自主创新
方法先行

伴你学数学

——线性代数及其应用导学

李乃华　赵芬霞　赵俊英　李景焕　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

伴你学数学

——线性代数及其应用导学

Ban Ni Xue Shuxue
Xianxing Daishu jiqi Yingyong Daoxue

李乃华　赵芬霞　赵俊英　李景焕　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与《线性代数及其应用》(李乃华等编著,高等教育出版社出版)相配套的导学教材,是科技部项目“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”和高等学校大学数学教学研究与发展中心项目“基于创新人才培养的大学数学课程教学体系的统筹设计与实践”的研究成果。

全书分为五章,内容包括行列式,矩阵,向量、线性方程组,矩阵的对角化,二次型。每一章通过课前预习导引,整理、归纳和提升,帮助与提高,走进数学四个模块实现“翻译”、“梳理”、“答疑解惑”、“启发开拓”四项功能。内容顺序的编排,既注意到了与教材的同步性,又注意到了读者使用的方便性,与教材具有相对独立性。

本书可作为非数学类本科专业学生学习“线性代数”的参考书,对参加全国硕士研究生入学统一考试的学生也具有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用导学 / 李乃华等编. -- 北京 : 高等教育出版社, 2012.8
(伴你学数学)
ISBN 978-7-04-034845-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第145679号

策划编辑 贾翠萍 责任编辑 贾翠萍 封面设计 张 楠 版式设计 范晓红
插图绘制 尹 莉 责任校对 刁丽丽 责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	大厂益利印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	21.5	版 次	2012年8月第1版
字 数	390千字	印 次	2012年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	33.60元

物 料 号 34845-00

前　言

本套书是与罗蕴玲、李乃华、于义良等编著的《高等数学及其应用》《线性代数及其应用》《概率统计及其应用》相配套的导学教材，是科技部项目“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”和高等学校大学数学教学研究与发展中心项目“基于创新人才培养的大学数学课程教学体系的统筹设计与实践”的研究成果。本套导学教材包括《伴你学数学——高等数学及其应用导学》《伴你学数学——线性代数及其应用导学》和《伴你学数学——概率统计及其应用导学》，主要面向使用该套主教材的学生，也可供教师参考。

随着社会的不断进步与高新技术的不断发展，数学作为一门具有高度抽象性、严谨逻辑性和广泛应用性的学科，其在培养人的综合素养方面的地位与作用日益提高，使得社会各界对高等学校的数学教育愈加关注。我们编写的这套导学教材，就是为了适应这种变化，更好地满足教师和学生的教与学需求，其具有“翻译”、“梳理”、“答疑解惑”、“启发开拓”四项功能，在“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”方面做了有益的尝试。

本套导学教材内容顺序的编排，既注意与主教材的同步性，又注意读者使用的方便性，与主教材具有相对独立性。每章包括如下四部分内容：

- **课前预习导引**　包括教学大纲解读和考研大纲解读及问题搜索；
- **整理、归纳和提升**　包括知识整理，技能归纳和能力提升；
- **帮助与提高**　包括主教材中(A)类和(B)类习题的解答及考研连线；
- **走进数学**　让学生感受数学文化、领会数学精神。

本套导学教材旨在将科学思维、科学方法的内涵融入数学基础课课程体系、教学内容和教学方法的改革与实践中，充分发挥数学对学生能力、素质培养的功效；让学生在课程学习中可以常“回味”和多“联想”，帮助学生掌握重点、领会问题的实质，引导学生自觉思考，启迪学生发现问题、分析问题和解决问题，更好地掌握和巩固基础知识与基本技能，提高数学素养，开阔视野。本套导学教材具有如下特色：

1. 教与学融合：通过对教学大纲解读和编者提出问题及读者自设问题的方式，让学生明确学习目标，引导学生自主思考，在质疑、解疑中提升学生对知识的理解，激活求知欲；

2. 导与悟并行：通过对知识点以表格流程和技能归纳的形式进行梳理，帮

助学生形成一个清晰完整的知识结构体系，在掌握知识的同时掌握各种题型的基本解题方法和技巧，做到有的放矢，触类旁通；与此同时，通过“停下来想一想栏目解惑”、“易错警示（辨错作答）”以及“思想方法释义”模块，把教材中不易理解的抽象知识“翻译”成通俗、具体的知识，帮助学生更直接、更有效地进行学习，领悟数学思想方法，达到增强学生学习能力、促进学生经历观察、试验、猜测、尝试、推理、交流、反思等活动的目的。

3. 面与点兼备：通过对教材分层习题（A）、（B）的详解和考研连线中对基础题、拓展题的分类设置，使不同层级的学生都开卷有益，以满足学生差异性发展的需求。

4. 探与行共存：通过对基于课程所选择的理论素材、实际应用、特殊要点等问题进行追本溯源、递进剖析、猜想试探，讲清楚数学思维和数学方法，讲明白应用的条件、方法和结果，开拓学生的思路和视野，培养学生的洞察力、理解力以及探索和发现问题的能力；让学生体会数学的魅力，真正走进数学、应用数学。

天津市教育委员会高教处、全国高等学校教学研究中心及高等学校大学数学教学研究与发展中心对项目的研究给予了热心的指导和资助，在他们的关心和支持下，项目的研究与实践得以顺利进行，高等教育出版社的同志对本书的出版给予了热情的支持和帮助，没有他们的指导和出色编辑，就不可能有本套导学教材的面世。在此，我们一并致以最诚挚的感谢。

天津商业大学理学院长期从事经济管理类专业线性代数教学建设的老师们在该项目的教学研讨和实践中付出了辛勤劳动，正是他们的积极支持和鼓励才使我们以充沛的精力高标准地完成了本书的编写工作。在此，我们致以最诚挚的谢意。

我们期盼这套教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。同时，热情欢迎广大师生和读者提出批评与建议，让我们共同为持续提高数学课程的教学质量而不懈努力。

编者

2012.01.15

目　录

第1章 行列式

课前预习导引

一、大纲解读

1. 教学大纲解读

(1) 教学内容

n 级排列,逆序数,奇偶排列,对换,n 阶行列式的定义;转置行列式,行列式的性质及推论;余子式,代数余子式,行列式展开定理及推论,范德蒙德行列式,拉普拉斯定理;克拉默法则及两个推论.

(2) 教学要求

① 了解全排列、逆序数、代数余子式的概念;了解 n 阶行列式的定义;掌握行列式的基本性质.

② 会应用行列式定义及性质和行列式展开定理计算较简单的行列式.

③ 了解克拉默法则及推论.

2. 考研大纲解读(2012 版)

(1) 考试内容

行列式的概念和基本性质,行列式按行(列)展开定理.

(2) 考试要求

① 了解行列式的概念.

② 掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开定理.

③ 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、问题搜索

第 1.1 节 n 阶行列式

问题:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4$ 是否正确?如果不对的话,错在哪里?

2. $1,2,\cdots,n$ 怎样排列逆序数最大？等于多少？

3. 计算4阶行列式时，是否可用形如三阶行列式的对角线法则？

4. 行列式中，行与列的地位是否对等？

读者的问题：

第1.2节 行列式的性质

问题：

1. 行列式有哪些性质？这些性质主要有哪些用处？

2. 利用性质将行列式化为何种形式就可以完成计算？

3. 计算行列式的主要方法有哪些？这些方法一般在什么情况下使用？

读者的问题：

第1.3节 行列式按行(列)展开

问题：

1. 行列式展开定理的内容是什么？利用展开定理计算行列式时需要注意哪些问题？

2. 行列式展开定理的推论是什么？行列式展开定理与推论的不同点是什么？

3. 何时利用拉普拉斯定理计算行列式比较简单？

4. 本节有哪些计算行列式的新方法？这些方法一般在什么情况下使用？

读者的问题：

第1.4节 克拉默法则

问题：

1. 克拉默法则适用于哪类方程组的求解？

2. 克拉默法则的推论有哪些应用？

3. 什么情况下应用克拉默法则解方程组比较方便？

读者的问题：

整理、归纳和提升

一、知识整理

进入本章学习应具备的知识
1. 方程组;2. 排列

↓

本章(行列式)学习的知识

概念与结论:

1. 二阶行列式的定义:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

三阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32};$$

n 阶行列式的定义:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

2. 行列式的性质:

(1) $D = D^{\mathrm{T}}$;

(2) 互换行列式的两行(列),行列式改变符号;

(3) 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面;

(4) 若行列式的某一行(列)的元素都是两个数的和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余位置的元素不变;

(5) 将行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

3. 余子式与代数余子式:

n 阶行列式 D 中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列的元素后,其余元素按原来的顺序排列所得的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij};$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

行列式按行(列)展开:$D_n \xlongequal{\text{按行展开}} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

$\xlongequal{\text{按列展开}} a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

推论(零值定理):$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0(i \neq s)$,

$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0(j \neq t)$.

4. k 阶子式、k 阶子式的余子式与代数余子式：

在 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行、k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按原来顺序构成的一个 k 阶行列式 N，称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去 k 行、k 列后，余下的元素按原来顺序构成的一个 $n-k$ 阶行列式 M，称为 k 阶子式 N 的余子式；而 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M$ 为 N 的代数余子式，这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 分别为 D 的 k 阶子式 N 所在的行、列标号.

拉普拉斯定理：$D = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t\left(t = \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)$，其中 A_i 是 k 阶子式 $N_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式.

公式与法则：

1. 几个特殊行列式的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

范德蒙德行列式：
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1}(x_i - x_j).$$

2. 克拉默法则：如果 n 元线性方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，则方程组有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n$，其中 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

结束本章学习后可进一步学习的本课程知识
1. 方阵；2. 向量 方程组；3. 特征值；4. 二次型.

二、技能归纳

1. 计算逆序数的常用方法

计算一个 n 阶排列的逆序数，只要考虑每一元素 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$，若排在 i_k 前面且比 i_k 大的元素共有 t_k 个，则 i_k 与这些元素共构成 t_k 个逆序. 因此，排列的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

称逆序数为偶数的排列为偶排列，逆序数为奇数的排列为奇排列.

例 1 求下列排列的逆序数，并确定其奇偶性：

(1) 2143765；(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) $\tau(2143765)=0+1+0+1+0+1+2=5$，所以 2143765 为奇排列.

(2) 所给排列中 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 的逆序个数都是 0，故只要计算其余数的逆序个数.

2 前面有 $n-1$ 个比它大的数，故其余元素与 2 构成逆序的个数为 $n-1$；4 前面有 $n-2$ 个比它大的数，故其余元素与 4 构成逆序的个数为 $n-2$；…；$2(n-1)$ 前面有 1 个比它大的数，故 $2(n-1)$ 的逆序个数为 1；$2n$ 前面没有比它大的数，故其余元素与 $2n$ 构成逆序的个数为 0. 因此，原排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 和 $4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，故原排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 和 $4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，故原排列为奇排列.

例 2 (1) 选择 i,j 使 $1i25j4869$ 成偶排列；

(2) 选择 i,j,k 使 $8i2jk3159$ 成偶排列.

解 (1) 在排列中，i,j 只能在 3，7 中选择，若选 $i=3,j=7$，则 $\tau(132574869)=5$，为奇排列. 由于对换改变排列的奇偶性，所以选 $i=7,j=3$.

(2) 同(1)可得 i,j,k 的三组取法：

① $i=4,j=6,k=7$；② $i=7,j=4,k=6$；③ $i=6,j=7,k=4$.

2. 计算行列式的常用方法

计算行列式的关键，在于根据给定行列式的规律特征，利用行列式的定义、性质和展开定理等，将行列式化为简单形式，如上(下)三角形行列式、范德蒙德行列式等.

(1) 定义法：适用于含零元素较多的简单、特殊行列式的计算.

例3 写出4阶行列式 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3，x^4 的系数.

解 由行列式的定义，4阶行列式的每一项由不同行不同列4个元素的乘积组成，含 x^4 的项是由位于该行列式主对角线上的4个元素的乘积组成，故 x^4 的系数为2；含 x^3 的项在行列式中的位置为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，即 $x\cdot 1\cdot x\cdot x$，其逆序数 $\tau(2134)=1$，即含 x^3 的项为 $(-1)x^3$，故 x^3 的系数为 -1.

例4 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于 D_n 中每一行、每一列只有一个元素不为0，故取自不同行、不同列 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中至多有一项不为零，所以可用行列式的定义计算. 由定义，有

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式中只有当 $j_1=2,j_2=3,\cdots,j_{n-1}=n,j_n=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$，所以

$$D_n=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n1}=(-1)^{n-1}1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{n-1}n!.$$

例5 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

解 由定义，得 $D_n=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，和式中只有当 $j_1=n$，$j_2=1,\cdots,j_{n-1}=n-2,j_n=n-1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$，所以

$$D_n=(-1)^{\tau(n12\cdots(n-1))}a_{1n}a_{21}a_{32}\cdots a_{n(n-1)}=(-1)^{(n-1)}a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}.$$

注意：上述两例也可采用其他计算方法，如行列式按行（列）展开定理等. 定义法主要用来计算或证明一些结构十分简单的行列式，一般情况不采用定义法.

(2) 三角化法：利用行列式的性质将其化为上（下）三角形行列式，进而得到行列式的值.