-1+py-p+1$$
$$=y^p-py^{p-1}+p\frac{p-1}{2}y^{p-2}-p\frac{(p-1)(p-2)}{3!}y^{p-3}+\cdots+\frac{p(p-1)}{2}y^2+2py-p$$
$$=y^p-py^{p-1}+p\cdot\frac{p-1}{2}y^{p-2}-p\cdot\frac{(p-1)(p-2)}{3!}y^{p-3}+\cdots+p\frac{p-1}{2}y^2+2py-p$$

存在奇系数 p,　　(1) $p\nmid 1$;　(2) $p\mid a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$;　(3) $p^2\nmid a_0$ $(a_0=-p)$

$\therefore$ x^p+px+1 在有理数域上不可约.

注：这里用到 $\frac{p-1}{2}$，$\frac{(p-1)(p-2)}{3!}$ 为整数

$\therefore$ $c_p^k=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ 是整数

而 p 是素数，故 $(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$ 必能被 $k!$ 整除，

$\therefore$ c_p^k 是 p 的倍数.

5) $x^4+4kx+1$, k 为整数

证：令　　$x=y+1$.

$$x^4+4kx+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+1+4ky+4k+1$$
$$=y^4+4y^3+6y^2+(4+4k)y+(4k+2)$$

$$2\nmid 1;\ 2\mid 4;\ 2\mid 6,\ 2\mid(4+4k),\ 2\mid(4k+2),\ 2^2\nmid(4k+2)$$

$\therefore$ $y^4+4y^3+6y^2+(4+4k)y+(4k+2)$ 在有理数域上不可约,

即 $x^4+4kx+1$ 在有理数域不可约.

29. 用初等对称多项式表示下列对称多项式:

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

解：首项 $x_1^2x_2$ 它的方幂 (2, 1, 0)

$$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$$
$$x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2-\sigma_1\sigma_2=-3x_1x_2x_3=-3\sigma_3$$
$$\therefore\ x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

解：　$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$
$$=(x_1+x_2+x_3-x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2)$$
$$=(\sigma_1-x_3)(\sigma_2+x_3^2)=\sigma_1\sigma_2-x_3\sigma_2+\sigma_1x_3^2-x_3^3$$
$$=\sigma_1\sigma_2-x_1x_2x_3-x_2x_3^2-x_1x_3^2+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3-x_3^3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

或　　原式 $=(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_2+x_3)$
$$=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+2x_1x_2x_3$$
$$=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

解：首项是 $x_1^4x_2^2$　$\therefore$　取 $\varphi_1=\sigma_1^2\sigma_2^2$

$$f(x_1,\ x_3,\ x_3)-\varphi_1=[(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)]^2-[(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]^2$$
$$=[(x_1^2x_2-x_1x_2^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2+x_1x_3^2-x_1^2x_3)-(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2$$
$$+x_2^2x_3+x_2x_3^2+3x_1x_2x_3)]\cdot[(x_1^2x_2-x_1x_2^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2+x_1x_3^2-x_1^2x_3)$$
$$+(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+3x_1x_2x_3)]$$
$$=-(2x_1x_2^2+2x_2x_3^2+2x_1^2x_3+3x_1x_2x_3)(2x_1^2x_2+2x_2^2x_3+2x_1x_3^2+3x_1x_2x_3)$$
$$=-[4x_1^4x_2x_3+4x_1x_2^4x_3+4x_1x_2x_3^4+4x_1^3x_2^3+4x_2^3x_3^3+4x_1^3x_3^3+21x_1^2x_2^2x_3^2$$
$$+6x_1^3x_2^2x_3+6x_1x_2^3x_3^2+6x_1^2x_2x_3^3+6x_1^2x_2^3x_3^1+6x_1^1x_2^2x_3^3+6x_1^3x_2^1x_3^2]$$

取 $\varphi_2=-4\sigma_1^3\sigma_3$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\varphi_1-\varphi_2$$
$$=f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\varphi_1+4[x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_1x_2^2+3x_1x_3^2$$
$$+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+6x_1x_2x_3]\cdot x_1x_2x_3$$
$$=-4x_1^3x_2^3-4x_1^3x_3^3-4x_2^3x_3^3+3x_1^2x_2^2x_3^2+6(x_1^3x_2^2x_3+x_1x_2^3x_3^2+x_1^2x_2x_3^3$$
$$+x_1^2x_2^3x_3+x_1^3x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3^3)$$

取 $\varphi_3=-4\sigma_2^3$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3$$
$$=f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4(x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3+3x_1^2x_2^2x_3$$
$$+3x_1^2x_2^2x_3+3x_1x_2^3x_3^2+3x_1x_2^2x_3^3+3x_1^3x_2x_3^2+3x_1^2x_2x_3^3+6x_1^2x_2^2x_3^2)$$
$$=27x_1^2x_2^2x_3^2+18(x_1^3x_2^2x_3+x_1^3x_2x_3^2+x_1^2x_2^3x_1+x_1^2x_2x_3^3+x_1x_2^2x_3^3+x_1x_2^3x_3^2)$$

取 $\varphi_4=18\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$$\varphi_4=18(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1x_2x_3)$$
$$=18(x_1^3x_2^2x_3+x_1^3x_2x_3^2+x_1^2x_2^3x_3+x_1^2x_2x_3^3+x_1x_2^2x_3^3+x_1x_2^3x_3^2+3x_1^2x_2^2x_3^2)$$

$\therefore\ f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4=-27x_1^2x_2^2x_3^2=-27\sigma_3^2$

$\therefore\ f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2.$

4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$

解：取 $\varphi_1=\sigma_2^2$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)-\sigma_2^2$$
$$=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)^2$$
$$=-2(x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2x_4+x_1x_2^2x_3+x_1x_2^2x_4+x_1x_2x_3x_4+x_1^2x_3x_4+x_1x_2x_3^2+x_1x_2x_3x_4$$
$$+x_1x_3^2x_4+x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4^2+x_1x_3x_4^2+x_2^2x_3x_4+x_2x_3^2x_4+x_2x_3x_4^2)$$

取 $\varphi_2=-2\sigma_1\sigma_3=-2(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)-\varphi_1-\varphi_2=2x_1x_2x_3x_4=2\sigma_4$$

$$\therefore\ f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$

解：$(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_1x_3+x_2)$

$$=(x_1^2x_2+x_1x_2^2x_3+x_1x_3+x_2x_3^2)(x_1x_3+x_2)$$
$$=x_1^3x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^3+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3^2)$$

取 $\varphi_1=\sigma_3^2$ （$x_1^2x_2^2x_3^2$ 作首项）

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)-\varphi_1=x_1^3x_2x_3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^3+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3^2$$

取 $\varphi_2=\sigma_1^2\sigma_3$

$$f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2$$
$$=f(x_1, x_2, x_3)-\sigma_3^2-(x_1+x_2+x_3)^2x_1x_2x_3$$
$$=f(x_1, x_2, x_3)-\sigma_3^2-(x_1^3x_2x_3+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3^3+2x_1^2x_2^2x_3+2x_1^2x_2x_3^2+2x_1x_2^2x_3^2)$$
$$=x_1^2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3-2x_1^2x_2^2x_3-2x_1^2x_2x_3^2-2x_1x_2^2x_3^2$$

取 $\varphi_3=-2\sigma_2\sigma_3$

$$f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3$$
$$=f(x_1, x_2, x_3)-\sigma_3^2-\sigma_1^2\sigma_3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x_1x_2x_3$$
$$=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3$$

取 $\varphi_4=\sigma_2^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+2x_1^2x_2x_3+2x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2$

$$f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4=-2x_1^2x_2x_3-2x_1x_2^2x_3-2x_1x_2x_3^2+x_1x_2x_3$$

取 $\varphi_5=-2\sigma_1\sigma_3=-2(x_1+x_2+x_3)x_1x_2x_3$

$$\therefore\quad f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_3.$$

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$

$$=(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_2^2+x_2x_3+x_2^2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$$
$$=x_1^2x_2+x_1^2x_3+2x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2$$
$$+2x_1x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3+x_1x_2^2x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2x_3+x_1^2x_3^2+2x_1^2x_2x_3^2$$
$$+x_1^2x_2^2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3^2$$
$$=x_1^2x_2^2x_3^2+2x_1^2x_2^2x_3+2x_1^2x_2x_3^2+3x_1^2x_2x_3+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2$$
$$+2x_1x_2^2x_3^2+3x_1x_2^2x_3+3x_1x_2x_3^2+2x_1x_2x_3+x_2^2x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

取: $\varphi_1=\sigma_3^2\quad \varphi_2=2\sigma_2\sigma_3\quad \varphi_3=2\sigma_3$

$$f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3$$
$$=2x_1^2x_2^2x_3+2x_1^2x_2x_3^2+3x_1^2x_2x_3+2x_1x_2^2x_3^2+3x_1x_2^2x_3+3x_1x_2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2$$
$$+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1x_2x_3)$$
$$=3x_1^2x_2x_3+3x_1x_2^2x_3+3x_1x_2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2$$
$$+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

取 $\varphi_4=3\sigma_1\sigma_3=3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2x_3)$

$$\therefore\ f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4$$
$$=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$

取 $\qquad \varphi_5=\sigma_2^2=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2$

$$=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+2x_1^2x_2x_3+2x_1x_2^2x_3+2x_1x_2x_3^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4-\varphi_5$$
$$=-2x_1^2x_2x_3-2x_1x_2^2x_3-2x_1x_2x_3^2+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$$
$$\varphi_6=-2\sigma_1\sigma_3=-2x_1^2x_2x_3-2x_1x_2^2x_3-2x_1x_2x_3^2$$

$\therefore$ 取 $\quad f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4-\varphi_5-\varphi_6=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

取 $\qquad \varphi_7=\sigma_1\sigma_2=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$$=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+3x_1x_2x_3$$

$$\therefore\quad f(x_1, x_2, x_3)-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4-\varphi_5-\varphi_6-\varphi_7=-3x_1x_2x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_3^2+2\sigma_2\sigma_3+2\sigma_3+3\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$
$$=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2$$