$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

新世纪大学数学系列教材

概率论与数理统计

GAI LV LUN YU SHU LI TONG JI

主　编　石永生　刘晓真

副主编　张新祥　罗　满　罗晓晖　任煜东

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

河南大学出版社

HENAN UNIVERSITY PRESS

GAI LV LUN YU SHU LI TONG JI

概率论与数理统计

主　编　石永生　刘晓真

副主编　张新祥　罗　满

罗晓晖　任煜东

河南大学出版社

·郑州·

内 容 简 介

本书根据高等院校经管类本科专业概率论与数理统计课程的教学大纲和考研大纲编写而成，是新世纪大学数学系列教材之一. 本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法，主要内容有随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析等. 书中每章配有 A，B 两组习题，书末附有习题参考答案，在附录中适当增添本课程数学问题的计算机求解内容.

本书的主要特色是结构清晰，概念准确，深入浅出，通俗易懂，可读性强，使读者易于理解和接受. 在数学思想和方法的讲解过程中，注重与实际应用背景相结合，强调应用能力的培养. 在内容安排上还考虑了学生考研的需要，因此本书可作为高等学校经管类专业本科生的教材，也适合作为非数学类其他各专业学生和相关课程教师的参考用书，适合考研学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／石永生，刘晓真主编. 一郑州：河南大学出版社，2012.9
新世纪大学数学系列教材
ISBN 978-7-5649-0981-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①石…②刘… Ⅲ.①概率论一高等学校一教材②数理统计一高等学校一教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 210150 号

责任编辑 朱建伟
责任校对 牛 伟
封面设计 郭 灿

出版发行 河南大学出版社
地址：郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号　　邮编：450046
电话：0371-86059701(营销部)　　网址：www.hupress.com
排　　版 河南新华印刷集团有限公司
印　　刷 郑州海华印务有限公司
版　　次 2012 年 9 月第 1 版
印　　次 2012 年 9 月第 1 次印刷
开　　本 787mm×1092mm　1/16
印　　张 20.25
字　　数 496 千字
印　　数 1-6000 册
定　　价 34.90 元

前　言

概率论与数理统计是财经、管理类等学科的专业基础课，也是研究生入学考试的必考内容之一. 随着高等教育事业的发展和教育改革的不断深入，高等教育对基础课的内容也提出了一系列新的要求. 教材改革作为教育改革的基本内容，愈来愈受到学校和教育人士的关注. 本书编者根据财经、管理类等学科的发展需要，结合多年来的教学实践，广泛参阅国内外有关著作，依据高等院校经管类本科专业概率论与数理统计课程的教学大纲和考研大纲，组织编写了这本《概率论与数理统计》教材.

本书具有以下主要特点：

1. 注重基本理论、基本知识的介绍和基本技能的训练，概念引入力求自然、简洁明了，针对一些较难问题的提出、不易理解的概念和不易掌握的方法均给出了注释，力求使抽象的问题变得通俗易懂.

2. 尽量吸收本学科新的、比较成熟的研究成果，充实了概率论与数理统计在经济管理中的应用.

3. 书中配有较多的典型例题，题型多样、内容广泛，使读者有更多的解题训练机会，以培养分析和解决问题的能力.

4. 本书各章配备习题，针对性强，又兼顾前后内容的复习和巩固，具有典型性和代表性. 习题分为 A，B 两组，A 组为传统题型，B 组为标准化题型，难度高于 A 组，以备读者进一步学习之用.

5. 为适合不同专业学习和考研的需要，保持学科本身的系统性，针对数学基础要求较高的专业或学生准备了带“ * ”号的部分章节，可以作为选学内容，使用时可视具体课时情况酌情取舍.

6. 为了提高读者对概率论与数理统计知识的应用能力，适当反映统计方法在实际应用中的进展，同时为计算机辅助教学和进行数学实验做准备，以附录形式增添了利用计算机解决数学问题的内容，简介 MATLAB 在该课程中的应用.

本书由石永生、刘晓真担任主编. 参与编写的作者具体分工如下：任煜东第 1 章、第 5 章，罗满第 2 章、第 4 章，石永生第 3 章，刘晓真第 6 章、第 7 章，罗晓晖第 8 章、第 9 章，张新祥附录、附表、习题解答.

本书编写过程中，得到河南大学出版社、河南财经政法大学教务处及参与授课教师的大力支持和帮助，在此一并感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，祈望同仁和广大读者不吝指正.

编　者

2012 年 8 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象.

一类现象是在一定的条件下必然会发生某种确定的结果,称为确定性现象. 例如,在标准大气压下,纯水加热到 100℃ 必然沸腾;在没有外力作用的条件下,物体必然保持静止或匀速直线运动状态,等等.

另一类现象是在一定的条件下进行试验和观察时,其结果不能事先确定,称为随机现象. 例如,向桌面上投掷一枚硬币,可能正面向上,也可能反面向上,在投掷之前不能断定必然会出现哪一面.

随机现象广泛存在. 例如:同一个商店,销售同一种货物,每天的销售量却不相等;在同一台车床上,按同一个设计要求,生产出同一种零件,其尺寸也有差别;面积相等的几块土地上种植同一品种的小麦,即使耕作条件一样,产量也有高有低. 这些都是随机现象.

随机现象在一次试验或观察中结果不确定,呈现出偶然性,但在大量的试验和观察中却呈现出某种规律性. 例如,重复抛掷一枚均匀的硬币时,出现正面向上的次数约占一半.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

§1.1　随机试验、样本空间及随机事件

一、随机试验

对随机现象进行的实验或观察叫做随机试验,简称试验,通常用字母 E 表示. 随机试验具有如下三个特征:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,每次试验只能出现其中的一个结果,并且事先不能断定出现哪一个结果;

(3) 能够明确指出试验的所有可能结果.

对于我们这里的试验,不必过多地考虑其具体含义. 例如,可以抛掷一枚硬币,也可以抛掷三枚硬币,或者无限多次地抛掷一枚硬币. 但在我们所讨论的概率问题中,只涉及一个试验. 所以连续抛掷三次硬币的试验,只能作为一次试验,不能认为是三次试验.

二、样本空间和随机事件

随机试验中每个可能出现的结果都叫做样本点;全体样本点构成的集合叫样本空间;样本空间的子集,即某些实验结果的集合,称为随机事件,简称事件.具有不可数无限多个实验结果的样本空间中,有些子集不可能定义有意义的概率.但实际上我们一般不会遇到这种特殊情况,所以我们不必考虑这种特殊问题.

通常用 ω 表示样本点,用 Ω 表示样本空间,用 A,B,C 等表示随机事件.

进行一次试验,必然会出现一个样本点,而且只出现一个样本点.如果在一次试验中,某个事件包含的样本点中有一个出现,就称该事件在这次试验中发生了.

样本空间 Ω 本身和它的补集 $\varnothing$ 都可以作为事件,Ω 称为必然事件,$\varnothing$ 称为不可能事件.如果某个事件只包含一个样本点,即单点集合 $\{\omega\}$ 称为基本事件.

例 1 掷一枚硬币,观察哪个面朝上,有两个可能的结果:正面和反面.若用 ω_1 表示正面,ω_2 表示反面,则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 一次掷两枚硬币或者将一枚硬币掷两次,这个试验的样本点为

$$\omega_1=(\text{正面},\text{正面}),\omega_2=(\text{正面},\text{反面}),$$
$$\omega_3=(\text{反面},\text{正面}),\omega_4=(\text{反面},\text{反面}),$$

样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.事件 A 表示"第一次出现正面",则 $A=\{\omega_1,\omega_2\}$;事件 B 表示"两次出现同一面",则 $B=\{\omega_1,\omega_4\}$;事件 C 表示"至少有一个正面",则 $C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.

例 3 连续投掷一枚硬币,直到出现正面为止.若用"0"表示出现反面,"1"表示出现正面来记录每次投掷的结果,则这个试验的可能结果有:

$\omega_1=$"1"(第一次出现正面),

$\omega_2=$"01"(第一次出现反面,第二次出现正面),

……

$\omega_n=$"0…01"(前 $n-1$ 次出现反面,第 n 次才出现正面),

……

这个试验有无穷多个可能结果,样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$.

例 4 若检查灯泡的使用寿命(小时),那么 $[0,+\infty)$ 中的每一个实数都有可能是某一个灯泡的寿命,因而样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$.事件 $A=[1500,+\infty)$ 表示"使用寿命超过 1500 小时".如果某个灯泡的使用寿命为 2000 小时,就称事件 A 发生了.

对于同一个试验,根据我们关心的问题不同或分类方法不同可以建立不同的样本空间.当确定一个样本空间的时候不同的试验结果必须互相排斥,这样,在试验过程中只可能产生一个结果.例如在掷骰子的试验中,不能把 $\{1,3\}$ 定义成一个结果,同时又把 $\{1,4\}$ 也定义成一个结果.如果这样定义,当掷得 1 点的时候,就不能确定出现哪个结果.另一方面,确定样本空间的时候,不能遗漏其中的任何一个结果.

例 5 掷一枚骰子,观察其出现的点数.定义 $A_1=\{1\}$,$A_2=\{2,3,4,5,6\}$,$A_3=\{1,3,5\}$,$A_4=\{2,4,6\}$,则 $\{A_1,A_2\}$ 是样本空间,$\{A_3,A_4\}$ 也是样本空间,但 $\{A_2,A_3\}$ 不是样本空间,$\{A_1,A_4\}$ 也不是样本空间.

例6 连续投掷一枚硬币5次,每一次投掷的结果是一个长度为5的正反序列,有2^5个样本点组成样本空间. 但若只考虑正面向上的次数,样本空间可由6个(即0,1,2,…,5)试验结果组成.

许多试验本身具有序贯特征. 例如连续两次抛掷一枚骰子,其样本空间有两种等价的表示方法,如图1-1所示. 左图用二维格子点表示,右图用序贯树形图表示. 我们通常用序贯树形图来刻画样本空间中的试验结果,优点是可以表示试验的顺序特征. 在树形图中,每一个末端,或者从根部到末端的每一条路径表示一个试验结果.

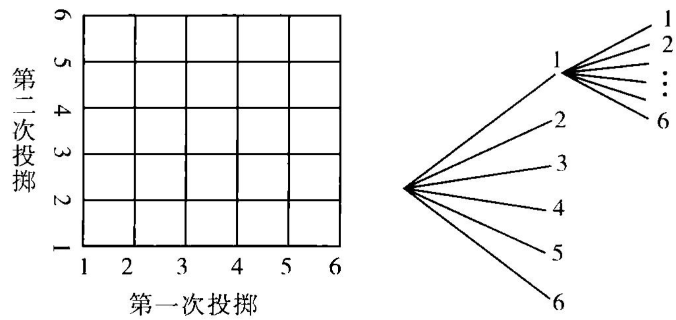

图1-1

三、事件的关系和运算

一个试验可以定义许多个随机事件,它们之间往往有一定的联系,我们需要研究这些事件之间的关系并规定事件之间的运算.

1. 事件的并(和)

事件A与事件B至少有一个发生这一事件称为A与B的和事件(或并事件),记为$A+B$或$A\cup B$. 从集合角度看,$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$或$\omega\in B\}$(图1-2).

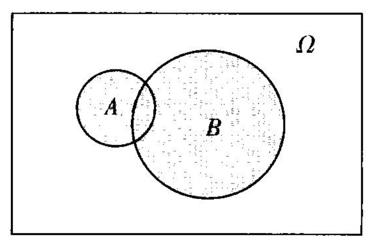

图1-2

类似地,n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件记为$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示这$n$个事件中至少有一个发生.

2. 事件的交(积)

事件A与事件B同时发生这一事件称为A与B的积事件(或交事件),记为AB或$A\cap B$. 从集合角度看,$A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$且$\omega\in B\}$(图1-3).

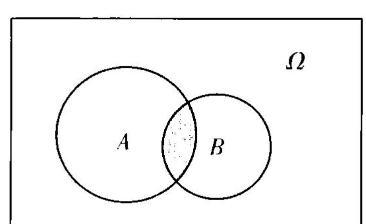

图1-3

类似地,n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$或$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示这$n$个事件同时发生.

3. 对立事件(逆事件)

称事件A不出现这一事件为A的对立事件(逆事件),记为$\overline{A}$. 用集合表示,$\overline{A}=\{\omega\mid\omega\in\Omega$

且 $\omega \notin A\}$（图 1 - 4）.

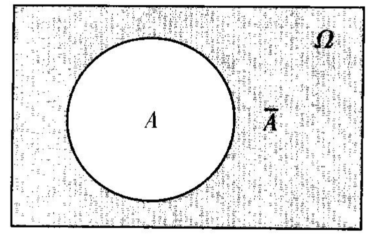

图 1 - 4

由定义可知，A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}} = A$，且 $A \cup \overline{A} = \Omega$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$. 显然，$\overline{\Omega} = \varnothing$，$\overline{\varnothing} = \Omega$.

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生这一事件称为 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$. 从集合角度看，$A - B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$（图 1 - 5）.

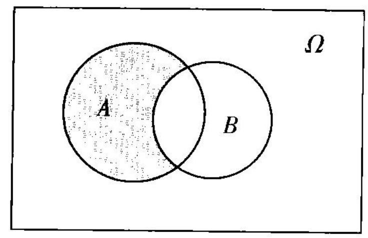

图 1 - 5

显然，$A - B = A - AB = A \cap \overline{B}$.

5. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. $A \subset B$ 意味着 A 是 B 的子集. 包含关系可以用图 1 - 6 表示.

例如，考察某动物的年龄，事件 A 表示“存活 3 年的动物”，事件 B 表示“存活 5 年的动物”. 如果用 X 表示这种动物的年龄，则事件 $A = \{X \geqslant 3\}$，$B = \{X \geqslant 5\}$，于是 $B \subset A$.

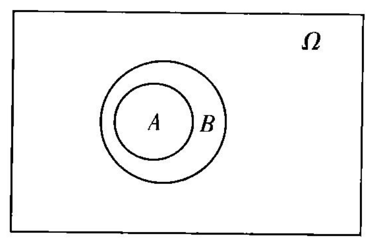

图 1 - 6

显然对于任何事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 $A = B$.

6. 互不相容（互斥）事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称 A 与 B 是互不相容事件（或互斥事件）. 从集合角度看，A 与 B 互不相容，即 $A \cap B = \varnothing$（图 1 - 7）.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任何两个事件都互不相容，即 $A_i \cap A_j = \varnothing$（$i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$），则称这 n 个事件互不相容.

7. 完备事件组（分割）

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，并且它们的和是必然事件，则称这 n 个事件构成一个完备事件组（分割）（图 1 - 8）.

A 和 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

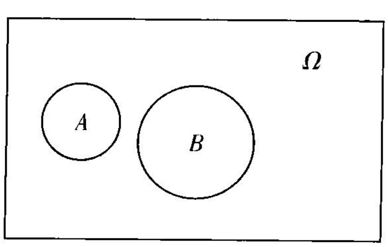

图 1 - 7

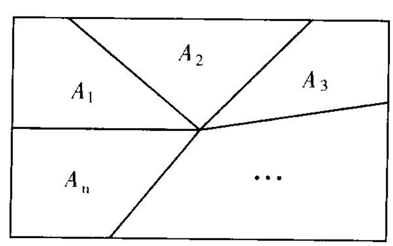

图 1 - 8

四、事件的运算性质

事件的运算性质和集合的运算性质是一样的. 下面列举的运算性质可以由运算的定义直接证得.

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) $A - B = A \cap \overline{B}$.

(5) 对偶律(摩根律) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对偶律可以推广到多个的情形:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 7 连续三次向同一目标射击,用"1"表示击中目标,用"0"表示未击中目标,则样本空间如图 1-9 所示. 若 $A_i(i = 1,2,3)$ 表示第 i 次击中目标,则

$$A_1 \cup A_2 = \{111,110,101,100,011,010\}$$

表示前两次射击中至少有一次击中目标,

$$A_1 \cap A_2 = \{111,110\}$$

表示前两次都击中目标;

"恰好有一次击中目标" = $\{100,010,001\}$.

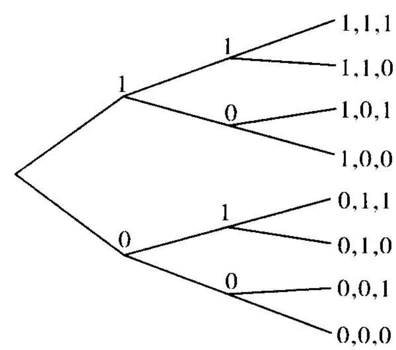

图 1-9

例 8 连续掷两次骰子,事件 A 表示"第一次得到的点数不超过 3,第二次得到的点数不小于 4",$\overline{A}$ 表示什么事件?

解 设 A_1 表示"第一次得到的点数不超过 3",A_2 表示"第二次得到的点数不小于 4",则 $A = A_1 \cap A_2$. 用集合表示,$A = \{X_1 \leqslant 3\} \cap \{X_2 \geqslant 4\}$($X_1, X_2$ 表示第一次、第二次得到的点数). 于是,$\overline{A} = \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \{X_1 \geqslant 4\} \cup \{X_2 \leqslant 3\}$,即 $\overline{A}$ 表示"第一次得到的点数不小于 4 或第二次得到的点数不超过 3".

§1.2　事件的概率

一、概率的定义

假定已经确定了样本空间以及与之相联系的试验，对于每一个事件 A，我们确定一个实数 $P(A)$ 来刻画它发生的可能性的大小，称为概率. 概率是定义在事件（或集合）上的函数（通常称为测度），必须满足下面的几条公理：

（1）（非负性）对一切事件 A，满足 $P(A) \geqslant 0$.

（2）（可加性）设 A，B 是两个互不相容的事件，则它们的并集满足

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

若 $A_1, A_2, \cdots$ 是一个互不相容的事件序列，则它们的并集满足

$$P(A \cup B \cup \cdots) = P(A) + P(B) + \cdots$$

（3）（归一性）样本空间 Ω（即必然事件）的概率为 1，即 $P(\Omega) = 1$.

概率的更具体、更直观的解释是频率. 比如 $P(A) = \dfrac{2}{3}$ 表示在大量重复试验中事件 A 出现的频率大约是$\dfrac{2}{3}$. 历史上有人进行过投掷一枚硬币的试验，下表列出其结果：

实验者	投掷次数 N	“正面向上”次数 M	频率 M/N
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

试验结果表明，正面出现的频率在 0.5 左右摆动. 第 5 章将重新讨论这种解释.

概率的很多重要性质没有包含在公理系统中，因为它们可以从公理系统中推导出来. 例如，由归一性和可加性可以得到

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing),$$

于是，

$$P(\varnothing) = 0.$$

由 $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ 得到

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

对于 n 个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，反复利用可加性，可得到

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

后面将讨论更多的性质.

例 1　掷一枚硬币,有两个可能的结果:正面和反面.若用 ω_1 表示正面,ω_2 表示反面,则样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$,事件为

$$\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \varnothing.$$

如果硬币是均匀的,正面和反面出现的机会相同,这两个结果出现的概率应该相同,即 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$.由可加性和归一性知

$$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) = 1,$$

由此可得

$$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1, P(\{\omega_1\}) = 0.5, P(\{\omega_2\}) = 0.5, P(\varnothing) = 0.$$

显然,以上建立的概率满足三条公理.

例 2　依次抛掷三枚硬币,用"1"表示正面向上,"0"表示反面向上,样本空间为

$$\Omega = \{111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000\}.$$

如果上述 8 种结果出现的可能性相同,根据可加性和归一性,每个结果的概率为 $\frac{1}{8}$.于是根据三条公理,任何事件的概率等于 $\frac{1}{8}$ 乘以该事件中包含的结果数.例如事件 A 表示"只有一次正面向上",则 $A = \{100, 010, 001\}$,则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{100, 010, 001\}) \\ &= P(\{100\}) + P(\{010\}) + P(\{001\}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

例 3　若 A 发生的概率为 0.6,A 与 B 都发生的概率为 0.1,A 与 B 都不发生的概率为 0.15,求:(1) A 发生但 B 不发生的概率;(2) B 发生但 A 不发生的概率;(3) A 与 B 至少有一个发生的概率.

解　样本空间可以用下面 4 个结果表示(图 1 - 10):$\Omega = \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$.根据题意得

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0.6;$$

$$P(A \cap B) = 0.1;$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.15.$$

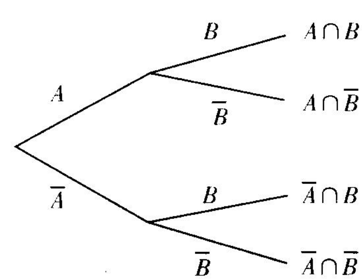

图 1 - 10

结合归一性公式

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1,$$

得到 $P(A \cap B) = 0.1, P(A \cap \overline{B}) = 0.5, P(\overline{A} \cap B) = 0.25, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.15$.

(1) A 发生但 B 不发生的概率为 $P(A \cap \overline{B}) = 0.5$;

(2) B 发生但 A 不发生的概率为 $P(\overline{A} \cap B) = 0.25$;

(3) A 与 B 至少有一个发生的概率为 $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=0.85$.

二、古典概型

如果试验具有如下性质:

(1) 有限性:只有有限个样本点;

(2) 等可能性:每个样本点在试验中出现的机会相等;

我们可以按照以下的方法建立概率模型. 设它的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,根据归一性和可加性,有

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n.$$

这样对于每一个事件 A,可以按照下面方法计算概率:

古典概型:设样本空间由 n 个等可能的实验结果组成,则对任意事件 A,对应的概率 $P(A)$ 可由下式计算:

$$P(A)=\frac{\text{含于事件 }A\text{ 的基本事件数}}{n}.$$

例 4 连续两次投掷一枚均匀的骰子(图 1 - 11)有 36 个等可能的结果,每个结果出现的概率为 1/36. 计算某一事件 A 的概率的时候,必须数清楚 A 中包含的试验结果数(基本事件数),然后除以 36 得到事件 A 的概率. 下面计算几个事件的概率:

$$P(\{\text{两次点数之和为偶数}\})=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},$$

$$P(\{\text{两次点数之和为奇数}\})=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},$$

$$P(\{\text{两次点数相同}\})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

$$P(\{\text{第一次点数比第二次点数大}\}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12},$$

$$P(\{\text{有一次点数为 }6\})=\frac{11}{36},$$

$$P(\{\text{只有一次点数为 }6\})=\frac{10}{36}=\frac{5}{18},$$

$$P(\{\text{最大点数为 }3\})=\frac{5}{36}.$$

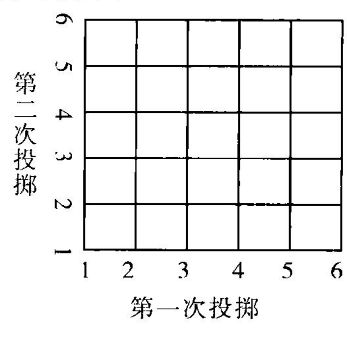

图 1 - 11

例 5 求 n 个人($n<365$)中至少有两个人同生日的概率.

解 基本事件的总数为 365^n.

设 A 表示"至少有两个人的生日在同一天",则 $\overline{A}$ 表示"任何两个人的生日都不在同一天",包含 A_{365}^n 个基本事件. 于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

下面是给出 n 的数值，得到的一些具体结果：

n	20	30	40	50	60	70	80
P_n	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	0.9999

例 6　（抽签的合理性）设有 n 个人订了 n 张电影票，其中有 k 张甲级票. 现让这 n 个人依次各抽一张，试证明：每个人抽得甲级票的概率均为$\frac{k}{n}$，且与抽取的先后次序无关.

证　n 个人各抽一张，相当于将 n 张票全排列，故基本事件总数为 $n!$.

设事件 $A_m=\{$第 m 个人抽到甲级票$\}(m=1,2,\cdots,n)$，则 A_m 中包含的基本事件数为 $C_k^1(n-1)!$，于是

$$P(A_m)=\frac{C_k^1(n-1)!}{n!}=\frac{k}{n},$$

与排列次序 m 无关.

例 7　假设有 100 件产品，其中有 40 件一等品，60 件二等品. 从中任取 3 件，按下列抽取方法，求事件 $A=$“有两件一等品，一件二等品”的概率.

(1)（有放回抽样）每次取一件，测试后放回，再抽取下一件；

(2)（不放回抽样）每次取一件，测试后不放回，在剩下的产品中抽取下一件.

解　(1) 基本事件总数为 100^3，A 中包含的基本事件总数为 $C_3^2\times 40^2\times 60$，故

$$P(A)=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60}{100^3}=0.288.$$

(2) 此时样本空间有两种考虑方法.

如果不考虑抽取的顺序，则基本事件的总数为 C_{100}^3，A 中包含的基本事件总数为 $C_{40}^2\times C_{60}^1$，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_{40}^2\times C_{60}^1}{C_{100}^3}\approx 0.289.$$

如果考虑抽取的顺序，则基本事件的总数为 A_{100}^3，A 中包含的基本事件总数为 $C_{40}^2\times C_{60}^1\times A_3^3$，于是

$$P(A)=\frac{C_{40}^2\times C_{60}^1\times A_3^3}{A_{100}^3}\approx 0.289.$$

三、几何概型

如果试验的样本空间是一个连续的集合（直线上的区间，或者平面、空间上的一个区域），并且每个样本点在试验中出现的机会相等，我们称为几何概型.

当样本空间是一个连续的集合时，其概率的定义与样本空间离散的情况有很大的区别. 在离散的情况下，事件的概率可以由基本事件的概率确定，连续的情况却不能. 下面是一个例子.

例 8 设公共汽车每 5 分钟一班，求乘客在车站等车时间不超过 3 分钟的概率（停车时间忽略不计）.

由于公共汽车 5 分钟一班，故乘客的等车时间是 0 ~ 5 中间的一个数，因此样本空间 $\Omega=[0,5]$. 而乘客到达车站的时间是随机的，我们可以认为 $[0,5]$ 中的每一个数在等车时出现的可能性是相等的. 这样，我们考虑一个单点 ω 在试验中出现的可能性.

实际上，必然有 $P(\{\omega\})=0$. 否则的话，假设单点出现的概率为正，即 $P(\{\omega\})=\alpha>0$，根据等可能性，我们可以找到无限多个这样的点 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ 其中 $P(\{\omega_i\})=\alpha>0, i=1,2,\cdots$. 设事件 $A=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，根据可加性，$P(A)=n\alpha$. 对足够大的 n，有 $P(A)=n\alpha>1$，与归一性矛盾.

对于几何概型，我们可以按照下面的公式计算事件的概率：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}},$$

这里的“测度”指长度、面积、体积等.

例如上例中，设 B 表示“等车时间不超过 3 分钟”，则 $B=[0,3]$，于是

$$P(B)=\frac{3}{5}.$$

例 9 （约会问题）两人相约在 8 时至 9 时之间在某地会面，先到者等候另一人 15 分钟后即可离开，求两人能够会面的概率.

解 设 x,y 分别表示两人到达的时刻距离 8 点的延迟时间，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

依题意，样本点 (x,y) 等可能地落在 Ω 中. 用事件 A 表示“两人能够会面”，则

$$A=\{(x,y)\,\big|\,|x-y|\leqslant 15\}\text{（图 1 - 12）}.$$

故

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{60^2-(60-15)^2}{60^2}=0.437.$$

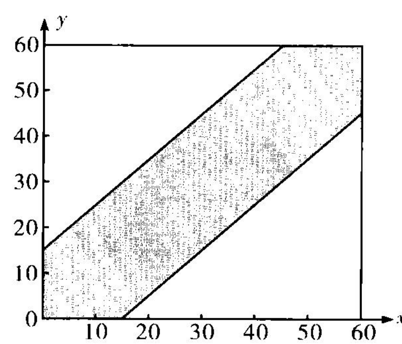

图 1 - 12

例 10 （蒲丰投针问题）平面上画有彼此间距为 $2a$ 的平行线，向平面内任意投一长为 $2L(L<a)$ 的针，求针与平行线相交的概率.

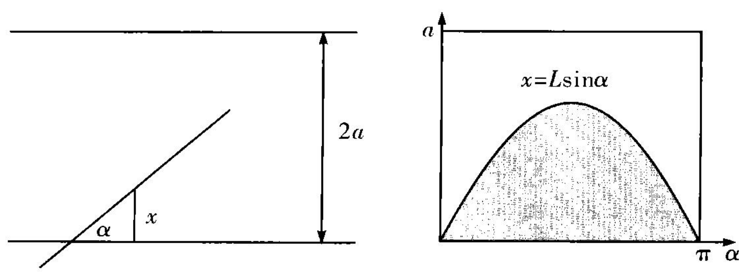

图 1 - 13