概率统计讲义

（下　册）

吴 权 俊 编

宜昌师专教务处

目　　录

（下　册）

第四章

第五章　基本极限定理

第六章　数理统计初步

第四章 随机向量

在第二、三章中，我们只讨论了随机变量，即一个随机试验的单个数值表示，但在许多实际题问中，一些随机试验仅用单个随机变量来描述是不够的，而需要用几个随机变量的联合来描述。比如：打炮时，弹落点要由两个随机变量——弹落点的横坐标X和纵坐标Y来表示；钢厂炼出的每炉钢的质量常用硬度X、含碳量Y、含硫量Z这三个随机向量来描述，也就是说，对试验的每个结果（炼出的每炉钢），对应地有一组数X（ω），Y（ω），Z(ω）这三个数可以看作是三维欧氏空间R^3中的一个点（或向量），这样，我们所考察的随机试验便可用（X，Y，Z）来描述。

一般地，称几个随机变量$X_1 X_2 \cdots\cdots X_n$的整体 $\xi=(X_1 X_2 \cdots\cdots X_n)$为 n维随机向量。

例如，弹落点的位置 ξ=（X，Y）是一个二维随机向量，每炉钢质量的基本指标（X，Y，Z）（硬度，含碳量，含硫量）是一个三维随机向量。

这里，“维数”的概念表示“共有几个分量”，从几何图形上看，二维随机向量可以看作是平面（2维空间！）上的“随机点”，三维随机向量可以看成是空间（三维空间！）中的“随机点”，相对地，前两章研究的随机变量又称为“一维随机向量”。

本章重点讨论二维随机向量，和一维随机变量的情况

相似，我们也只讨论离散型和连续型两大类。

ξ1·4随机向量的(联合)分布与边缘分布

1·1　二维离散型随机向量

定义1·1　若二维随机向量 ξ=（X，Y）可能取的值（注意，是有序数组）

$$(x_i, y_j)\ (i, j=1, 2, 3\cdots\cdots)$$

只有有限个或者可列个，则称 ξ为（二维）离散型离机向量，随机变量X，Y都称为 ξ的分量。ξ的可能取的值的集合叫做 ξ的可能值集，用E表示。

显然，若 ξ=（X，Y）是离散型的，则X，Y都是一维离散型随机变量；反过来也成立。

和随机变量的情况一样，我们更关心 ξ=（X，Y）取值的概率

$$P\{(X, Y)=(x_i, y_j)\}=P\{x=x_i, Y=y_i\}=p(x_i, y_i)=p_{ij}\quad (i, j=1, 2\cdots\cdots)\qquad(1.1)$$

我们称(1·1)为 ξ=(X，Y)的概率分布或联合分布，而称

X \ Y	y_1	y_3	……	y_j	……
x_1	p_{11}	p_{13}	……	p_{1j}	……
x_3	p_{21}	p_{22}	……	p_{2j}	……
⋮	i……				
x_i	p_{i1}	p_{i2}	……	p_{ij}	……
⋮	……				

$$
\text{或}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1j} & \cdots\cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots & p_{2j} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ p_{i1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & p_{ij} & \cdots\cdots \end{pmatrix} \qquad (1\cdot 2)
$$

为（X，Y）的概率分布表或分布列

例1·1　袋中有3个球，依次标有数字1，2，2每次摸出1个，无放回地摸二次，以X，Y分别记第1次第2次摸出球上标有的数字，求（X，Y）的分布列。

解　（X，Y）的可取值集为

$$\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

设

A=“第1次摸出标‘1’的球”，

B=“第2次摸出标‘1’的球”。

则

$$p_{11}=P\{(X,Y)=(1,1)\}$$
$$=P(A)P(B/A)=\tfrac{1}{3}\times 0=0$$
$$p_{12}=P\{(X,Y)=(1,2)\}=P(A)P(\overline{B}/A)$$
$$=\tfrac{1}{3}\times 1=\tfrac{1}{3}$$
$$p_{21}=P\{(X,Y)=(2,1)\}=P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$
$$=\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{3}$$
$$P_{22}=P\{X,Y)=(2,2)\}$$
$$=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{3}$$

所以所求分布列为

X \ Y	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

一般地，对二维离散型随机变量（X，Y）：

1、事件{X，Y）=（x_i y_j）}（i，j=1，2……）互斥；

2、事件{（X，Y）=（x_i，y_j）}可能是不可能事件；

3、事件$\sum_i\sum_j$ {（X，Y=（x_i.y_j））}是必然事件。

分布列（1.2）中p_{ij}具有如下性质：

（1）　$p_{ij}\geqslant 0$；

（2）　$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$。

（1）式显然成立；至于（2），利用概率的完全可加性，有

$$\sum_i\sum_j p_{ij}=\sum_i\sum_j P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}$$

$$=P\{\sum_i\sum_j\{(X,Y)=(x_i,y_i)\}\}$$

$$=P(U)\quad\text{（表示必然事件）}$$

$$=1$$

（X，Y）的联合分布全面地反映了（X，Y）的取

值情况，已知了（X，Y）的联合分布，就能求出有关事件的概率。

例1.1′ 例在1.1中，求下列事件的概率：

C＝“摸出两球标的数字相同”

D_k＝“第2次取出标有“k”的球”（$k=1,2$）

解 $P(C)=p_{11}+p_{22}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$P(D_1)=p_{11}+p_{21}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$P(D_2)=p_{12}+p_{22}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

对于随机向量，有时需要对其分量进行研究，比如，在例1.1′中，$D_k=\{Y=k\}$（$k=1,2$），求事件D_1，D_1的概率，就是对分量Y进行个别考察，为此我们引进

定义1.2 若（X，Y）的概率分布为（1·1），则

$$p_X(x_i)=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots) \qquad (1.5)$$

称为（X，Y）关于X的边缘分布；常列表表示为

X	x_1	x_2	……	x_i	……
P	$\sum_j p_{1j}$	$\sum_j p_{2j}$	……	$\sum_j p_{ij}$	…

(1.5)

同样，

$$p_Y(y_j)=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}$$

$$(j=,1,2\cdots\cdots) \qquad (1.6)$$

称为（Y，Y）关于Y的边缘分布，常列表表示为

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
P	$\sum\limits_i p_{i1}$	$\sum\limits_i p_{i2}$	$\cdots$	$\sum\limits_i p_{ij}$	$\cdots$

（X，Y）的联合分布及其关于X，Y的边缘分布可以用下面双行表来表示：

X＼Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	Σp_{1j}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	Σp_{2j}
$\vdots$	$\cdots\cdots$					$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	Σp_{ij}
$\vdots$	$\cdots\cdots$					
Σ	Σp_{i1}	Σp_{i2}	$\cdots$	Σp_{ij}	$\cdots$	

其中间部分是（X，Y）的联合分布；而边缘部分分别是关于 X，Y 的边缘分布，它们是由联合分布经过同一行或同一列的各数相加而得出来的。

比如，例1，1中（X，Y）的联合分布及边缘分布由右表给出

X＼Y	1	2	
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

由此可知，关于X及Y的边缘分布分别为

$$P\{X=k\}=\frac{k}{3} \quad (k=1,2);$$

$$P\{Y=k\}=\frac{k}{3} \quad (k=1,2)$$

与一维离散型随机变量情况相似。有

定义1·3 设(X, Y)是二维离散型随机向量，

$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij} \left(\begin{array}{l} i=1,2,\cdots\cdots \\ j=1,2,\cdots\cdots \end{array}\right)$$

则

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\leqslant x\\ y_j\leqslant y}} P\{X,Y)=(x_i,y_j)\}=\sum_{\substack{x_i\leqslant x\\ y_j\leqslant y}} p_{ij}$$

（这里是对所有满足 $x_i\leqslant x$, $y_j\leqslant y$的各点(x_i, y_j)求和）称为(X, Y)的分布函数。

比如，例1·1中的(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{当 } x<2,\ y<2 \\ \frac{1}{3} & \text{当} x\geqslant 2, 1\leqslant y<2 \text{或} 1\leqslant x<2,\ y\geqslant 2 \\ 1 & \text{当 } x\geqslant 2,\ y\geqslant 2 \end{cases}$$

定义1·4 设二维离散型随机变量(X, Y)的分布函数为F(x, y)则

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{x\to+\infty} F(x,y)$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{y\to+\infty} F(x,y)$$

分别称为（X，Y）关于X、Y的边缘分布函数

比如，例1.1中的（X，Y）关于X、Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{3} & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{1}{3} & 1\leqslant y<2\\ 1 & y\geqslant 2\end{cases}$$

显然，（X，Y）关于X、Y的分布函数也就是（X，Y）关于X、Y的边缘分布函数。

1·2　二维连续型随机变量

定义1·5　对于二维随机向量（X，Y），若存在非负函数 $p(x,y)$（$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$），使得

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)dxdy$$

则称（X，Y）为二维连续型随机向量。而 $p(x,y)$ 称为（X，Y）的（联合）分布密度（简称联合密度），$F(x,y)$ 称为（X，Y）的（联合）分布函数。

这里，我们只研究 $p(x,y)$ 至多在平面内有限条平滑曲线上不连续的情况。$p(x,y)$，$F(x,y)$ 具有如下性质：

1、$p(x, y) \geqslant 0$，$F(x, y) \geqslant 0$　　(1·7)

1、$F(+\infty, +\infty) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx, dy = 1 \qquad (1 \cdot 8)$$

$$\left.\begin{aligned} F(-\infty, y) &= \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 \\ F(X, -\infty) &= \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0 \\ F(-\infty, -\infty) &= \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} (1 \cdot 9)$$

其实

$$F(+\infty, +\infty) = P(-x < \infty + \infty$$
$$-\infty < y < +\infty) = P(U) = 1$$

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x, y) dx \; dy = 0$$

其余类推.

3、在 $p(x, y)$ 的连续点处，$F(x, y)$ 有二阶混合编导数 $\frac{\partial^2 F(xy)}{\partial x \partial y}$，且

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = p(x, y)$$

4、设 $D = \{(x, y): a < x < b, C < y < d\}$，则

$P\{(X, Y) \in D\} = P\{a < X < b,$

$$c < Y < d\} = \int_a^b \int_c^d p(x,y)\,dxdy$$

$(1\cdot 11)$

即二维随机向量（X，Y）落在平面上任一矩形区域D内的概率等于联合密度在D上的二重积分，亦等于以曲面 $y = p(x, y)$（称之为(X，Y)的分布曲面）为顶，以平面区域D为底的曲顶柱体体积。

例1·2　设（X，Y）的联合密度

$$p(x,y) = \begin{cases} C\,e^{-(x+y)} & \text{当} \geqslant x\,0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求：（1）常数C；

（2）分布函数F（x，y）；

（3）$P\{0 < X < 1,\ 0 < Y < 1\}$

解　（1）由（1.8）有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} c\,e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$= C\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-y}\,ay$$

$$=C\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty}=C$$

$\therefore\quad C=1$

（2） $$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u, v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y e^{-(u+v)}dudv & \text{当 } x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & \text{当 } x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（3） $P\{0<X<1, 0<Y<1\}$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{-(x+y)}dxdy$$

$$=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 e^{-y}dy=-e^{-x}\Big|_0^1\cdot(-e^{-y})\Big|_0^1$$

$$=(1-e^{-1})^2$$

定义1·6　设二维连续型随机向量（X, Y）的分布函数为F（x, y），联合密度为 p（x, y），则

$$
\left.\begin{aligned}
F_X(x) &= F(X,+\infty)=\lim_{y\to+\infty} F(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} p(u,y)\,du\,dy \\
F_Y &= F(+\infty,y)=\lim_{X\to+\infty} F(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} p(x,v)\,dx\,dv
\end{aligned}\right\} \quad (1\cdot 12)
$$

分别称为（X，Y）关于X，Y的边缘分布函数

又

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy$$

$$p_X(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx$$

分别称为（X，Y）关于X，Y的边缘分布密度。

比如，在例1,2中，（X，Y）关于X，Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{--x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

边缘分布密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

1·3 随机变量的独立性

我们在研究随机现象时，经常碰到这样一些随机变量其中一些随机变量的取值情况对其余随机变量的取值情况没有什么影响。例如，两个人分别向一目标射击，各自命中的环数X，Y就属于这种情况。为了研究这类情况，在事件的独立性概念的基础上，引进下列定义

定义1·7 设（X，Y）是二维型离散随机向量：

$$P\{X=x_i,\quad Y=y_j\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$$

如果对于任意的正整数i，j，事件$\{x=x_i\}$与$\{Y=y_j\}$相互独立，即

$$
\left.\begin{aligned}
&P(\{X=x_i\},\ \{Y=y_j\}) \\
&\quad = P\{X=x_i,\ Y=y_j\} \\
&\quad = P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\} \\
&\qquad (i,\ j=1,2,\cdots\cdots) \\
&\text{亦即} \\
&p(x_i,\ y_j)=p_X(x_i)\,p_Y(y_j) \\
&\qquad (i,\ j=1,2,\cdots\cdots)
\end{aligned}\right\}\ (1\cdot 13)
$$

则称离散型随机变量X与Y相互独立。

例1·3 袋中装有2只白球，3只黑球，进行有放回的摸球，定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1 & \text{第1次摸出白球;}\\ 0 & \text{第1次摸出黑球}\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}1 & \text{第2次摸出白球}\\ 0 & \text{第2次摸出黑球}\end{cases}$$

则（X，Y）的联合分布与边缘分布由下表给出

X \ Y	0	1	$p_X(x_i)$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_Y(y_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

显然，X与Y相互独立。

注意，在例1·1中，由于

$$P(1,1)=0\neq p_X(1)\cdot p_Y(1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

可见，X与Y不相互独立，

随机变量的独立性是概率论中的一个重要概念。考察二维离散型随机向量的联合分布 与边缘分布的关系 ：显然，联合分布决定了边缘分布；反之，边缘分布能否决定联合分布呢？一般说来是不能的。但是当二个分量X，Y独立时，（X，Y）的联合分布表中各数 $p(x_i\ y_j)$ 是其两个边缘分布表中相应的两数 $p_X(x_i)$ 与 $p_Y(y_j)$ 的乘积：$p(x_i, y_j)=p_X(x_i)\times p_Y(y_j)$，可见，当X，Y独立时，边缘分布也能确定联合分布。

定理1·1 设 （X，Y）是二维离散型随机向量：

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p(x_i, y_j)$$

且X，Y独立，则对于任意 $a<b$，$C<d$，有

$$P\{a<X<b, C<Y<d\}=p\{a<X<b\}\cdot p\{C<Y<d\} \quad (1\cdot14)$$

证 明 任给 $a<b$，$C<d$，令

$$A=\{a<x_i<b,\ i=,1,2,\cdots\}$$

$$B=\{C<y_j<d,\ j=1,2,\cdots\}$$

由（1 13）知