普通高等教育“十二五”规划教材

近代物理实验

主编　李国庆

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

近代物理实验

主　编　李国庆
副主编　陶敏龙
参　编　李加兴　李　建　林跃强
　　　　彭泽平　张　勇

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书共编入25个近代物理实验，除了原子物理、核物理、固体物理、磁学、激光、真空及镀膜、低温、共振等领域发展较早且至今仍然发挥重要作用的实验方法外，还加入了巨磁电阻、纳米科学、扫描探针显微术等代表最近30年内物理学实验技术重大进展的典型实验. 本书侧重于使学生掌握面向物理学前沿的物理思想和实验技能，提高其科学探索素质.

本书可作为理工类高等院校物理学专业本科生的教材，也可供从事相关研究工作的研究生、科技人员和中学物理教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

近代物理实验/李国庆主编. —北京：科学出版社，2012

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-036061-8

Ⅰ.①近… Ⅱ.①李… Ⅲ.①物理学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O41-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第276828号

责任编辑：窦京涛 唐保军/责任校对：包志虹

责任印制：阎 磊/封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2012年12月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2012年12月第一次印刷 印张：13 1/4

字数：335 000

定价：40.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

近代物理实验课程为高年级物理专业本科大学生开设，需要原子物理学、量子力学和固体物理学等理论课程的配合．本书安排的25个实验项目，以近代物理学发展史中起重大突破性作用的实验手段为主，注重介绍代表性的基本实验原理和方法．为了适应当前物理学前沿发展对未来科研人员素质的要求，本书尽量选择仍然在当前科学研究中发挥重要作用的实验方法，并加入了巨磁电阻效应、纳米材料制备和扫描探针显微术等代表最近30年物理学研究发展方向的典型实验技术手段．本书可作为一般理工类高等院校物理学专业本科生的教材，各校可以根据各自的实验室条件选做其中的内容．书中每个实验项目安排5学时，师范类专业应该不低于70学时，研究型和应用型专业可以分两学期开课，使总课时达到90学时以上．

本书由西南大学物理实验教学示范中心组织编写，参加编写的人员分工如下：

李国庆：物理实验的数据测量与数据处理，氢(氘)原子光谱，钠原子光谱，扫描隧道显微镜，原子力显微镜；

陶敏龙：微波传输特性的测量，微波介质特性分析，微波铁磁共振，物理学常数表；

李加兴：弗兰克-赫兹实验，法拉第-塞曼效应，γ射线能谱测量，快速电子的动量与动能的相对论关系；

李　建：粉末法测定多晶体的晶格常数，劳厄法确定单晶体的晶轴方向，振动样品磁强计测量内禀磁特性；

林跃强：真空的获得与测量，真空镀膜，纳米微粒的制备，电子衍射；

彭泽平：X射线衍射的固体结构仿真，磁电阻效应，超导体临界温度的测量；

张　勇：激光拉曼光谱，电子自旋共振，光泵磁共振，脉冲核磁共振．

全书由李国庆进行审校．

书中难免有不当之处，恳请读者批评指正．

编　者

2012年5月

目　录

物理实验的数据测量与数据处理

近代物理实验要用到较为综合的实验技术和较为复杂的实验设备. 实验的测量值,有些比较精确,有些则具有明显的涨落成分;有些可以多次测量,有些则不具备测量的重复性;有些信号相当强烈,有些信号则很微弱. 这需要更系统地掌握数据测量和数据处理理论.

一、物理实验的基本方法

1. 比较法

将被测量量与量具进行比较来获得测量值. 砝码、直尺、角规等量具能被赋予标准值,直接与被测量量进行比较,称为直接量具(标准量具);温度计、万用表等量具需要借助其他可测量,间接与被测量量进行比较,称为间接量具. 万用表要用标准电池和标准电阻来测量电压,像这样需要不止一个标准量具的复杂间接量具也称为比较系统. 代替法、置换法是异时的比较法(即至少需要在两个不同时刻进行比较). 所有测量都必然含有比较法.

2. 放大法

将过小的被测量量先进行放大再进行测量. 长度、角度和电学量的放大是放大法的主要内容. 光杠杆法测量微小长度、镜尺法测量小角度、视角放大法提高人眼的分辨能力(如放大镜、显微镜、望远镜)、螺旋放大法精密测量长度(如螺旋测微计和读数显微镜)和电流电压放大法测量微弱电信号(如锁相放大器)是典型的放大法.

3. 补偿法

被测系统受某种作用,存在 A 效应,同时受另一种同类作用,存在 B 效应,如果 B 的存在使 A 不能显示,则 B 就是 A 的补偿. 测量时依靠人为制造可测量的 B 效应,去测量不可测量的 A 效应,就是补偿法. 完整的补偿法测量系统由待测、补偿、测量和指零四部分装置组成. 指零装置显示待测量量与补偿量比较的结果,有示零(完全补偿)和示差(不完全补偿)两种. 天平和弹簧秤通过人为施力制造补偿效应. 电势差计、电桥和补偿法测光程差都是常见的补偿测量法. 补偿法经常用于校正系统误差,道理是制造另一种因素去补偿无法消除的不合理因素. 例如,金属膜电阻的温度系数为正,而碳膜电阻的温度系数为负,将它们适当搭配在电路里,可以消除温度变化对电路的影响. 各种补偿电路都是为了减小电路的某种浮动;光学补偿器用于抵消光学器件产生的光程差.

4. 转换法

对于无法直接测量、不方便直接测量或者测量准确性差的物理量,常将被测量量先转化成其他的可测量量,再通过可测量量的值反求被测量量的值. 玻璃温度计利用材料的热胀冷缩性质,通过测量长度得知温度. 电测法将被测量量转化成电学量,光测法则将被测量量

转化成光学量. 转换法测量需要传感器. 传感器一般包括敏感元件和转换元件两部分. 电容、电感和电阻都可以用作传感器. 测量温度的热电传感器可以是金属电阻(Cu、Pt 等,求值复杂但准确)、热敏电阻(SnO_2 等半导体,灵敏但不够稳定)、pn 结传感器(通恒定正向电流,则结电压反映温度,灵敏准确但测温范围窄)和热电偶(铜-康铜、铂-铂铑等多种类,稳定)等. 压电传感器($BaTiO_3$ 等)可以测量声波;霍尔片是磁电传感器;光电传感器包括光电管、光电倍增管、光敏电阻、光导管和光电池等;气敏电阻可以测量气体成分;光的几何性质可以用来测量材料的折射率;光的干涉性质可以用来测量物体长度、微小位移和曲率;此外还有声光传感器、电光传感器、磁光传感器等.

5. 模拟法

受对象过于庞大、危险、变化缓慢等条件限制,可以制造与研究对象有一定关系的模型,代替原型进行测量. 模拟法有物理模拟和数学模拟两种.

物理模拟要求几何相似(模型与原型的尺寸成比例)并且物理相似(模型和原型的被测量遵从相同的物理规律). 用飞机模型在风洞里实验,可以分析飞机飞行时各部位的受力情况. 轮船、桥梁、河流冲刷等都可以进行类似的流体动力学实验.

数学模拟又称类比,模型和原型在物理实质上毫无共同之处,但遵守相同的数学规律. 比如可以用稳恒电流场的等势线来模拟静电场的等势线,因为电磁场理论指出,二者具有相同的数学方程式.

6. 量纲分析法

间接测量必须要建立被测量量和可测量量之间的关系式,才能通过代入可测量量的数值获得被测量量的数值. 如果关系式难以确定,可以用量纲分析法. 设 A、B、C 和 D 是与某一物理现象相关的全部物理量,其中 A 是待测量量,而 B、C 和 D 都是可测量量. 因为四个物理量与同一物理现象关联,它们之间必然有联系. 假定它们之间具有指数关系,即 $A=kB^xC^yD^z$,其中 k 为无量纲的比例系数. 将四个物理量的量纲代入,经过比较就可以确定幂指数.

比如要确定弦振动的共振频率,即固有频率 f_0,它与弦的长度 l、弦的线密度 μ 和弦内的张力 F 有关,有 $f_0=k\,l^x\mu^yF^z$. 代入量纲,有

$$\mathrm{T}^{-1}=\mathrm{L}^x\mathrm{M}^y\mathrm{L}^{-y}\mathrm{M}^z\mathrm{L}^z\mathrm{T}^{-2z}=\mathrm{L}^{x-y+z}\mathrm{M}^{y+z}\,\mathrm{T}^{-2z} \tag{0.1}$$

令等号两侧量纲相等,则有 $x-y+z=0$, $y+z=0$, $-1=-2z$,即 $x=-1$, $y=-1/2$, $z=1/2$,所以

$$f_0=k\frac{1}{l}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{0.2}$$

量纲分析法的关键是准确找出全部物理量.

二、物理量的测量和测量误差

1. 真值、测量值和误差

被测物理量的客观大小称为真值,计为 a;用实验手段测量出来的被测物理量数值称为

测量值,计为 x. 受人所在时代的认识能力和技术水平,以及测量过程中存在的主客观因素限制,不同的人用不同的仪器在不同的时间对同一物理量进行测量,结果会存在差异;同一个人用相同的仪器连续测量同一个物理量,得到的结果也不尽相同. 测量中存在随机因素,没有理由能够断定哪一次测量就是真值. 第 i 次测量得到的测量值与真值的差值称为第 i 次测量的误差,计为 Δ_i,有

$$\Delta_i = x_i - a \tag{0.3}$$

由于测量不到真值,所以只能用多次重复测量的算术平均值作为真值的参考,误差也只能进行估算.

2. 测量结果的评价

直接测量和间接测量 可以根据仪器的刻度直接读出数值的测量,称为直接测量. 例如,用米尺测长度,用秒表计时间,用电压表读电压. 需要由直接测量量通过函数关系间接计算出被测量值的测量,称为间接测量,如通过测直径和高得知圆柱体的体积.

等精度测量和不等精度测量 用同一套仪器在相同条件下对某一物理量进行多次重复测量,没有理由认为哪一次测量更精确,可以说测量具有相同的精度,称为等精度测量. 否则,就是不等精度测量. 多次重复测量应尽量保持精度相等. 每次测量得到的一个具体测量值,就是一个随机变量的取值,每一个随机变量都和相应的分布相联系. 而分布的方差说明了随机变量取值的离散程度. 一个测量值的精度,就是指与其相应分布的方差. 方差取决于测量方法和仪器的精度. 等精度测量是指在一系列测量中,与各个测量值对应的分布有相同的方差.

测量的精密度、准确度和精确度 它们都是评价测量结果优劣程度的标志,与测量误差相关联. 精密度表示随机误差是大还是小,如果等精度多次测量一个物理量所得到的一组数值彼此接近,即使没有分布在真值两侧,也说明精密度高;如果测量值零散地分布在真值两侧,即使没有彼此接近,只要平均值偏离真值小,就说明准确度高;如果测量数据集中在真值附近,并且精密度和准确度都高,就认为精确度高. 仪器的精密度简称精度,是指仪器的最小分度(数字化仪表的精度是此量程能显示的最小物理量变化值). 精度等级用灵敏度来衡量. 灵敏度是精度的倒数,意义是单位测量量引起仪器指针偏转的格数(数字化仪表的灵敏度是单位测量量除以此量程精度所得到的整数份数). 仪器的准确度是正确使用合格产品进行测量能达到的最小误差值. 准确度一般达不到最小分度,所以不会优于精度.

三、误差的分类及产生原因

根据误差产生的原因,一般将误差分为三类:系统误差、偶然误差和粗差.

1. 系统误差

系统误差由测量中确定存在的不合理因素引起,使测量值偏向真值的一侧. 重要的系统误差简述如下.

仪器误差 又称工具误差,起因是仪器工具不完善或有缺陷. 例如,米尺刻度不均或磨损,天平不等臂,砝码不准确,电子元件没达到要求. 消除系统误差需要定期用标准仪器对

测量仪器进行校验和调节,或者采取某些预知有效的方法进行补救(比如用反称法修正天平不等臂引起的误差).

调整误差　起因是仪器没有事先调整到最佳使用状态,如水平、铅直、初始零点、阻抗匹配、光路共轴等调整. 为了减小调整误差,要养成良好的工作习惯,严格执行操作规程.

环境误差　由温度、湿度、气压、震动、电磁场等环境因素与设计要求的标准状态不一致引起. 修正方法是想办法消除引起误差的因素. 无法消除的情况下,可用某些方式进行补偿,或者想办法估计出误差值,在测量结果中加以校正.

理论误差　又称方法误差,是测量所依据的理论存在近似,或测量方法考虑不周造成的. 例如,用公式 $T=(2\pi)^{-1}(l/g)^{1/2}$ 测量单摆的周期,含有小摆角近似($\theta \approx \sin\theta$)并忽略了空气阻力. 其他还有忽略导线和接触电阻、不考虑透镜厚度、分子没有大小等.

人身误差　又称人差,是由操作人员的感觉灵敏程度和反应快慢存在差异造成的. 比如,按停表,有人总是按迟有人总是按早;读示数,有人总是读低有人总是读高.

以上系统误差都没有固定的方法和规律来加以消除,也不能用多次重复测量的方法加以消除,只能依靠经验积累,提高素质,增强处理这类问题的能力. 系统误差不具有抵偿性,应该根据系统误差出现的规律,尽可能找出其具体来源并消除其对测量结果的影响. 对不能消除的系统误差,给出合理的估值. 在数据处理中可以发现有变化的系统误差. 分析残差有助于发现系统误差.

由固定不变的因素或者按确定规律变化的因素造成的系统误差,一般还是可以掌握的. 有规律的系统误差主要包括以下几种.

固定误差　整个测量过程中,大小和符号都不变的系统误差. 比如由砝码的实际质量偏离公称质量引起的误差. 固定误差影响算术平均值,但不影响残差和标准方差. 对标准样品进行测量,可以发现固定误差.

线性误差　在测量过程中,随某些因素作线性变化的系统误差. 比如用存在刻划误差的直尺测量长度.

多项式误差　忽略多项式的高次项引起的误差.

周期性误差　在测量过程中,随某些因素按周期性规律变化的系统误差. 比如,使用指针转轴偏离刻度盘中心的秒表计时.

复杂规律误差　在测量过程中,系统误差按确定但复杂的规律变化. 比如,使用指针偏转角与偏转力矩不能严格成正比的微安表测电流.

2. 偶然误差

偶然误差也称为随机误差,是指同一个人使用同一台仪器在相同条件下对同一测量量进行多次等精度重复测量,测量结果也存在的差异. 大量多次测量的偶然误差服从统计规律,误差呈正态分布. 误差的正态分布特征为:误差为某一数值的概率最大;小误差出现的概率比大误差出现的概率大;正误差和负正误差出现的概率相等,具有抵偿性.

3. 粗差

粗差是实验差错引起的明显不合理误差,即过失误差. 比如电源电压瞬时异常可以导致跳变的测量值. 含有粗差的测量值称为坏值. 分析数据时,应将坏值剔除.

四、误差的估算

误差的估算只针对偶然误差，应在估算偶然误差之前处置完成系统误差和粗差.

1. 直接测量误差的估算

没必要或者因条件限制不能进行重复测量的单次测量，误差由仪器的精度以及测量的条件给出. 用最细分度为 0.1 s 的停表计时，走和停各计入 0.1 s 的误差，总误差为 0.2 s，结果计为 $x=x_0\pm\Delta x=x_0\pm 0.2\ \text{s}$，$x_0$ 为测量值. 对刻度容易分辨的读数装置，也可以取最小分度的 1/2 或者 1/3 作为误差. Δx 称为绝对误差. 数字化仪表的误差为此量程的最小读数.

对于 n 次重复测量的情况（指等精度测量），每次测量的误差为 $\Delta_i=x_i-a$. 对所有测量结果求和，如果 $n\to\infty$，则 $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=0$，于是可以得到

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x} \tag{0.4}$$

对有限次测量，只能把算术平均值作为真值的最佳估计值.

误差 Δx 用平均值标准偏差表示，为

$$s_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{0.5}$$

其中

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{0.6}$$

称为测量值的标准偏差. 可见，增加测量次数可以提高测量结果的精确度. 测量结果表示为

$$x=\bar{x}\pm\Delta x=\bar{x}\pm s_{\bar{x}} \tag{0.7}$$

这种表示只说明真值落在 $\bar{x}-s_{\bar{x}}$ 到 $\bar{x}+s_{\bar{x}}$ 范围内的可能性较大，服从正态统计规律的概率为 68.3%（统计规律不同，此概率值也不同）. 这一范围称为置信区间，而真值出现在置信区间的概率称为置信度，也叫置信水平.

由于误差与被测量的大小没有直接关系，误差的大小并不能标志测量的优劣. 为此，引入相对误差，定义为

$$\eta=\frac{\Delta x}{a}\approx\frac{\Delta x}{\bar{x}} \tag{0.8}$$

化成百分数，就是百分误差.

标准偏差的平方称为标准方差，即

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1} \tag{0.9}$$

而下式

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{n-1} \tag{0.10}$$

称为总体方差，简称方差．就是说，标准方差是方差的估值．同理

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{n-1}} \tag{0.11}$$

称为方均根差．标准偏差是方均根差的估值．

测量次数较少时，随机变量服从 t 分布，s 与 σ 可能会有相当大的偏离，关于真值的置信区间不能用正态分布计算．t 分布的随机变量定义为

$$t=\frac{\overline{x}-a}{s_{\overline{x}}}=\frac{\overline{x}-a}{s/\sqrt{n}} \tag{0.12}$$

由于真值无法确定，所以先规定一个显著性水平 α，再查 t 分布的概率分布表，获得一个参量 t_α（见后面表 0.3，要根据式(0.56)进行换算），置信区间修改为

$$(\overline{x}-t_\alpha s_{\overline{x}},\overline{x}+t_\alpha s_{\overline{x}}) \tag{0.13}$$

一般说来，重复测量的次数少于 10，就应该按 t 分布根据重复测量的次数和选定的显著性水平来确定置信区间．这样，真值落在置信区间的概率仍然是 68.3%．

2. 间接测量误差的估算

假设通过直接测量量 x,y,z 来间接测量 P，$P=f(x,y,z)$，测量结果为 $x=\overline{x}\pm\Delta x$，$y=\overline{y}\pm\Delta y$，$z=\overline{z}\pm\Delta z$，$P=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$．$P$ 的平均值标准偏差为

$$s_P=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_{\overline{x}}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_{\overline{y}}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 s_{\overline{z}}^2} \tag{0.14}$$

相对误差为

$$\frac{s_P}{P}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2 s_{\overline{x}}^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2 s_{\overline{y}}^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2 s_{\overline{z}}^2} \tag{0.15}$$

其中的偏导数是将 x,y,z 分别代入 $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ 的取值．

3. 误差的分配

在测量过程中，可能存在多个系统误差和随机误差，测量的精度用总的误差来度量．如果 y 要通过测量多个参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 得到，则

$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2}=\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots+D_i^2+\cdots+D_n^2} \tag{0.16}$$

这需要在测量前根据精度要求对误差进行分配设计. D_i 为测量量 x_i 的分误差. 分配的原则如下所述:

(1) 按等影响原则分配误差. 无特定要求时,先均等分配各分误差

$$\sigma_i = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|} \tag{0.17}$$

有些测量量的误差不能改动,则可以先减掉这些分误差,再对其他测量量进行误差分配.

(2) 按可能性调整误差分配. 对测量难以保证的分误差量进行适当放宽,再适当收紧具备条件的其他分误差量.

(3) 验算调整后的总误差. 对于无法满足要求的测量量,应考虑改变测量方法,最简单的是增加测量次数.

五、有 效 数 字

有效数字包含可靠数字和可疑数字两部分. 用最小分度为毫米的米尺测量得到的数字 3.4 mm,3 为可靠数字,0.4 为估读的可疑数字,有效数字为两位. 除非是特殊的精确测量,一般规定误差只保留一位数. 注意,1.402 和 1.000 都是 4 位有效数字,后者的 0 不可以省略. 为了表示三位有效数字的 25000 Ω 阻值,可以按千进制计为 25.0 kΩ(小数点前最多 3 位),或者用科学表示法计为 2.50×10^4 Ω(小数点前只能有 1 位). 有效位数多,反映相应仪器的精度高. 如果误差在有效数字最后一位之前,则后面的有效数字要去掉,误差有效(等于计算出来的误差值). 有效数字去掉的原则是小于 5 则舍,大于 5 则入,等于 5 则前位凑双. 例如,测量重力加速度,如果 $g=9.7850\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,$\Delta g=0.05\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,则结果表示为 $g=9.78\pm0.05\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 如果误差在有效数字最后一位之后,则误差取为仪器最小分度的 1/2 或者 1/3,有效数字位数不变,而计算的误差无效,也可以用仪器的引用误差作为误差值,即 Δx=量程×精度级%.

1. 有效数字之间进行运算的原则

运算后的结果,只有最后一位可疑,其他位可靠;只要有可疑数参与运算,结果就是可疑的,但进位数视作可靠数;为了标示,可疑位上打点,如 $2.32\dot{6}$.

2. 有效数字的加减运算

加法可能增加有效位数,减法可能减少有效位数.

$$10.\dot{1}+1.55\dot{1}=11.\dot{6}5\dot{1}=11.\dot{6},\quad 69.6\dot{8}-65.84\dot{5}=3.8\dot{3}\dot{5}=3.8\dot{4}$$

3. 有效数字的乘除运算

结果的有效数字位数与参与运算的数字中位数最少的有效数字位数相同,但如果此数字的首位是 8 或 9,结果的有效数字位数也可以比此数字的位数多一位,例如

$$12.38\dot{5}\times 1.\dot{1}=12.38\dot{5}+\dot{1}.\dot{2}\dot{3}\dot{8}\dot{5}=1\dot{3}.\dot{6}\dot{2}\dot{3}\dot{5}=1\dot{4}$$

$$93.50\dot{4}\div 1\dot{2}=7+\dot{9}.50\dot{4}\div 1\dot{2}=7.\dot{7}\dot{9}\dot{2}=7.\dot{8}$$

4. 有效数字的乘方和开方等幂运算

结果的有效数字位数与底数的有效数字位数相同.

5. 有效数字的三角函数和对数运算

结果的有效数字位数与角度的有效数字位数相同;尾数的有效数字位数与真数的有效数字位数相同,首数的位数不计入有效数字的位数.

6. 常数的有效数字

有效位数看作无限多.

六、数据处理的方法

1. 列表法

将数据列成明示物理量对应关系的简明表格. 这有助于发现实验中的规律. 要求表格设计简单明了,各栏目均注明物理量的名称和单位,各测量量的排列顺序尽量与测量顺序一致,用有效数字填写.

2. 作图法

作图反映自变量和因变量的关系. 坐标纸有方格纸、半对数纸、双对数纸和概率纸等多种. 作图法的用途:结合内插和外推技巧,可以求间接测量值、斜率和截距;求经验公式;寻找统计分布规律;验证物理定律;绘制仪器校正曲线;寻找仪器误差;发现坏值. 作图法中有时用到曲线改直技巧,就是将自变量或因变量适当取倒数、对数等运算后再作图,使曲线成为直线.

3. 累加法

如果自变量和因变量都从零开始线性变化,为了有效使用所有的测量值,要使用累加法来求斜率,$k=(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n)/(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$,从而减小相对误差.

4. 分组逐差法

分组逐差法又称环差法,用于有效使用所有数据点求线性关系的斜率和截距. 设测量次数 n 为偶数,令 $m=n/2$. 将数据分为两组,第一组为 $y_i=kx_i+b$,第二组为 $y_{m+i}=kx_{m+i}+b(i=1,2,3,\cdots,m)$. 前后两组方程依次相减,得到 $\Delta y_i=y_{m+i}-y_i=k(x_{m+i}-x_i)=k\,\Delta x_i$. 于是

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\Delta y_i}{\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_{m+i}-y_i)}{\sum_{i=1}^{m}(x_{m+i}-x_i)},\quad i=1,2,3,\cdots,m \tag{0.18}$$

按上式求得 k 后，再用累加法求 b.

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=k\sum_{i=1}^{n}x_i+nb,\quad b=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-k\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/n,\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{0.19}$$

5. 经验公式拟合法

由二维数据寻找经验公式的过程就是拟合，任务是建立函数形式并确定其中的常数，包括判断和假设、改直、检验三个步骤. 判断和假设断定曲线类型以及是否含有常数项和极值；改直是通过对假定的曲线类型采取适当的变换，将曲线方程变为直线方程；检验是要证明经验公式与测量数值相符. 更精确和严格的方法是最小二乘法.

6. 插值法

借助相邻测量点的数据求得未测量点或不可测量点的待测值，这样的过程叫做插值. 有作图插值、比例插值、牛顿内插值和外推几种方式.

作图插值 先绘出曲线，然后在曲线上取需要的任意点，找出其坐标，要求尽量选取靠近插值的数据，并且坐标纸要足够大以保证精度.

比例插值 把相邻数据点之间小段曲线看作直线，也称为线性插值法.

牛顿内插值 考虑任何函数都可以做傅里叶展开 $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，利用牛顿多项式内插值公式，可以较准确地获取非线性曲线上某点的数值，项数取决于函数的性质和要求的精度. 测量时数据点的选择要满足 $x=a,a+h,a+2h,\cdots,a+mh$，即 x 的公差 h 恒定. 列表并填写 y 的依次差值 $\Delta y=y_{a+ih}-y_{a+(i-1)h}$，$i=1,2,3,\cdots,m$；然后再填写 Δy 的依次差值 $\Delta^2 y$，$\Delta^2 y$ 的依次差值 $\Delta^3 y,\cdots$. 如果发现 $\Delta^n y$ 成为常数(从而 $\Delta^{n+1}y$ 都为 0)，则函数一定是最高次幂项为 a_nx^n 的多项式. 用到的表格称为差分表. 于是在 $(a,a+mh)$ 范围内任意 x 对应的 y 值为

$$y_x=y_{a+kh}=y_a+\frac{k}{1!}\Delta y_a+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_a+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_a+\cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_a \tag{0.20}$$

$k=(x-a)/h$，不一定是整数. $\Delta^n y_a$ 是指差分表中 $\Delta^n y$ 列的第 1 个数值. 这就是牛顿多项式内插值公式.

外推 如果要计算的数值点在测量数据区间以外，则在研究范围内测量值没有突变的情况下，可以用外推的办法较为准确地求值. 对于直线或者曲率不大的曲线，可以用数据点绘出曲线，按原曲线变化规律将曲线延长到待求值范围，用作图插值法解决. 如果曲率较大，可以考虑改直后再外推. 牛顿内插公式也可以用于外推，列制差分表时要尽量使用靠近待求值的数据，但因为是单向靠近，误差总会大些.

7. 列表计算微积分法

在要求不高时，可以用作图法在曲线上求各点的微商 $\Delta y/\Delta x$，即斜率. 要求高时，用牛顿内插公式可以比较准确地计算微分和积分.

列表法求微分 求 x 在 x_0 附近的微分 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，先以 x_0 为始项列制差分表(前提也是 x 的公差恒定). 对 $k=(x-x_0)/\Delta x$(x 要尽量靠近 x_0，所以实际上 k 应该是个较小的小数)求导数，得 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}x=1/\Delta x$. 再对牛顿内插公式

$$y=y_0+\frac{k}{1!}\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{0.21}$$

求导，就得到微分计算式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}k}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}k}\frac{1}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{1!}\Delta y_0+\frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{3k^2-6k+2}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots\right) \tag{0.22}$$

如果 $x<x_0$，则 $\Delta x<0$. 于是 Δy_0、$\Delta^3 y_0$、$\Delta^5 y_0$ 等反号，而 $\Delta^2 y_0$、$\Delta^4 y_0$、$\Delta^6 y_0$ 等符号不变.

列表法求积分 比较粗略的是梯形法，就是用折线代替曲线，则曲线与横轴之间所夹的面积被分成若干个梯形. 这些梯形的总面积为

$$\int_{x_0}^{x_P} y\mathrm{d}x=\Delta x\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+\frac{y_n}{2}\right)+(x_P-x_n)\frac{y_n+y_P}{2} \tag{0.23}$$

最后一项是 x 限末端不足 Δx 部分的面积. y_P 需要用牛顿内插公式进行计算得到. 比较精确的是辛普森 1/3 法则. 假定梯形法中去掉 x_n 到 x_P 段后，x_0 到 x_n 之间正好有偶数段，则依次将相邻的小面积并为一组，每组的曲线看作二次抛物线，第一组的面积为

$$\begin{aligned}s_1+s_2&=\int_{x_0}^{x_1} x^2\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x_1^3-x_0^3)+\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)\\&=\frac{1}{3}(x_1-x_0)(x_1^2+x_0x_1+x_0^2+x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\end{aligned} \tag{0.24}$$

令 $x_0\,x_1\approx x_1{}^2=y_1$，$x_1\,x_2\approx x_1{}^2=y_1$，于是

$$s_1+s_2=\frac{1}{3}\Delta x(y_0+4y_1+y_2) \tag{0.25}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_P} y\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\Delta x(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+y_n)+\frac{1}{2}(x_P-x_n)(y_n+y_P)\\&=\frac{1}{3}\Delta x[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+y_5+\cdots)+2(y_2+y_4+y_6+\cdots)]\\&\quad+\frac{1}{2}(x_P-x_n)(y_n+y_P)\end{aligned} \tag{0.26}$$

进一步设小面积数 n 为 3 的整数倍，依次将 3 个相邻的小面积并为一组，每组的曲线看作三次抛物线，可以得出辛普森 3/8 法则.

8. 最小二乘法

变量之间可以相关，或者不相关. 相关的变量间可以是函数关系，也可以是相关关系.

变量之间存在完全确定的关系，就是函数关系. 如果变量之间有一定的关系，但由于测量中存在随机和偶然因素，造成变量间的关系出现不同程度的不确定度，没有一一对应的确定关系，但从统计意义上看，它们之间存在着规律性的关系，这种变量之间的关系就是相关关系. 条件变化可能引起函数关系和相关关系之间发生转化. 用数理统计的方法处理相关关系，寻找它们之间合适的数学表达式，称为拟合过程，得到的表达式就是拟合方程，也叫回归方程. 常用的拟合方法包括最小二乘法和最大似然估计法. 样本容量很大时，最大似然估计法工作量太繁重，因此主要使用最小二乘法.

最小二乘法解决 X 和 Y 之间的函数形式可以确定，但一些参数需要通过分析数据来估计问题. 如果 X 和 Y 的函数形式也需要从实验中确定，就要用多项式拟合法.

设 X 和 Y 两个物理量之间的函数关系为

$$Y = f(X; a_1, a_2, \cdots, a_k) \tag{0.27}$$

其中 Y 的函数形式已知，但函数中的系数和常数项等参数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 待求. 考虑 X 和 Y 两个物理量，二者总有一个量的测量精度比另一个量的精度高得多，可以将其测量误差忽略，并把这个物理测量量当作自变量 x. 对一批测量数据 (x_i, y_i)，设 y_i 的标准偏差为 $\hat{\sigma}_i$，x_i 看作准确测量值，$i=1,2,\cdots,n$. 要获得估算参数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的法则，考虑 Y 的测量误差 $\Delta y_i = y_i - y_{0i}$，$y_{0i}$ 表示 x_i 对应的 Y 变量真值. 为了给出 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的估值 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k$，最小二乘法的准则是这些估值的选取要满足 Y 的测量值 y_i 与真值的估值 $\hat{y}_i = f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)$ 之差具有最小的加权平方和 R

$$R = \sum_{i=1}^{n} \omega_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i [y_i - f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)]^2 \tag{0.28}$$

$\omega_i = \dfrac{\sigma^2}{\hat{\sigma}_{iy}^2}$ 是测量值 y_i 的权重因子，σ^2 为任选的正常数，称为单位权方差. 对等精度测量，都可以取 $\omega_i = 1$. 于是得到方程组

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}_j} \sum_{i=1}^{n} \omega_i [y_i - f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)]^2 = 0, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{0.29}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i [y_i - f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)] \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{a}_j} f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{0.30}$$

从而可以求出 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k$.

如果 y 是关于 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的线性函数，则用最小二乘法可以直接求解. 否则，先选取 a_j 的初值，将 $f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)$ 在 a_j 的初值附近作泰勒级数展开，使方程线性化，再用逐次迭代法求解.

线性最小二乘法的等精度测量标准偏差为

$$\hat{\sigma}_{iy} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{0i})^2}{n-k}} \tag{0.31}$$

假定误差 Δ_i 服从标准正态分布，则 Δ_i 出现的概率密度函数为

$$f(\Delta_i) = f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_i - f(x_i; \hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_k)}{\sigma_i}\right]^2} \tag{0.32}$$