实数的扩展

SHISHU DE KUOZHAN

$i \underset{i}{>} 0$

$i \underset{i^2}{=} 0$

$i \underset{i^3}{<} 0$

孙隆宙◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

实数的扩展

SHISHU DE KUOZHAN

$i \underset{i}{>} 0$

$i \underset{i^2}{=} 0$

$i \underset{i^3}{<} 0$

孙隆宙◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

内容提要

在现有的实数扩展为复数的理论中，实数只有一个层次的扩展，即实数扩展为复数。从几何学的角度讲，实数存在于一条数轴上，而复数存在于一个复平面上，如果复数要扩展，那么扩展后的新数应存在于空间中。本书明确指出，实数的扩展有两个层次：实数扩展为虚数是实数扩展的第一个层次，这里所说的虚数，不是传统意义上的、表示虚轴上的虚数，而是广泛意义上的、表示虚数圆面上的虚数，代表圆平面上的点。虚数还可以继续扩展，虚数扩展为华数是实数扩展的第二个层次。实数存在于一条数轴上，虚数存在于一个圆平面上，华数存在于一个圆球空间中；直线、圆平面、圆球空间分别是实数、虚数、华数三种数存在的空间形式。我们从数和形的结合上，划分和研究实数的扩展，不但层次分明，条理清楚，而且数和形的结合关系紧密，概念划分合理，是我们所要寻找的实数扩展后的理想数学模型。

本书适合广大数学工作者、数学爱好者及大、中专学生研究阅读。

责任编辑：兰　涛

图书在版编目（CIP）数据

实数的扩展/孙隆宙著. —北京：知识产权出版社，2012.2
ISBN 978-7-5130-1042-9

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①孙…　Ⅲ.①实数理论—研究　Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 282170 号

实数的扩展
孙隆宙　著

出版发行：知识产权出版社
社　　址：北京市海淀区马甸南村 1 号
邮　　编：100088
网　　址：http://www.ipph.cn
邮　　箱：bjb@cnipr.com
发行电话：010-82000860 转 8101/8102
传　　真：010-82000860 转 8240
责编电话：010-82000860 转 8325
责编邮箱：lantao@cnipr.com
印　　刷：三河市国英印务有限公司
经　　销：新华书店及相关销售网点
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：34.5
版　　次：2012 年 7 月第 1 版
印　　次：2012 年 7 月第 1 次印刷
字　　数：997 千字
定　　价：100.00 元
ISBN 978-7-5130-1042-9/O·011(3924)

序

1978 年党的十一届三中全会的胜利召开，迎来了“科学的春天”，作为一名知识分子，无不为有这样一个美好的春天而高兴，从而鼓起勇气向数学的新领域攀登，并开始走上了一条长达 30 多年的探索之路。我把探索研究的重点放在实数扩展后的数学模型及其数量的相互关系上。为此，我查阅了有关资料和书籍，认真地研究和总结了近几百年来在实数扩展理论上的得与失，对实数扩展后的数学模型及其数量的相互关系，进行了大量的计算与作图，并提出了新的实数扩展的理论。在长期的研究和探索中，面对困难，知难而进，牢记叶剑英同志的教导：“科学有险阻，苦战能过关。”经过 30 多年的艰苦探索与研究，一个难题一个难题的解决，我把一生中最美好的、最宝贵的精力都用在这项研究上了。目前，终于完成了这一部以实数扩展新理论为主线的数学研究书稿，定名为“实数的扩展”。全书稿共有十四章，全部内容是作者长期研究的重要成果，可以说是章章谱新篇，节节立新意。这既是一项重要的数学基础理论研究著作，也是一部具有很高研究价值的数学学术专著，对实数概念的深化和扩展作出了重要贡献，并将对今后数学的研究和发展产生深远的影响。

我们知道：数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学。数的概念的深化和扩展是数学研究的重要内容之一。数的概念扩展到实数以后，如何继续深化和扩展呢?! 扩展后的新数具有什么样的数学模型及其数量的相互关系呢?! 目前比较流行的一致看法认为，实数扩展后的新数是复数。人们习惯把形如 $a + bi$ 的数叫做复数，把形如 bi 的复数叫做纯虚数。复数是由实数和虚数构成的，人们把复数与复平面上的点一一对应起来，确立了复数是表示复平面上的点这个概念，从而建立了复数存在的空间形式和数量的相互关系，这一点无疑是一个很大的进步。但是，目前复数理论中，在阐述复数、虚数、实数三者之间的关系上，概念划分不是很合理，表示形式也不够科学。一般认为虚数和实数一样，是分布在一条数轴上，这条数轴叫做虚轴，因此，虚数是作为和实数并列的一种数而被提出和应用的，在实轴和虚轴上，它们各自分别独立，自成体系，这种把虚数系统和实数系统完全隔裂开来的划分，阻碍了实数扩展理论的进一步深化和发展。

作者在深入地研究了实数、虚数和复数之后，从科学的角度，系统地、全面地提出了实数扩展的新理论，对实数扩展后的数学世界作了详细的描述，展示了实数扩展后数学世界的内在联系和变化规律，对现有实数扩展理论中的诸多重大和关键问题一一作了回答，突破了近几百年来习惯理论的束缚，提出了全新的原理及计算公式。本著作中有许多原理、方法、公式、符号等都是作者第一次提出和应用，无疑将进一步丰富数学的宝库。

本著作所创建的实数扩展理论是全新的理论，据我所知迄今为止，世界上还没有人提出过相同的理论，更显得这个理论的独创精神。本著作中提出的许多重大理论及与之相关的研究成果都具有里程碑的意义，对今后数学的研究和发展将产生重大影响。

本著作在创建实数扩展理论方面至少在以下十大问题上有重大突破或发现。

一、关于创建实数扩展新理论方面

本著作深入地研究了现有实数扩展理论，并对实数、虚数、复数三者之间的关系作了详细的研究，认为虚数和复数应该是同一种数，这种数应该定名为“虚数”，这种“虚数”应该表示平面上的点，这是一种概念经过改进的、全新的“虚数”。从科学的角度，系统地、全面地提出了实

数扩展的新理论。这个新理论突破了现有实数扩展理论的束缚，第一次提出了实数扩展的两个层次：实数扩展为虚数是实数扩展的第一个层次，虚数扩展为华数是实数扩展的第二个层次。更难能可贵的是在数和形的结合上提出了直线、圆平面、圆球空间分别是实数、虚数、华数三种数存在的空间形式，直线扩展为圆平面、圆平面扩展为圆球空间是实数扩展的两个层次的几何解释，也是实数扩展后的理想数学模型。

特别是“华数”的发现及首次命名，在数学领域中，为中华民族增添了新的光辉，是中华民族的骄傲。

二、关于建立虚数理论方面

把 i 的指数从整数扩展到整个实数，虚数单位也从一个 i 扩展到无数个 i^t，第一次提出了虚数单位主值为 i^t，分布在单位圆上；任何虚数用 Ri^t 表示。这里 R 叫做虚数半径，t 叫做虚数的方向指数。任何虚数 Ri^t 分布在虚数圆面上，建立了虚数 Ri^t 与虚数圆面上的点一一对应的新关系，突破了复数与复平面上的点一一对应关系的束缚。显然，虚数圆面比复数平面要优越得多。辩证地阐述了实数和虚数的正确关系：虚数包括实数，实数只是虚数中很特殊的一部分，虚数是实数扩展的第一个层次。正确地回答了 i^t 及 Ri^t 是什么的问题。在此基础上，提出了在虚数圆面上进行虚数四则运算、乘方运算、开方运算的计算公式和方法；提出了虚数方程的概念，研究了一些虚数方程的基本解法，从而在实践和应用上，证明了虚数理论的正确性，为虚数理论的推广和应用奠定了基础。

三、关于建立虚数对数的理论

第一次科学地提出了关于方向对数的基本概念、性质及其运算规则。方向对数新概念的提出，突破了复变函数理论的束缚，解决了虚数对数（包括负数取对数）的运算问题，否定复变函数理论中 $\ln i = \frac{\pi}{2}i$、$\ln(-1) = \pi i$ 等计算公式的正确性，使我们重新理解和认识诸如 $\ln i$、$\lg i$ 以及 $\ln(-1)$ 等数学式的意义及计算公式，正确地给出了虚数 Ri^t 取对数及其运算规则，回答了诸如 $\lg i^t$、$\lg Ri^t$ 以及 $\ln i^t$、$\ln Ri^t$ 等是什么的问题。

四、关于建立虚数方向等式和虚数方向不等式的理论

本著作首次创造和引用了三个重要的数学符号：方向等于号、方向大于号、方向小于号。第一次提出并建立了虚数方向等式和虚数方向不等式的理论，揭示了虚数方向不等式和虚数方向等式独特的基本性质，研究了求解虚数方向等式和虚数方向不等式的方法及规律，解决了在虚数圆面上虚数比较大小的问题。“复数不能比较大小”的结论终于被彻底改变，这个问题曾经困扰了我们很长一段时期。

五、关于在虚数圆面上建立各种平面几何曲线的参数方程式的理论

只要在直角坐标平面中能够用笛卡儿平面直角坐标系表示的平面几何曲线，在虚数圆面上也一样能够表示出来。在虚数圆面上，由于量的大小和方向的不断变化和重新组合，形成了形状各异的平面几何曲线。本著作中提出了用参数方程式来表示虚数圆面上的平面几何曲线的理论，并且详细地讨论了射线、直线、圆、正弦线、椭圆、叶形线、拱形线、螺形线、波形线、抛物线、双曲线十一大类常见的平面几何曲线参数方程式的特征及其组合构成，研究了各种平面几何曲线的性质、分类及其变化规律，每一种平面几何曲线的要素及其计算公式，内容相当丰富多彩，这些内容无疑将大大地丰富了虚数的应用范围及其表现形式，也为我们在虚数圆面上研究平面几何曲线提供了丰富的内容和保证。

六、关于建立虚数圆柱坐标系的理论

在平面直角坐标系上不可能解决虚数函数的问题。本著作根据虚数函数的特点和性质，首次提出了一种新的空间坐标系，即虚数圆柱坐标系。这种坐标系的主要特点是用实数轴 x 表示函数的自变量，而用虚数圆面 y 表示函数的因变量，在它们建立的相应函数关系中，只要确定一个自变量 x 的值，那么在虚数圆面上就有一个确定的虚数值 y 和这个 x 值相对应，这就是实数和虚数间建立的一一对应关系。这种坐标系是研究虚数函数的有力工具，利用虚数圆柱坐标系，研究了虚数圆柱空间中的空间几何曲线，包括空间的直线、双曲线、抛物线、虚数圆柱螺旋线、虚数圆锥螺旋线等虚数函数的图像和性质，详细研究了在虚数圆柱坐标系中空间直线的不同状态和它的各种形式的方程式及其变化规律。

由于虚数圆柱坐标系理论的建立，为今后虚数函数的研究提供了坚实的理论基础，是数学研究中不可缺少的有力工具。

七、关于建立虚数角三角函数的理论

本著作首次提出虚数角的概念。虚数角是实数角的进一步扩展，如果用 x 代表实数角（角度或弧度），那么 xi^t 就代表虚数角，并首次提出了虚数角 xi^t 存在于 i^t 虚平面上的概念。在此基础上建立了虚数角三角函数的理论。这个理论的提出和应用，突破了复变函数理论中当 z 是任何复数时 $\sin z$ 、$\cos z$ 计算公式的束缚，使我们重新正确认识和评价了诸如 $\sin xi$、$\cos xi$ 等虚数角三角函数的问题，否定了复变函数中通过欧拉公式推导出的下列公式：

$$\sin xi = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i}$$

$$\cos xi = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$

得到了新的计算公式：

$$\sin xi^t = i^t \sin x$$

$$\cos xi^t = \cos x$$

有无虚数角及如何用虚数角表达三角函数等问题，曾经使我们长期感到困惑不解。现在终于有了正确理论的指导，建立了一整套虚数角三角函数的计算理论及其公式，这是一个极大的飞跃与进步。

虚数角三角函数是实数角三角函数的理想扩展结果。我们详细地研究了 6 个虚数角三角函数图形的形状及其特征，这是实数角三角函数图形的形状及其特征的进一步继承和发展，从而进一步证明了虚数角三角函数与实数角三角函数在理论和实践上的连续性和一致性，证明了虚数角三角函数理论的正确性，这就是我们的结论。

八、关于建立直角度制的理论

目前，公认的关于角的度量制基本上有两种：角度制和弧度制。

角度制由于把圆周角分成了 360 个等份，每一等份称为 1“度”的角；而“分”进位到“度”，“秒”进位到“分”都是 60 进制的，给 10 进制的推广和应用带来了不统一和不方便。

弧度制虽然是 10 进制的，但是圆周率 π 本身是无理数，在计算时存在着近似值的计算，对精密的角度计算存在着不方便和不精确的一面。

本著作第一次提出“直角度制”的理论，“直角度制”是一种优于“角度制”和“弧度制”的第三种角的度量制，它是把直角作为角的基本度量单位，这是一种理想的角的度量制，在虚数和华数的实际运算时特别适用。“直角度制”既能克服“角度制”不是 10 进制带来的不方便，又能克服“弧度制”因为有 π 这个无理数所带来的计算上的不方便，因此可以考虑广泛采用。

九、关于创建“华数”的理论

本著作第一次提出和使用了“华数”这个名词。把虚数扩展后的新数正式命名为“华数”，主要考虑以下几种原因。

(1)“华数”是我们中国人发现和命名的，是中国人的骄傲，是中华民族的骄傲，为了纪念这个伟大的发现，因此用“华夏”的第一个字——“华”——代表中国，来命名新发现的数。这是考虑的主要理由。

(2)“华”字与“实”字有相对之意，例如：“华而不实”就是这个意思。因此，把实数扩展后第二个层次的数定名为“华数”是合适的。

华数是虚数理所当然的扩展结果，是实数概念的第二个层次的重要扩展。第一次提出了华数单位分布在单位球面上的概念，并用 i^{ri^t} 表示华数单位的主值；而整个华数系统分布在华数圆球空间中，任何华数用 Ri^{ri^t} 表示；建立了华数和华数圆球空间上各点之间一一对应的关系；详细研究并建立了华数四则运算、乘方运算、开方运算等计算公式及其运算法则。

由于华数理论的建立和应用，突破了复变函数理论的束缚，否定了 i^i 和 i^{i^3} 计算公式的正确性，指出了 i^i 和 i^{i^3} 是两个华数单位，并不是等于实数值，使我们重新正确认识诸如 i^i 和 i^{i^3} 等形式的数。正确地回答了 i^{ri^t} 是什么数的问题。

十、关于重新评价欧拉公式的问题

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$$

这是大家熟知的欧拉公式。应用这个公式，对任何一个复数的三角函数式都可以表示为复数的指数式；同样，任何一个复数的指数式都可以用复数的三角函数式表示。欧拉公式是复变函数中的基本公式，其他很多公式都是根据这个公式推导而得，因此，这个公式正确与否相当重要。

由于本著作中涉及的一系列诸如 $\ln i$ 和 $\ln(-1)$、i^i 和 i^{i^3}、$\sin xi$ 和 $\cos xi$ 等重要计算公式和概念与复变函数理论中由欧拉公式推导出的计算公式和概念有很大的不同，使我们有必要重新审视和评价欧拉公式的正确性。在审视过程中，发现了欧拉公式在推导过程中存在着严重的错误。其主要错误是用 xi 代替 x，并代入到 e^x 的幂级数展开式中，并定义它的值等于 e^{ix}。本著作中详细论证了 e^{ix} 和 $\cos x + i\sin x$ 各自的本质特点及其变化规律，指出了它们之间不可能有相等的关系，否定了欧拉公式的正确性。

欧拉公式是复变函数中的一个基本公式，而且应用多年，至今没有人提出异议，说明欧拉公式存在的问题是不容易被人发现的，其主要原因是我们对实数扩展后的新数，新数存在的空间形式及其数量关系还不十分清楚，一些问题还比较抽象，也不容易被人深入理解。

除了上述十大理论问题的重大突破和贡献外，在形成这个理论的过程中，小的概念上的突破更多，每前进一步，都要经过艰难的努力，既有失败的反思，也有成功的喜悦。

由我提出和改变已流行了数百年的实数扩展为复数的理论，可能会一石激起千层浪，这可能是好事，可以引导大家尊重科学，热爱数学，对今后数学基础理论的研究和实践的应用都会产生深远的影响。

由于实数的扩展问题是一个比较轴象又比较复杂的大问题，由于作者数学水平有限，有些内容可能会有考虑不妥之处，错误之处也很难避免。本著作仅作引玉之砖，谨请广大读者提出宝贵意见，我在此先谢谢大家了。

孙隆宙

2009 年 5 月 11 日

引　言

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的一门科学。数的概念的深化和扩展是数学研究的重要内容之一，也是在数学领域中不断揭露和解决数在运算中所包含矛盾的结果。回顾一下，过去对于实数范围内数的概念的几次扩展，都是从解决实际问题的需要提出的，但是从数学运算的角度来看，这种需要也正反映在要解决“逆运算可进行”这一问题。例如，为了使加法的逆运算——减法——永远可以进行，就需要引进负数；使乘法的逆运算——除法（除数不是零）——永远可以进行，就需要引进分数；使正数的乘方的逆运算——正数的开方——永远可以进行，就需要引进无理数。新数的引进，解决了“逆运算可进行”的问题，数的范围也随着扩大了，由此，也就可能更有效地解决更多的实际问题。

这里请注意，数的范围的每一次扩大。都是在原有数的基础上增添了一种新的数而构成的，因此，在扩大了的数的范围里，原有的数原来所具有的运算意义和运算性质，仍旧要保持下来。

数的概念扩展到实数以后，对于经常遇到的大量实际问题已能很好地得到解决，这是很大的进步。

我们所知道的实数系统如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数（有限小数或循环小数）}\end{cases}\\\text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}$$

整个实数系统可以用一条数轴把它表示出来，任何一个实数都对应着数轴上的一个点；反之，数轴上的任何一个点，必对应着一个实数，这就是实数与数轴上点之间的数和形的一一对应关系。

数的概念扩展到实数以后，还能不能扩展?！需不需要扩展?！

我们知道，在实数范围内，加法、减法、乘法、除法（除数不能是零）、乘方这5种运算总是可以进行的，但是乘方的逆运算——开方——却还不是永远可以进行的，例如，在实数的范围内，负数就不能开平方。

在很长的一段历史时期内，数学家对负数的平方根持否定态度。不论是公元3世纪的希腊数学家丢番图，还是12世纪的印度数学家培斯卡拉都认为负数的平方根是“不存在的”。[1]

到了16世纪中叶，由于求方程根而需要负数开平方，第一个将负数的平方根写到公式中来的是16世纪的意大利数学家卡尔丹。在讨论是否有可能将10分成两部分，使两者的乘积等于40时，他指出，尽管这个问题没有有理解，然而，如果把答案写成$(5+\sqrt{-15})$和$(5-\sqrt{-15})$这样两个表式就可以满足要求了。尽管卡尔丹认为这两个表式没有意义，是虚构的，想象的，毕竟他把它们写下来了。

---

[1] 解恩泽、嵇训焕、易帷让等编：《在科学的征途上——中外科技史例选》，科学出版社1979年8月版，第11页。

负数的平方根——卡尔丹给它起了大号叫“虚数”——就越来越经常地被科学家们所使用了。[1]

“虚数”以及与之相对应的“实数”这两个名词是首先由笛卡儿于1637年引用的。[2]

然而，在当时和以后一段相当长的时间内，许多数学家对于负数开平方后还是不是一个数持怀疑态度。例如，17世纪著名的法国数学家笛卡儿，竟把负数的开平方说成是“不可思议的”。[3]曾经在微积分建立上有过贡献的德国数学家莱布尼茨，竟在1702年宣称：虚数是“神灵美妙与惊奇的避难所，是存在与不存在的两栖物”。[4] 著名的瑞士数学家欧拉，在1770年发表的代数著作中有许多地方用到了虚数。然而，对这种数，他又加上了这样一个掣肘的评语：“一切形如 $\sqrt{-1}$、$\sqrt{-2}$ 的数学式都是不可能有的、想象的数，因为它们所表示的是负数的平方根。对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它们纯属虚幻。”[5]

虚数闯进数学领地之后，足足有两个世纪的时间，一直披着一张神秘的、不可思议的面纱。负数的平方根之所以不容易被人们所理解，关键是在于负数开平方后所得到的新数在现实世界中有没有实际意义，在现实世界中能否找到它存在的空间形式及其数量的关系。

负数开平方究竟有没有实际意义，这一问题直到18世纪中叶后才得到逐步认识。1747年，法国的著名数学家达兰贝尔作了具有推动数学发展作用的研究工作，他指出，如果按照多项式的四则运算规则对任何负数开平方的数进行运算，那么它的结果总可以写成 $a+b\sqrt{-1}$ 的形式（其中 a、b 均为实数）。这实际是在实数基础上又引进一个新的数，这个数平方后等于负数。这个新引进来的数（平方后为负数），称为虚数。后来人们用符号 i 代表 $\sqrt{-1}$，这样任何一个新的数都可以写成 $a+bi$（其中 $i=\sqrt{-1}$）的形式。[6] 这种形式一直沿用至今，目前关于复数 z 的表示形式中，复数的一般式即为 $z=a+bi$。

在17—18世纪，人们把 $a+b\sqrt{-1}$ 称为虚数，直到19世纪初，人们为了区别 $a+b\sqrt{-1}$ 和 $b\sqrt{-1}$，把前者称为复数，后者称为纯虚数。[7]

“复数”这一名词是高斯于1831年首先引用的。

从17世纪后半叶开始，人们致力于寻求虚数或复数的几何直接解释，直到18世纪末和19世纪初，挪威的测绘员威塞尔，法国的会计师阿尔甘和德国的数学家高斯在前人工作的基础上，分别于1799年、1806年和1831年给出了复数的几何表示法。他们的方法基本相同，就是用所谓“复平面”上的点表示复数 $a+b\sqrt{-1}$，复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与复平面上的点一一对应，因而使复数同力学、物理学中的许多具体矢量联系起来。因此，不仅使虚数以至于复数得到了合理的几何直观解释，容易被人们理解和接受，而且使它们有可能在流体力学、空气动力学、弹性力学和电工学等实际领域得以应用。[8]

19世纪中叶，又逐步形成了以虚数为最基本概念的《复变函数论》，这一崭新的数学分支，成为解决许多与力学、电工学有关的实际问题的有力工具。这样，虚数与现实世界的辩证联系就充分地显露出来了。从此虚数在数学中取得了合法地位。[9]

---

[1] ［美］G. 盖莫夫著：《从一到无穷大——科学中的事实和臆测》，暴永宁译，科学出版社1978年11月版，第31页。
[2] 解恩泽、嵇训焕、易帷让等编：《在科学的征途上——中外科技史例选》，科学出版社1979年8月版，第11页。
[3] 雪夫、金凯编：《复数》，黑龙江人民出版社1980年7月版，第3页。
[4] 同[2]第14页。
[5] 同[1]。
[6] 同[3]第4页。
[7] 同[2]第12页。
[8] 同[7]。
[9] 同[7]。

正像恩格斯所指出的那样：“-1 的平方根不仅是矛盾，甚至是荒谬的矛盾，是真正的背理。可是 $\sqrt{-1}$ 在许多情况下，毕竟是正确的数学运算的必然结果，不仅如此，如果不准用 $\sqrt{-1}$ 来运算，那么数学，无论是初等数学或高等数学，将怎么办呢?”❶

但是，能不能说，实数的扩展问题已经正确地得到了解决，没有什么问题需要进一步研究和解决了呢，实际上并非如此。

目前，人们对实数扩展后的新数的认识还是不全面的，还存在着一些需要解决的问题。

目前比较流行的一致看法认为，实数扩展后的新数是复数。人们习惯把形如 $a+bi$ 的数叫做复数，把形如 bi 的复数叫做纯虚数。复数是由实数和虚数构成的，人们把复数与复平面上的点一一对应起来，确立了复数是表示复平面上的点这个概念，从而建立了复数存在的空间形式和数量的相互关系，这一点无疑是一个很大的进步。但是，在阐述复数、虚数、实数三者之间的关系上，概念划分不是很合理。一般认为虚数和实数一样，是分布在一条数轴上，这条数轴叫做虚轴，因此，虚数是作为和实数并列的一种数而被提出和应用的，在实轴和虚轴上，它们各自分别独立，自成体系，这种把虚数系统和实数系统完全割裂开来的划分，阻碍了实数扩展理论的进一步深化和发展。

我们知道，作为虚数的一个单位 i 是建立在实数基础上的，因此，虚数和实数不应该是并列的关系，而应该是从属的关系。如果说，实数扩展后的新数是复数，虚数只是作为复数的特殊情形，那么虚数就是复数，虚数的概念就是多余的了；如果说实数扩展后的新数应该叫虚数，那么复数就是虚数，复数的概念就是多余的了。因此，在虚数和复数的两个名词中，至少有一个是多余的了。

关于复数的单位问题，复数有没有单位，如果说复数有单位，那么，复数的单位是什么形式的呢？如果说复数没有单位，作为实数扩展后的一种新数，怎么能没有单位呢？

我们知道构成复数的实数和虚数是有单位的，这从实轴和虚轴上就能看出来，实数的单位为1，虚数的单位为 i，但能不能说复数的单位就是 $1+i$ 呢，显然不能这么说，好像复数没有明确的单位。

在复数理论中，有一个极其错误的结论：复数不能比较大小。这个错误的论断又给复数蒙上了一层神秘的面纱：既然是数，怎么不能比较其大小呢。显然，这是由于复数理论本身的缺陷所造成的，至今还未找到比较复数大小的可靠方法。

关于复数的表示形式，目前有以下四种。

1. 复数的一般式

$$z = a + bi$$

这里 z 代表复数，a 和 b 都为实数，i 是虚数单位，$i=\sqrt{-1}$；

2. 复数的三角函数式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

这里 r 是复数 z 的模数，θ 是复数 z 的幅角；

3. 复数的指数式

$$z = re^{i\theta}。$$

这里 e 为自然对数的底；

4. 复数的向量式

$$z = \overrightarrow{OM}$$

复平面上的任何一个点 $M(a,b)$ 都有一个复数 $z=a+bi$ 与之对应。如果连接原点 O 与点

❶ 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第119页。

$M(a,b)$，并将原点 O 看做起点，点 $M(a,b)$ 看做终点，从而得到一条有向线段 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OM}$ 就表示复数 z。

虽然复数的表示形式较多，但仔细分析这些表示式都不是最好的。例如，复数的一般式用得最多，但它是建立在实数和虚数基础上的，这种表示形式的主要不足已在上面分析得比较多，这里不再重复，这种表示形式在进行复数运算时也比较烦琐。复数的三角函数式由于带进了三角函数，使计算工作更不方便。复数的指数式由于是根据欧拉公式推导出来的，对这个公式本身的正确性还值得进一步研究。复数的向量式由于没有明确的数量关系，只利于图解表示，不利于阐述和计算。

关于现代复数的进一步扩展问题。复数还能不能进一步扩展?！如果能扩展，那么复数扩展后的新数又是什么样子的呢？如果不能扩展，又是为什么呢？复数是表示复平面上的点，从几何学的角度讲，平面是能够向空间扩展的；因此，从理论上讲，复数是能够进一步扩展的，复数扩展后的新数应该表示空间的点；但是我们目前还没有看到复数扩展后的新数，还没有看到复平面向空间扩展的理想数学模型。显然，通过复平面向空间扩展来表示空间的新数是困难的，这是由于复数本身存在的种种缺陷所造成的。

鉴于上述复数本身存在的种种缺陷和问题，目前流行的实数扩展为复数的理论并不是一个理想的理论，它所给出的数学模型——复平面——也不是实数扩展后的一个理想数学模型。对实数扩展后的新数还需要重新认识和研究，实数扩展的理论还需要重新建立，这就是作者写本书的主要出发点。

作者在深入地研究了实数、虚数和复数之后，认为虚数和复数是一种数，是实数扩展后的一种新数，并认为这种新数应该定名为“虚数”，这种新的“虚数”与原来老的虚数概念不同，这是一种概念经过改正的、全新的“虚数”，用这种全新的“虚数”来统一原虚数和复数的概念，是比较合理的。作者研究认为这种全新的“虚数”分布规律和实数也是不相同的，不是分布在一条虚轴上，而是分布在一个圆平面上；新的“虚数”和实数也不是并列的关系，新的“虚数”包括实数，实数只是新的“虚数”中的一部分，而且是特殊的一部分；新的“虚数”单位也不只是一个 i，而是 i^t，新的“虚数”单位分布在单位圆上，新的“虚数”的表示形式是 Ri^t，这里 R 叫做虚数半径，而 t 叫做虚数的方向指数；整个虚数系统可以用一个圆平面来表示，这个圆平面，叫做虚数圆面，任何一个虚数 Ri^t 必对应于虚数圆面上的一个点；反之，虚数圆面上的任何一个点都可以用虚数 Ri^t 来表示。这是一种新的一一对应关系，有了这种新型的对应关系，我们就能够理解虚数存在的空间形式及其数量的关系，在这个虚数圆面上我们也能够比较虚数之间的大小。这就是我们所要寻找的实数扩展后的理想数学模型。

实数扩展到虚数以后，数的扩展问题是否终止了呢？作者在详细地研究了虚数单位以后，认为实数扩展到虚数以后，数的扩展并未终止，实数扩展到虚数仅仅是实数扩展的第一个层次，虚数还可以继续扩展。虚数扩展后的新数，我们命名它为“华数”，华数单位分布在一个单位球面上，这个单位球面，我们命名它为华数单位球面。任何华数都可以用 Ri^{ri^t} 表示，这里 R 叫做华数半径，r 叫做华数的纬向指数，而 t 叫做华数的经向指数。整个华数系统可以用一个圆球空间来表示，这个圆球空间，我们命名它为华数球空间，任何一个华数必对应于华数球空间中的一个点；反之，华数球空间中的任何一个点都可以用华数来表示。这又是一种新的数和形的对应关系，而且是原有的数和形的对应关系的进一步扩展。有了这种新型对应关系，我们就能理解华数存在的空间形式及其数量的关系，这就是我们所要寻找的虚数扩展后的理想数学模型。

实数扩展为虚数，虚数扩展为华数，这就是实数扩展的两个层次。实数存在于一条数轴中，虚数存在于一个圆平面中，华数存在于一个球空间中。直线、圆平面、球空间，这分别就是实数、虚数、华数三种数存在的空间形式。我们从数和形的结合上划分和研究数的扩展，不但层次分明，

条理清楚，而且数和形的结合关系紧密，概念划分合理，这就是我们所要寻找的实数扩展后的理想数学模型。

本著作中提出了一系列新的数学概念和数学符号，对数学的进一步认识和今后的发展都有极大的意义。例如，关于虚数单位 i^t 存在于单位圆上的概念，在观念上首先突破了原有复数和虚数的概念，把 i 的幂指数由整数扩展到整个实数系统，对实数扩展理论的形成起到了推动作用；关于虚数圆面的概念，建立了虚数 Ri^t 和虚数圆面上的点一一对应关系，解决了虚数存在的空间形式问题，显然虚数圆面的概念比复数平面的概念要合理得多；关于虚数对数的运算问题，其研究的思路和方法与《复变函数》理论有很大的不同，提出和运用方向对数的概念，使我们重新认识诸如 $\ln i$ 、$\ln(-1)$ 等问题；关于建立虚数的方向等式和方向不等式的理论，揭示了它们独特的基本性质，并首次引用了三个重要的数学符号：方向等于号、方向大于号、方向小于号。这些新的数学符号的引用，解决了在虚数圆面上虚数比较大小的问题，这个问题曾经困扰了我们很长一段时间，“复数不能比较大小”的结论终被改变；关于在虚数圆面上建立各种平面几何曲线的参数方程式的理论，为我们在虚数圆面上研究平面几何曲线提供了丰富的内容和保证；关于建立一种新的虚数圆柱坐标系的理论，这种坐标系是研究虚数函数的有力工具；关于建立虚数角三角函数的理论，这个理论使我们重新认识诸如 $\sin xi$ 、$\cos xi$ 等虚数角的三角函数问题，这类问题曾经使我们长期困惑，这个理论明显地比复变函数中的有关理论要合理得多；关于建立直角度制的理论，这是一种优于角度制和弧度制的第三种角的度量制，在虚数和华数的实际运算时特别适用；关于建立华数的理论，提出华数是虚数扩展的必然结果，论述了华数存在的空间形式及其数量的关系，由于华数理论的建立和应用，使我们重新认识了诸如 i^i 、i^{i^3} 等形式的数，与复变函数中的计算结果大不相同。由于有了以上这些重大数学概念和理论上的突破和发现，为我们重新正确审视和评价欧拉公式提供了坚实的理论基础。

本著作为广大读者提供了崭新的、极其丰富的内容，绝大部分内容都是作者经过长期的、苦心的研究和探索所获得的结晶，很值得数学工作者、数学爱好者认真一读。

由于实数的扩展问题是一个比较抽象又比较复杂的大问题，虚数是一个很广泛的领域，华数研究更复杂，由于作者数学水平有限，有些内容可能有考虑不妥之处，错误之处也很难避免，本著作仅作引玉之砖，谨请广大读者提出宝贵意见。

目　录

第一章　虚数圆面

§1.1　*i* 的引入

为了对任何负数进行开平方的运算，引入了一个极其重要的数学符号——i，并规定：

$$i^2 = -1 \tag{1-1}$$

在实数范围内，如果有一个数 x 的平方等于 a，即

$$x^2 = a$$

则称这个数 x 为 a 的平方根。正数 a 的正的平方根为"$\sqrt{a}$"，正数 a 的负的平方根为"$-\sqrt{a}$"，一个正数的平方根有两个，且它们互为相反数，即 $\pm\sqrt{a}$。

如果当 a 为负数时，情况将如何呢？

在实数范围内，负数不能开平方。自从引入了一个极其重要的数学符号 i，并规定了 $i^2 = -1$ 以后，情况就不同了。根据正数开平方的结果，同理可以得到负数开平方的结果；负数 -1 开平方的结果也有两个平方根：$\sqrt{-1}$ 和 $-\sqrt{-1}$。进一步规定 -1 的正的平方根为 $\sqrt{-1}$，以 i 表示，即

$$i = \sqrt{-1} \tag{1-2}$$

则 -1 的负的平方根为 $-\sqrt{-1}$，以 $-i$ 表示，即

$$-i = -\sqrt{-1}$$

从而为进一步解决负数开平方的问题奠定了基础。

在以后的深入研究中将会知道，由于 i 的乘幂所具有的周期性，-1 在开平方时，虽然有两个根值：i 和 i^3，但 i 是 $\sqrt{-1}$ 的主值，而 i^3 不是 $\sqrt{-1}$ 的主值，而是一般值。因此，当引入数学符号 i，并规定 $i = \sqrt{-1}$ 时，可以这样理解 i，即 -1 的开平方有两个根值，它的主值定义为 i。

在数学的运算中开始引入 i 时，它的重要意义和对数的扩展的深远影响还远远地不被人们所认识，当时引入 i 只是为了对负数的开平方能顺利地进行运算。随着研究的深入，i 的重要性将越来越多地显示出来，它不但标志着一种新数的诞生，而且对于数的概念的进一步扩展也产生了重大的影响，它的存在所具有的真正意义也正在被人们所逐步认识，它的神秘面纱也正在被人们所逐步揭开。

§1.2　*i* 的乘幂所反映的性质

根据 i 的引入规定，根据 -1 开平方后产生的两个根值，可以得到：

$$i = \sqrt{-1} \qquad -i = -\sqrt{-1}$$

但由于 $i^2 = -1$，所以进一步可得到：

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = 1$$

整理后得到：

$$\begin{cases} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i = -\sqrt{-1} \\ i^4 = 1 \end{cases} \tag{1-3}$$

如果继续 i 的乘幂，还可以得到：

$$i^5 = i^4 \times i = i$$
$$i^6 = i^4 \times i^2 = -1$$
$$i^7 = i^4 \times i^3 = -i$$
$$i^8 = i^4 \times i^4 = 1$$

从 i 的乘幂中，反映出一个极其重要的性质，那就是：i 的乘幂具有周期性。

一般地说，若 n 为整数，则有：

$$\begin{cases} i^{4n+0} = i^{4n} \cdot i^0 = 1 \\ i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i \\ i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1 \\ i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i \end{cases} \tag{1-4}$$

这里用 1、i、-1、$-i$ 4 个数来表示 i 乘幂的最终结果是目前普遍采用的方法，目前普遍认为 1 是实数单位，i 是虚数单位。虽然，从引入 i 到发现 i 的乘幂已经前进了一大步，而且又进一步发现了 i 的乘幂具有的周期性，解决了 i 的整数指数的求值问题，但是这种表示方法把实数 1 和 -1 与超出实数范围的 i 和 $-i$ 截然分开，并且把 i 看成是唯一的一个虚数单位，这种把虚数和实数完全割裂开来的思维方法阻碍了思想认识上的突破。目前，复平面上的坐标轴也是用这 4 个单位来表示的，显然，这种表示缺乏创造性和连续性。

如果把最终结果的表示方法改进一下，用 i^0 表示 1，用 i^2 表示 -1，用 i^3 表示 $-i$，则 i 的乘幂最终可以用 i^0、i、i^2、i^3 4 个数来表示，即

$$\begin{cases} i^{4n+0} = i^0 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = i^2 \\ i^{4n+3} = i^3 \\ i^{4n+4} = i^4 = i^0 \end{cases} \tag{1-5}$$

这里，i 的乘幂所反映的周期性比较明显，不但随着 n 的增大，i 的乘幂重复等于这 4 个数，而且这4 个数中，i 的指数也具有周期性：从 0 到 1，从 1 到 2，从 2 到 3，从 3 到 4，而 i^4 等于 i^0，又回到了原来的幂值上，用 i^0、i、i^2、i^3 这 4 个数来表示 i 乘幂的最终结果，与过去用 1、i、-1、$-i$ 4 个数来表示的方法相比，具有很大的区别，这种表示方法的优越性在以后的数学研究中将会越来越明显地显示出来。

这里，称整数 n 为虚数单位的周期数，随着周期数 n 的不断增大或减小，i 的乘幂在 i^0、i、i^2、i^3 4 个数中呈现出周期性的变化。我们称 $n=0$ 时 i 乘幂的 4 个值：i^0、i、i^2、i^3 为 i 乘幂的 4 个主值，i 的任何乘幂都可以化成这 4 个主值的形式。

例 1 计算 i^{-1}，i^{-2}，i^{-3}，i^{-4} 的主值。

解：

$$i^{-1} = i^{3-4} = \frac{i^3}{i^4} = i^3$$