

名校名师数学教学 与训练荟萃

MINGXIAOMINGSHISHUXUEJIAOXUE

YUXUNLIANHUICUI

高一

立体几何

LITIJIE

主编 \ 李荫楷



长春出版社
CHANGCHUNCHUBANSHE

名校名师数学教学与训练荟萃

高一立体几何

主 编 李荫楷
副 主 编 才裕平 陈受真
本册主编 王运利

长 春 出 版 社

书 名	高一立体几何
作 者	李荫楷/主编
责任编辑	毕素香
封面设计	王国擎
督 印	陈凤和
出 版	长春出版社(长春市建设街43号)
发 行	新华书店经销
照 排	长春市正泰印务有限责任公司
印 刷	吉新月历公司印刷分公司
开 本	850×1168 1 / 32
印 张	11.625
字 数	296 000
印 数	1—16 080 册
版 次	1999 年1 月第1 版
印 次	1999 年1 月第1 次印刷
书 号	ISBN 7—80604—728—X / G · 224
定 价	11.20 元

(如遇有质量问题请与印刷厂联系调换)

绪 论

《名校名师数学教学与训练荟萃》是一套系列丛书,从初一到高三,每个年级有代数、几何两册,共十二册,同现行教科书及课堂教学相对应,面向各年级中学生,是他们学好数学的指导书、参考书和趣味读物。

编写动意及过程

现在的中学生是实现 21 世纪中叶我国成为世界中等发达国家战略目标的主要建设者。数学是现代科学和技术的语言和工具,在现代文化中扮演着中心角色。中学生学好数学,是将来成为高素质建设者的必备基础。

怎样才能真正更快更好地学好数学?中学生以及家长都十分关注这个问题。我们发现一些中学生数学学习正在走弯路,他们把数学学习的主要时间和精力用于做习题和试卷上。做不完的习题,答不完的试卷,似乎这样就能提高所需的解题能力。但结果却往往不近如人意,即使有人侥幸得了高分,他又是进一步学习的低能儿。其实,他们忽视了数学学习中的基础和精华部分,即:数学概念、公式、法则、定理、定律的深入理解和掌握,以及对数学思想的认识和数学意识的培养。他们学得的只是一些缺乏内在联系的杂乱的做题方法,记忆负担沉重,心理压力巨大,这是典型的应试教育摧残着我们的中学生。

名牌学校中的数学学科教学带头人在多年实践中,为解决学生数学学习的上述问题,积累了丰富的经验。它是我们教育行业宝贵的共同财富。趁这些年高的名师还健在的时候,将他们毕生之积

累挖掘并汇集起来,再进一步提炼、归纳、整理并推广,是当前大力推进中学实施素质教育的重要举措。为此,在长春教育学院党委书记李凤翔、院长郭建枢的大力支持下,我们组织了长春市名牌学校:东北师大附中、吉林省实验中学、长春市实验中学、长春市十一中、长春市六中、长春市朝阳区教师进修学校以及长春市教育学院数学系中曾多年在第一线任教的中学数学教研组长、特级教师、有建树高水平的高级教师十五位,分别任丛书及各册主编。经多次讨论研究确定了本书的编写原则和编写模式。在他们徒弟们的配合下,经近一年的努力,完成了本书稿。

为实施素质教育服务是本丛书编写的基本原则

一个中学生的数学素质是他文化素质中的核心部分,居于学生认知结构的顶端,是学生智力因素的基础。在深入理解数学概念,牢固掌握公式、法则、定理、定律的基础上,对数学知识和数学方法产生的本质认识就是数学思想。

数学思想的不断积累,逐步形成用数学的思维方式去分析问题和解决问题的思维习惯或自觉意识,这就是数学素质,它是数学能力的内在部分。培养学生的数学素质应是数学教育和数学学习的出发点和归宿。提高了学生的数学素质,不仅为进一步学习或参加社会实践打下了基础,也同时具备了应试能力。有志考入重点学校,将来成为 21 世纪高素质人才的中学生,只有着眼于提高自身的数学素质,在数学学习上才能不走或少走弯路,达到事半功倍的效果。这也是本丛书编写的中心意图。

能否“淡化概念”

为培养数学素质,首先必须重视数学概念的学习。高度抽象的数学概念,来源于客观现实的具体事例。它是反映事物本质属性

的思维形式,是人们思维和数学语言的最基本的元素.一切数学公式、法则、定理、定律都是由数学概念组合而成. 弄懂数学概念、学好数学概念是数学学习的前提. 当前轻视数学概念教学与学习的倾向十分严重,甚至有人提出“淡化概念”,这是一种错误且十分有害的导向. 诚然,鉴于中学生的年龄特征,有些数学概念的学习不能提出过高的要求,特别是将概念形式化、给出概念定义的语言,不应追求过分严谨,考虑到可接受性原则,九年义务教育数学教学大纲对一些数学概念,如:有理数、方程、不等式、代数式、二次根式等等,从以前大纲中要求“理解”降到“了解”的层次,这是因为初中学生对上述概念很难达到理性认识,只要求在感性认识的水平上,能说出是什么和在有关问题中能识别就够用了. 这决不是“淡化”,“淡化”概念的结果,必然在学生认知结构中出现概念的不稳定、不清晰、不准确,容易出现学习的负迁移,使进一步学习失去了稳定的基础,使学生陷入似是而非的境地.

丛书各册的基本结构与意图

本丛书各册都按教科书对应的各章标题编写. 每章(或单元)的开头,我们都编写了一段能引起学生兴趣的导言,根据不同情况,采用了不同的编写方式,有的从数学史的角度;有的从主要知识的广泛应用的角度;有的从本章知识的地位和作用、历史故事、有趣问题……等角度,其目的是引起读者对学习本章(或单元)内容的兴趣,诱发读者学习的积极性、主动性,并尽可能帮助读者寻求对抽象数学知识的具体感觉.

数学概念、公式、法则、定理、定律以及它们之间的联系,构成了数学各章的知识结构,它是数学学习的核心内容. 导言之后是本章(或单元)的知识结构分析,分析它们之间的联系、本章主要解决哪些问题、其中哪个是主要问题、解决主要问题的基本方法和依据的基本原理. 对主要的概念、公式、法则、定理、定律,深入剖析它

们的实质,尽可能用通俗的语言和学生常见的事例来阐述抽象的数学原理.

在每章的知识结构分析之后选编了若干例题、习题.在数学教学与学习中,训练占有重要地位.通过例题、习题的学习与训练,不仅可以加深对概念、公式、法则、定理、定律的认识和理解,同时也是训练技能、发展能力的重要手段.所谓技能,是在理解概念、公式、法则、定理、定律等知识的基础上,经过反复练习,对其应用达到熟练程度,甚至表现为自动化的行动方式,即形成了运用知识的技术,通常称为技能.如此便达到了教学大纲中对概念、公式、法则、定理、定律等知识要求“掌握”的水平.在掌握的基础上,对概念、公式、法则、定理、定律等知识的综合运用达到了灵活的程度,成为学生高级神经系统活动的潜在势能,如此便达到了教学大纲中“灵活运用”的水平.这时学生便形成了能力、培养了数学素质.

按数学教学大纲对知识要求的不同层次(了解、理解、掌握、灵活运用)选配例题、习题是本丛书的重要编写原则.本丛书例题、习题的配置基本上和教科书相应部分的例题、习题平行,且起点相当.力求层次分明,小步上升,循序渐进,题型新颖,类型全面.例题侧重于解题思路的分析、解题思维过程的揭示、易犯错误的纠正、典型解题方法的归纳.重要的典型例题之后,附有对解题方法、解题规律以及对所蕴含的数学方法和数学思想的概括和小结.

一个数学题目的解答过程,是由题目已知到结论,用学过的概念、公式、法则、定理、定律等知识按着一定的逻辑关系进行组合,建立逻辑通道的过程.这个逻辑通道,相应一个数学知识链,其每根链条就是已学过的概念、公式、法则、定理、定律等数学基础知识.按数学中的排列组合法则,一定个数基础知识的排列种数是相当大的,其中每个符合逻辑关系排列的知识链就对应一道数学题.因而数学题目的个数相当之多,多到有人比做“题海”.只靠埋头做题争取考试高分的学生,实质上想通过模仿记忆中的数学知识链的办法,提高自己的解题能力.这类似于“瞎瞎子掰苞米”,费力大,

收效少.数学例题、习题的学习和演算过程,应当是深入理解数学知识、概括数学方法、提炼数学思想的过程.对于典型的例题、习题,应当反复学习、演算、理解、概括和提炼,从而训练解题技能,提高解题能力.

为了面向全体学生,满足高、中、低各层次的学生不同要求,习题一般分A组、B组、C组. A组相当于教材习题的水平,重点作为强化基础知识的形成型训练. B组相当于每章复习题的水平,作为学完一章后的提高型训练. C组略高于复习题水平,供上等学生进一步培养能力使用. 各组习题都配有较详细的提示、略解和答案,使后进学生能看懂,排在每章最后.

例题、习题之后是本章的总结. 对本章例题、习题所用的方法和技巧进行梳理、分类、归纳、概括,分析其中的内在联系,总结解本章数学问题最基本、最典型的数学方法. 读书有个“由薄到厚,再由厚到薄”的过程,做数学习题也有个“由少到多,再由多到少”的过程. 当做完一章的习题之后,通过分析、综合,提炼出最基本的数学方法和数学思想之后,诸多的数学习题,只不过是几类数学题的变形,这是培养数学解题能力、提高数学素质的重要手段. 也是名师教学与训练的精华.

每章最后附两套测试题,初中一、二年级要求40分钟内完成. 初三至高三各年级要求90分钟内完成. 测试题的内容力求对本章涉及的知识、技能和能力做到全面覆盖,供读者学完本章之后,作自我验收用. 每册书最后都配有两套综合测试题. 测试题的略解与答案排在每册书的最后.

例题、习题、测试题是数学训练的主要内容. 科学地组织训练,是培养高能学子的必由之路,也是名校名师的共同经验.

本丛书在编写过程中,尽可能结合中学现行数学教学的进度和安排. 初中几何、代数,分别与现行数学教科书平行编写,初三几何和初三代数最后各加总复习一章,为参加中考学生使用. 高一立体几何、高二解析几何和现行教科书平行编写. 高一代数与现行高

中代数第一册平行编写,高二代数涵盖现行高中代数第二册、第三册.高三几何、高三代数面向高三学生总复习,为参加高考学生使用.

由于时间仓促,不适之处望读者校正.

本册书主编是长春市第六中学特级教师王运利,参加撰稿的人还有宋金昌、谢俊来.

李荫楷

引 言

几何学是研究什么的?它是研究几何图形的形状、大小和位置关系的。

几何图形是从哪里来的?是从宇宙中客观存在的物体抽象出来的。在抽象时,只考查它们的形状(含大小和位置关系),其他性质(如物理的、化学的、生物的……性质)一律不考虑。例如木球、铁球、篮球、足球、乒乓球,从几何观点去看,它们都是球,如果说不同,只有大小和放的位置不同。这种只考虑物质的某种属性而去掉其他属性的抽象方法,对研究物质,发展科学,认识世界和改造世界很有价值,值得读者深思!

我们在初中阶段学习的平面几何是研究什么的?它是研究在同一个平面内的几何图形的,如两相交直线、两平行直线、多边形、圆等。这些知识不仅在生活实践中很有用,而且也是研究其他几何图形的基础,是人类最宝贵的知识。但是我们从客观物体中抽象出来的几何图形,不一定都在同一个平面内。如从我们身边的房屋、桌椅,工厂里的各种机器,以及在宇宙空间运行的星球……抽象出来的几何图形,都不是在同一个平面内的几何图形。显然,这种几何图形的知识,同样也是我们改造世界所必需的。它就是高一几何分册所要学习的内容——立体几何。

立体几何是研究空间图形的形状、大小和位置关系的一门几何。这里值得注意的是,这里的空间图形包括平面几何图形,它是空间图形的特例,又是研究空间图形的基础。

从客观世界里抽象出来的空间图形,形形色色,十分繁杂,如何下手研究?我们的先辈,特别是科学家们,总是抓最普遍、最基本的去研究,其他的设法“转化”为最基本的去处理。这种由“简”到

“繁”，由“特殊”到“一般”的研究方法，不仅减小了研究的难度，又缩短了研究时间，也是特别值得读者借鉴的！

空间图形中最普遍、最基本的可说是点、线、面了，所有的空间图形都是由点、线、面等元素组成的，线中最简单的是直线，面中最简单的是平面。所以研究空间图形，总是首先研究直线和平面，这就是我们立体几何第一章的内容——直线和平面。显然它是最基本的，又是最重要的，是必须掌握好的。

直线和平面的有关知识（这里主要是位置关系）是研究空间图形的基础，但不是最终目的，它的最终目的还是各种立体图形。但立体图形又十分繁杂，还是首先抓最基本、最常见的。这就是我们第二章要学习的内容——多面体和旋转体，它们都是最简单、最常见的几何体，所以实用性很强，又能巩固、深化平面几何和直线和平面的基础知识，同时又是学习其他较复杂的空间图形的基础，也是我们必备的知识。

立体几何的内容：第一章直线和平面；第二章多面体和旋转体。它不仅是几何学中最基本的，最常见的，实用性、理论性都很强，同时它对提高人们的逻辑推理能力，特别是空间想象能力，是别的学科（含其他数学分支）难以代替的。那么怎样才能学好它呢？换句话说，学好它要特别注意些什么呢？笔者认为：

第一，注意理论与实际相结合。我们学习的几何图形都是从我们常见的物体中抽象出来的，只是把它们理想化了。如果我们经常把所学几何图形与实物（主要是读者周围的物体）对照去学习，不仅易学，且便于应用；

第二，注意画图和识图。所谓空间想象力，主要是指画图和识图能力，特别是画图能力。因为会画图，一般地识图问题就不大了。这是学习立体几何的一个重点、难点和关键！平面几何图形和实际的情况是一样的，但立体图形往往和实际有较大的差别（读者以后会看到）。如果立体图形画不出来，或不会看图，问题就很难解决，必须每学一个图形，一定要会画这个图形，和会看画好的图形，且

要了解画图的根据；

第三，加强推理训练。立体几何是培养逻辑推理能力的最重要的素材，不仅要求高，而且又严密。这是因为培养逻辑推理能力，是立体几何主要目的之一。这里有两点要特别注意：一是随着学习逐步掌握直接推理和间接推理（反证法、同一法）（含什么情况选直接推理好，什么情况选间接推理好）；二是书写格式，一个公理、定理应用时，应该怎样书写，什么地方可以省略，什么地方不能省略，要心中有数；

第四，弄通各知识的关联。立体几何知识间的联系特别密切，环环相扣，扣扣相联，是一个以数学思想“化归”为红线的知识结构，有意识地去理解、掌握这个知识结构，是学好立体几何的一个主要标志！

以上讲了，什么是立体几何？为什么要学习立体几何？怎样才能学好立体几何？这是学习立体几何首先要理解的，请读者深思！不要急于看本文，切切！

目 录

第一章 直线和平面	(1)
第一节 平面	(3)
第二节 空间两条直线	(17)
第三节 空间直线和平面	(32)
第四节 空间两个平面	(77)
第二章 多面体和旋转体	(170)
第一节 多面体	(173)
第二节 旋转体	(219)
第三节 多面体和旋转体的体积	(256)
综合测试题	(325)
测试题答案	(332)

第一章 直线和平面

引言中提到“直线和平面”是研究立体图形的最基本、最重要的内容. 它具体研究一些什么? 读者知道, 研究图形, 就是研究图形的形状、大小和位置关系. 直线、平面的形状大家是熟悉的, 不需重点研究(直线在平面几何中已学过), 直线是无限长的, 平面是无限大的, 没有什么需要研究的, 这样只剩下直线和平面的位置关系了. 这里包括直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系.

空间里的直线和平面都是无限多的, 那我们拿多少个(条)去研究它们的位置关系呢? 同样是抓最简单的, 即个(条)数最小的两个(条). 对多于两个(条)的, 转化为两个(条)去研究. 这样在直线和平面这章里具体研究——两条直线的位置关系, 一条直线和一个平面的位置关系, 两个平面的位置关系. 对多于以上情况的, 通常是通过例题、习题出现, 转化为两个(条)的情况去解决. 这种“最小数”原则, 也是数学中通常采用的方法, 读者要加深理解!

两条直线, 一条直线和一个平面, 两个平面的相互位置关系, 到底研究些什么呢? 一是研究它们的交叉状态(用成“角”去反映), 二是考查它们相距多远(用“距离”去反映). 事实上交叉状态知道了, 相距多远知道了, 那么它们的相对位置就确定了.

在交叉状态中, 有两种特例, 即“平行”和“垂直”在实践和理论上特别重要, 所以重点进行研究.

立体几何是建立在平面几何知识上的, 这就需要会判定什么样的点和直线共面的问题, 只有共面了才能使用平面几何知识. 所以学习立体几何首先得学习平面的有关知识, 主要是解决点和直线共面问题. 这样就形成了研究直线和平面位置关系的结构图:



初学者很可能或不能全部看懂上面的知识结构图. 笔者的目的在于使读者一开始就对本章所学内容, 学习知识的顺序以及知识结构有个大概的了解, 这样便于学习各部分(平面, 空间两条直线, 空间直线和平面, 空间两个平面), 同时通过具体学习各部又进一步理解上面的结构图. 这样从整体到部分, 再从部分到整体, 对形成良好的认知结构是有益的.

学习这章知识要解决哪些主要问题呢?除了画图、识图外,共五大问题——共面问题、平行问题、垂直问题、成角问题和距离问题(这里含直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行、垂直、成角和距离).读者带着这五大问题去学习各部分知识,就会抓住要领,抓住重点.

第一节 平 面

这里要解决两个问题:一是共面问题(怎样判定、证明点和直线在同一个平面内)为使用平面几何知识解决立体几何问题打基础;二是画平面有关图的问题,为画图、识图打基础.所以这是基础的基础.

一、平面

首先得给出什么是平面,不然无法去研究它的有关性质.平面是一种原始概念,不能用已知的概念去定义它,只有采用描述的方法.

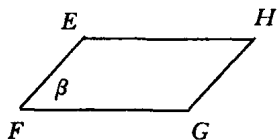
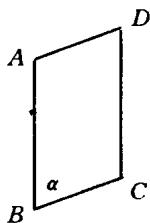
什么样的物体表面给我们平面的形象呢?

常见的桌面、黑板面、平静的水面等都给我们以平面的形象.几何里所说的平面就是从这样一些物体抽象出来的.

这里有一个问题,抽象出来的“平面”有大有小,取多大的平面便于我们研究呢?我们学习直线的时候是把直线看作无限延伸的,这样好处很多.同样学习平面时,也是指无限延展的.即:几何里的平面是无限延展的.这是学习平面概念时,值得特别注意.如果我们不这样去规定平面,将会带来许多麻烦,如直线在一个平面内就不可能,这样将会出现许多无法解决的问题.

接着就是怎样画平面的问题.我们所说的平面是无限延展的,无法把它画在纸面上或黑板上.怎么办?我们只能像画直线一样,用某种有限的图形去代表它(化无限为有限).当我们从适当的角

度和距离观察桌面或黑板面时,感到它们都很象平行四边形.因此,在立体几何中,通常画平行四边形来表示平面.最常用到的平面是水平面,通常把平行四边形的锐角画成 45° ,横边画成等于邻边的两倍,如下左图和下右图(下左图表示一般平面,下右图表示水平平面).



平面通常用一个希腊字母 α, β, γ 等来表示,也可用平行四边形的两个相对顶点的字母表示,如平面 AC ,平面 EG .

这里值得特别注意的有两点:一是,不是所有平面都必须画成平行四边形,有时也可画成其他图形如三角形、梯形等;二是,不能把平行四边形的边,说成是平面的边,平面是无限延展的,是没有边的.

习 题 一

1. 能不能说平整的桌面,就是一个平面?为什么?
2. 是否存在只有一个公共点的两个平面?为什么?

二、平面的基本性质

平面的性质是很多的,也是多方面的,我们在这里应研究哪些方面的性质呢?

下面我们来研究点和直线共面的平面性质.

首先我们研究具有什么条件的直线在一个平面内?(直线在平面内,是指直线上所有点都在平面内)