数理化一题多解百例丛书

高中
三角一题多解百例

GAOZHONG
SANJIAO
YITI
DUOJIE
BAILI

广西教育出版社

数理化一题多解百例丛书

高中三角
一题多解百例

凤介生　编著

广西教育出版社

数理化一题多解百例丛书

高中三角一题多解百例

凤介生　编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路8号

邮政编码：530022　电话：5850219

广西新华书店发行　　南宁地区印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　6.125 印张　130 千字

1998 年 6 月第 1 版　1998 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—6 000 册

ISBN 7-5435-2667-0/G·2051　定价：6.00 元

出版说明

解题难，难于上青天！不少学生在学习数理化时，常常发出这样的感叹．数理化难，难在解题；解题难，难在思路．而经常进行一题多解的训练，是一条打开思路、攻克难题的极为有效的途径．

早在80年代中期，我社就组织出版了一套“数理化百题多解法”丛书，几年里畅销不衰，多次获奖．这次应广大读者的强烈要求，我们请作者在原丛书的基础上，依据最新的教学大纲和教材，进行了重大修改，形成这套全新的“数理化一题多解百例”丛书．

这套丛书中的每一本，都选编了100道典型题目，基本包括了该课程或该学科的主要知识和技能．每题都给出两种以上的解法，既有常规的，又有非常规的．每种解法前有分析，介绍解题思路，说明解题步骤，以利于读者理解，打开思路，培养分析问题的能力．每题后有简评，对各种解法“评头论足”，指出关键，概括规律，便于读者了解各种解法的特点，提高综合问题的能力．有的解法后还有附注，或推广原题，或引申知识，可进一步提高读者的发散思维能力．

我们希望读者认真阅读这套丛书，努力掌握其中介绍的解题思路和方法，并结合平时的学习自觉地进行一题多解的训练．这样，解题时就会思如泉涌，得心应手．

广西教育出版社

前　言

平面三角是高中数学的重要组成部分，它与代数、几何有着密切的联系，也是进一步学习高等数学、物理等学科的基础.

平面三角的公式多，解题的灵活性大，初学者往往不得要领.为了帮助高中学生和自学者学好平面三角的知识，掌握高中三角的解题基本方法和技巧，提高运用三角知识分析问题和解决问题的能力，也为了给中学数学教师提供教学参考资料，笔者根据现行中学课本和全日制中学数学教学大纲，参考有关资料，并结合笔者多年的教学经验，选编了这本《高中三角一题多解百例》.

本书选收的题目具有典型性和广泛性，包括了高中三角的全部内容，并注意沟通与代数、几何知识的内在联系，以帮助读者进一步理解和巩固所学知识；

读者阅读本书时，应先进行独立思考，再与书中的解法相比较，以便探索和总结解题规律，从而提高解题能力.

由于水平所限，不当之处在所难免，请读者批评指正.

编著者

目　录

一、三角函数式的化简与求值

1. 化简$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)(1+\mathrm{tg}2\theta\mathrm{tg}\theta)$.

分析1 把前两个因式先相乘,第三个因式化为正弦、余弦再相乘,用二倍角余弦公式化简.

解法1 原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(1+\dfrac{\sin2\theta\sin\theta}{\cos2\theta\cos\theta}\right)$

$$=\cos2\theta\left(1+\frac{2\sin^2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

$$=1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta$$

$$=1.$$

分析2 把前两个因式先相乘,第三个因式用两角差正切公式的变形表示,再利用万能公式化简.

解法2 原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\dfrac{\mathrm{tg}2\theta-\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}(2\theta-\theta)}$

$$=\cos2\theta\left(\frac{2\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}-1\right)$$

$$=\cos2\theta\cdot\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}$$

$$=\cos2\theta\cdot\frac{1}{\cos2\theta}$$

$$=1.$$

分析3 前两个因式先相乘,把第三个因式中的$\mathrm{tg}2\theta$化为$\mathrm{tg}\theta$,通分后用万能公式化简.

解法3 原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(1+\dfrac{2\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}\cdot\mathrm{tg}\theta\right)$

$$=\cos 2\theta \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$=\cos 2\theta \cdot \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$=1.$$

简评 化简三角函数式的一般要求是:①项数最少;②三角函数的种类最少;③三角函数的次数最低;④分母不含三角函数.本题的三种解法基本体现了这些要求.特别地,化简时要注意三角公式的正用、逆用及变形,还应注意运用乘法公式及因式分解公式.

2. 化简$\dfrac{\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+2\right)\operatorname{tg}x}{\sec x+\operatorname{tg}x}$.

分析1 化为正弦、余弦后,利用二倍角公式化$\dfrac{x}{2}$角的函数为x角的函数,再利用代数运算化简.

解法1 原式$=\dfrac{\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}+\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}+2\right]\operatorname{tg}x}{\sec x+\operatorname{tg}x}$

$$=\frac{\left(\dfrac{2}{\sin x}+2\right)\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{1+\sin x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1+\sin x}{\cos x}}$$

$$=2.$$

分析 2 利用万能公式把所给三角式化为关于 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的代数式再化简.

解法 2 原式 $=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+2\right]\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$$\div\left[\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2+4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$=2.$$

简评 把三角函数都化为正弦或余弦,是化简时常采用的方法,这是由于涉及正弦和余弦的公式多,较易找到化简的途径,如解法 1. 解法 2 把三角式变为代数式来化简,相对繁些.

3. 设 $\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$,化简

$$\frac{\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)\left[\sin(\pi-\theta)-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

分析 1 先利用诱导公式和两角和的正弦公式化简,再由已知条件判断 $\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 所在范围,从而确定 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的符号,将式子化简. .

解法 1 原式$=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)(\sin\theta+\cos\theta)}}{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$\because\quad \dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{4},\qquad \therefore\quad \pi<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}.$

从而 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<0.$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-1.$

分析 2 利用诱导公式及两角和的正弦公式把原式化成仅含 θ 角的三角函数式，再根据已知条件确定有关三角函数的符号，从而把式子化简.

解法 2 原式$=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)(\sin\theta+\cos\theta)}}{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$=\frac{|\sin\theta+\cos\theta|}{\sin\theta+\cos\theta}.$$

$\because\quad \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4},\qquad \therefore\quad \pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}.$

$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<0.$

$\therefore\quad$ 原式$=\frac{-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=-1.$

简评 由于$\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\pi$，从而有$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，本题在化简时利用了这个关系. 在化简三角式时，要注意有关的角之间有无互余、互补或倍数关系等，利用这些关系往往会给解题带来很大的方便.

4. 求$\sin50^\circ(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}10^\circ)$的值.

分析 1 提出$\sqrt{3}$，括号内的式子化为正弦与余弦，利用和角与倍角正弦公式化简求值.

解法 1 原式$=\sqrt{3}\sin50^\circ\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{tg}10^\circ\right)$

$$=\sqrt{3}\sin50^\circ\left(\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}+\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin50^\circ\sin(30^\circ+10^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ}$$

$$=\frac{2\sin50^\circ\cos50^\circ}{\cos10^\circ}$$

$$=\frac{\sin100^\circ}{\cos10^\circ}=1.$$

分析 2 先把括号内的式子化为正弦与余弦，利用两角和余弦公式化简后求值.

解法 2 原式$=\sin 50°\cdot\dfrac{\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°}{\cos 10°}$

$$=\frac{2\sin 50°}{\cos 10°}\left(\frac{1}{2}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)$$

$$=\frac{2\sin 50°}{\cos 10°}(\cos 60°\cos 10°+\sin 60°\sin 10°)$$

$$=\frac{2\sin 50°}{\cos 10°}\cdot\cos 50°$$

$$=\frac{\sin 100°}{\cos 10°}=1.$$

注 也可先利用两角差正切公式把括号内的式子变形,再化为正弦、余弦后化简求值.

简评 对于不查表且无限定条件的求三角函数式的值的题,一般尽量转化为特殊角的三角函数再求值.对非特殊角的三角函数,则转化为同角同名函数后化简求值.如本题的两种解法.

5. 求 $\mathrm{tg}9°+\mathrm{ctg}117°-\mathrm{tg}243°-\mathrm{ctg}351°$的值.

分析 1 先用诱导公式和互为余角的三角函数公式化简,化为正弦与余弦后再分组合并,最后用二倍角公式及和差化积公式化简求值.

解法 1 原式$=\mathrm{tg}9°-\mathrm{tg}27°-\mathrm{tg}63°+\mathrm{tg}81°$

$$=\mathrm{tg}9°+\mathrm{ctg}9°-(\mathrm{tg}27°+\mathrm{ctg}27°)$$

$$=\frac{\sin 9°}{\cos 9°}+\frac{\cos 9°}{\sin 9°}-\left(\frac{\sin 27°}{\cos 27°}+\frac{\cos 27°}{\sin 27°}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin 9°\cos 9°}-\frac{1}{\sin 27°\cos 27°}$$

$$=\frac{2}{\sin 18°}-\frac{2}{\sin 54°}$$

$$=\frac{2(\sin 54°-\sin 18°)}{\sin 18°\sin 54°}$$

$$=\frac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}=4.$$

分析 2 化为锐角三角函数后,把两个正切的差用两角差的正切公式变形表出,再化为正弦与余弦,用两角和与差的余弦公式化简求值.

解法 2 原式 $=\mathrm{tg}9^\circ-\mathrm{tg}27^\circ-\mathrm{tg}63^\circ+\mathrm{tg}81^\circ$

$$\begin{aligned}
&=(\mathrm{tg}81^\circ-\mathrm{tg}63^\circ)-(\mathrm{tg}27^\circ-\mathrm{tg}9^\circ)\\
&=\mathrm{tg}(81^\circ-63^\circ)(1+\mathrm{tg}81^\circ\mathrm{tg}63^\circ)\\
&\quad-\mathrm{tg}(27^\circ-9^\circ)(1+\mathrm{tg}27^\circ\mathrm{tg}9^\circ)\\
&=\mathrm{tg}18^\circ(\mathrm{ctg}9^\circ\mathrm{ctg}27^\circ-\mathrm{tg}9^\circ\mathrm{tg}27^\circ)\\
&=\frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\frac{\cos^2 9^\circ\cos^2 27^\circ-\sin^2 9^\circ\sin^2 27^\circ}{\sin 9^\circ\sin 27^\circ\cos 9^\circ\cos 27^\circ}\\
&=\frac{4}{\cos 18^\circ}\cdot\frac{\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 54^\circ}\\
&=4.
\end{aligned}$$

简评 四个三角函数的代数和的化简求值,通常是把两个函数作为一组进行化简.解法 1 分组的原则是同一组的两个三角函数的角之间有互余关系,变形后可出现特殊角的三角函数;解法 2 则是把两组分别化积后有公因式 $\mathrm{tg}18^\circ$,提取公因式后,括号内的四个角的函数可化为两个角的函数,有利于化简求值.

此题可推广到一般:

$$\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4.$$

6. 不查表,求 $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{12}$ 的值.

分析 1 因为 $\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$,可把前两个不同角的函数化

为同角函数，再用倍角公式把三个函数的积化为两个函数的积，最后用积化和差公式化为特殊角的函数，从而求值.

解法 1 原式$=\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{7\pi}{12}$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{8}.$$

分析 2 先把前两个函数的积化为余弦的差，再利用$\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{7\pi}{12}=\pi$的关系，使式子仅含一个角的函数，最后利用二倍角余弦公式化出特殊角的函数，从而求值.

解法 2 原式

$$=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{11\pi}{24}\right)\right]\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2\frac{5\pi}{12}\quad\left(\because\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-2}{8}.$$

简评 本题两种解法都是根据角之间的关系，适当运用三角公式把非特殊角的函数转化为特殊角的函数，从而达到化简求值的目的. 这是解这类题的常用方法.

7. 求值:$\operatorname{ctg}10°-4\cos10°$.

分析1 化为同角的正弦、余弦,通分后用二倍角公式及和差化积公式化分子为同名函数再化积,化出特殊角的三角函数并约去非特殊角的函数求值.

解法1 $\operatorname{ctg}10°-4\cos10°$

$$=\frac{\cos10°}{\sin10°}-4\cos10°$$

$$=\frac{\cos10°-4\sin10°\cos10°}{\sin10°}$$

$$=\frac{\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{(\sin80°-\sin20°)-\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{2\cos50°\sin30°-\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{\sin40°-\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{2\cos30°\sin10°}{\sin10°}$$

$$=\sqrt{3}.$$

分析2 利用互为余角的函数关系及二倍角正弦公式将式中的函数都化为正弦,凑成积化和的形式,化和后再化积求值.

解法2 $\operatorname{ctg}10°-4\cos10°$

$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sin80°-2\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{2\sin80°\cos60°-2\sin20°}{\sin10°}$$

$$=\frac{\sin 140°+\sin 20°-2\sin 20°}{\sin 10°}$$

$$=\frac{\sin 140°-\sin 20°}{\sin 10°}$$

$$=\frac{2\cos 80°\sin 60°}{\sin 10°}=\sqrt{3}.$$

分析 3 化为同名函数后，凑角成可用两角差的正弦，展开后化出特殊角的三角函数求值.

解法 3 $\operatorname{ctg}10°-4\cos 10°$

$$=\frac{\sin 80°-2\sin 20°}{\sin 10°}$$

$$=\frac{\sin 80°-2\sin(80°-60°)}{\sin 10°}$$

$$=\frac{\sin 80°-2(\sin 80°\cos 60°-\cos 80°\sin 60°)}{\cos 80°}$$

$$=\frac{2\cos 80°\sin 60°}{\cos 80°}=\sqrt{3}.$$

分析 4 构造直角三角形求解.

解法 4 如图 1，作直角三角形 DBC，其中 $\angle C=90°$，$CB=1$，$AB=2$，$\angle D=10°$.

在 $\triangle ABD$ 中，$\dfrac{AD}{\sin 20°}=\dfrac{2}{\sin 10°}$，

则 $AD=\dfrac{2\sin 20°}{\sin 10°}=4\cos 10°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$CD=\operatorname{ctg}10°$，

$\because$ $CD-AD=AC$，而 $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

即 $\operatorname{ctg}10°-4\cos 10°=\sqrt{3}$.

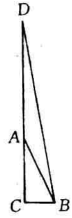

图 1

简评 一般的化简、求值问题是化繁为简，而此题形式已简，要求值需化简为繁，再化简.

8. 若 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，且 $0<x<\pi$，则 $\operatorname{tg} x$ 的值是

( ).

(A) $-\frac{4}{3}$　(B) $-\frac{3}{4}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{3}$

分析 1 从已知条件出发，化为一个角的函数求 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，再利用同角三角函数关系求 $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，展开即可求 $\operatorname{tg} x$.

解法 1 ∵ $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，则 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，

从而 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\cos x\geqslant 1$，故必有 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，则有 $\frac{3\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$.

$$\therefore\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{7}.$$

即 $\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}=-\frac{1}{7}$，解得 $\operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}$，故选(A).

分析 2 将已知等式两边平方，化为关于 $\sin x$ 的二次方程，求出 $\sin x$ 后，$\operatorname{tg} x$ 可求.

解法 2 由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$ 可得 $\cos^2 x=\left(\frac{1}{5}-\sin x\right)^2$，即

$$1-\sin^2 x=\left(\frac{1}{5}-\sin x\right)^2.$$