黄则兴
陈经邦　编著
黄水源

解定值问题的方法与技巧

解定值问题的方法与技巧

黄则兴　陈经邦　黄水源　编著

广西教育出版社

解定值问题的方法与技巧

黄则兴　陈经邦　黄水源 编著

☆

广西教育出版社出版
（南宁市民族大道7号）
广西新华书店发行　　广西民族语文印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　5.25印张　字数113,000
1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
印　数：1—3,500册
ISBN 7-5435-0143-0/G·111
定价：1.50元

内 容 简 介

定值问题是中学数学里的内容之一，在几何、三角或代数中都涉及到一些有关定值的问题。探讨和解答定值问题有利于巩固学生的数学基础知识，养培学生探索问题的能力，调动学生学习数学的积极性。本书较系统地介绍中学几何、三角和代数中的定值问题及其解题方法和技巧，供中学师生参考。

目　　录

第一章　几何定值问题

我们先从熟悉的问题入手，研究“定值命题”的组成和如何探求定值．

问题：求证等腰△ABC底边BC上的任意一点P到两腰的距离PE、PF之和为定值(图1)．

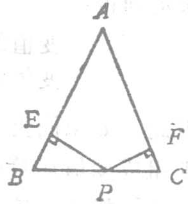

图 1

（一）定值命题的组成

观察已知等腰△ABC，由于A、B、C为定点，它的三条边、三个内角以及三个外角、三条高、中线、内角平分线……等等的位置和大小也就定了，甚至它的周长、面积、外接圆、内切圆的位置和大小都定了．

位置和大小固定的角、线段（面积、体积可视为线段长度的积），当然其量数是定值．定值角的和、差也是定值，定值线段的和、差、积、商（比）、幂也是定值．

另一方面，由于动点P的变动，也就产生了不少变位的角和变位的线段（简称变位元素）．如$\angle EPF$、$\angle BPE$、$\angle CPF$、$\angle EPA$、$\angle APF$、$\angle CPA$，以及PB、PC、PE、PF、EA、FA、EF等等．

变位元素其量数有定值与变值两类．如图1中：

变位角$\angle BPE = 90° - \angle B =$ 定值；

变位角$\angle EPF = 180° - \angle A =$ 定值．

如果变位元素的量数是定值，则组成变位定值命题。

变值元素之和、差、积、商、幂一般仍是变值，但也可能是定值．如图 1 中：

变值线段 PB + 变值线段 $PC = BC$ = 定值；

变值角$\angle BPA$ - 变值角$\angle EPA = \angle BPE = 90° - \angle B$ = 定值；

由于 E、A、F、P 四点共圆且 PA 为该圆的直径，故由正弦定理得：

$$\frac{\text{变值线段 } EF}{\text{变值线段 } PA} = \sin A = \text{定值}.$$

因此，如果同类变值元素之和、差、积、商、幂为定值，则组成变值运算的定值命题。

（二）探求定值命题的定值

产生变值的原因常常是由于已给图形中有动点（为与定点区别，本书把动点记作 $\dot{P}$、$\dot{E}$、$\dot{F}$、……）．一般说，动点有一定的运动范围，简称动域．容易看出，上述问题中的 $\dot{P}$ 的动域为线段 BC。若作两腰上的高 BH、CG，则 $\dot{E}$、$\dot{F}$、的动域分别为线段 BG、CH。

我们还要注意到动点间的关系：如果某一动点运动（或停留），其余的动点也因之运动（或停留）．这里我们把前者称为主动点，后者称为因动点．主、因动点是相对的．如上述问题中的 $\dot{P}$、$\dot{E}$、$\dot{F}$ 均可选为主动点．

观察主动点在动域中的特殊位置所产生的情况，常可得到定值（或经变形就可求出定值），这是探求定值的一种基本方法．上题的主动点 $\dot{P}$ 在动域中的特殊位置，是线段 BC 之端点 B、C 以及各个分点（常用的是中点 M）．现介绍两种探求方法：

探求一：（如图2）

当$\dot{P}\to B$　则$\dot{E}\to B$，$\dot{F}\to H$

这时$PE+PF=BB+BH=0+BH=BH$

探求二：（如图3）设M为BC的中点。

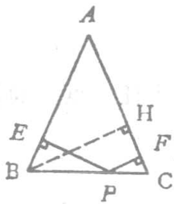

图2

图3

当$\dot{P}\to M$　则$\dot{E}\to N$，$\dot{F}\to Q$

这时$PE+PF=MN+MQ=\frac{1}{2}(CG+BH)=BH$

故定值为已知等腰$\triangle ABC$腰上的高BH.

（三）定值命题的证明

由特殊情况探求出来的定值是否正确，还必须经过一般性的论证。

上题的证法颇多，现用较简单的面积方法证明如下：

证明：（如图2）　连结PA。

$\because S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore \frac{1}{2}PE\cdot AB+\frac{1}{2}PF\cdot AC=\frac{1}{2}BH\cdot AC$。

又$\because$　$AB=AC$，$\therefore (PE+PF)AC=BH\cdot AC$。

则$PH+PF=BH$。

$\because BH$是已知等腰$\triangle ABC$腰上的高为定值，

故 $PE+PF=$定值。

一 平面几何定值问题

（一）变位定值线段

例1. 已知两个同心圆中，过小圆周上任一点P的切线交大圆于M、N。求证MN为定长。

探求： 已知两个同心圆，则它们的半径为定值，设为R、r（$R>r$），用R、r来表示变位线段MN的长度，利用图形性质列出方程来计算。

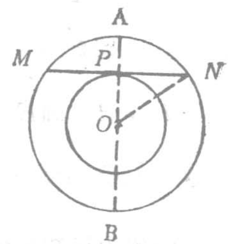

图4

证一： 过圆心O及P作大圆的直径AB，则 $AB\perp MN$且$MP=PN$。

由圆幂定理得

$$MP\cdot PN=AP\cdot PB=(AO-OP)(OP+OB),$$

即$PN^2=(R-r)(R+r)$，

故 $MN=2PN=2\sqrt{(R-r)(R+r)}$

$$=2\sqrt{R^2-r^2}=\text{定长}.$$

证二： 连OP、ON、则$OP\perp MN$ 且$MP=PN$。

由勾股定理得 $PN=\sqrt{ON^2-OP^2}=\sqrt{R^2-r^2}$，

故 $MN=2PN=2\sqrt{R^2-r^2}=$定长。

例2. 从定弧$\overset{\frown}{AB}$(图5)上任一点P作$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，C、D为垂足．求证CD为定长．

探求： 选$\dot{P}$为主动点，其动域为$\overset{\frown}{AB}$．当$\dot{P}\to A$，则$\dot{C}\to A$，$\dot{D}\to E$(E为$AE\perp OB$的垂足)．

这时$\triangle OCD$为$\mathrm{Rt}\triangle OAE$，

易知 $CD=AE$

$$=OA\times\sin\angle AOB$$

故 $CD=R\sin\angle AOB$

(R为$\overset{\frown}{AB}$的半径)．

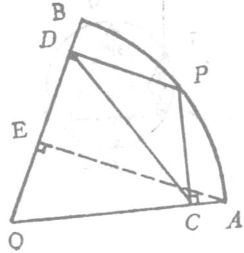

图5

证明： $\because\ \angle PCO=90^\circ=\angle PDO$，

$\therefore\ P$、D、C、O四点共圆且OP为该圆直径．

由正弦定理得$CD=OP\sin\angle AOB$，

$\because\ OP$是$\overset{\frown}{AB}$的半径为定值，$\angle AOB$是定弧$\overset{\frown}{AB}$的圆心角为定值．

$\therefore OP\sin\angle AOB=$定值．

故CD为定长．

例3. M是直角$\triangle ABC$斜边AB的中点，过C、M任作一圆交AC于E，此圆中的弦EF平行于AB．求证EF为定长．

探求： 选$\dot{E}$为主动点，其动域为线段AC．

当$\dot{E}\to A$(即过C、M的圆也过A)，则$\dot{F}\to M$．

这时 $EF=AM=\dfrac{1}{2}AB$．

证明： (图6)连MF、MC，

$\because\ M$为$\mathrm{Rt}\triangle ACB$斜边中点，

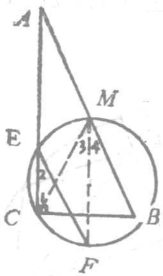

图 6

$\therefore\ MA = MC$。

又 $EF \parallel AB$，

$\therefore\ \angle 1 = \angle A = \angle 2 = \angle 3$，

$\therefore\ AC \parallel MF$，$AEFM$ 为平行四边形．

故$EF = AM = \frac{1}{2}AB =$ 定长．

注意：变位定值线段的和、差、积、商也是定值．例如分别在两平行直线 l_1、l_2上各取两点A、B，C、D（AB 与 CD 同向），如 $AB = a$，$CD = b$，则$S_{ABCD} =$ 定值．这是因为这里的AB、CD 都是变位定值线段，设 l_1、l_2的距离为 h，h也是变位定值线段，$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+CD)h = \frac{1}{2}(a+b)h =$ 定值．

（二）变值线段的和差

例4．四边形 $ABCD$ 中，$AC = BD$，过 AB 边上任一点 P 作 $PQ \parallel AC$ 交 BC 于Q，再过P、Q分别作 BD 之平行线交 AD、CD 于S、R．求证四边形 $PQRS$ 的周长为定值．

探求：选 $\dot{P}$ 为主动点，其动域为线段 AB．当 $\dot{P} \to A$，则 $\dot{Q} \to C$，$\dot{R} \to C$，$\dot{S} \to A$．

这时$PQ + QR + RS + SP$

$= 2AC$．

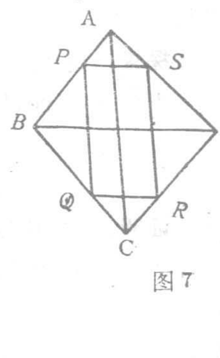

图 7

证明：（图 7） $\because PS \parallel BD$，

$PQ \parallel AC$．

$$\therefore\ \frac{PS}{BD} = \frac{AP}{AB}, \qquad (1)$$

$$\frac{PQ}{AC}=\frac{PB}{AB}. \tag{2}$$

而已知 $AC=BD$,

$\therefore$ (1)+(2)得 $\dfrac{PS+PQ}{AC}=\dfrac{AP+PB}{AB}=1$.

故 $PS+PQ=AC$.

又$\because$ $QR\parallel BD\parallel PS$, $\therefore$ $\dfrac{QR}{BD}=\dfrac{CQ}{BC}$, (3)

且从 $PQ\parallel AC$, 得 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{CQ}{BC}$ (4)

由(1)、(3)、(4)得 $\dfrac{PS}{BD}=\dfrac{QR}{BD}$, $\therefore$ $PS \underline{\parallel} QR$.

则 $PQRS$ 为平行四边形,

其周长 $=2(PS+PQ)=2AC=$ 定值.

"等腰三角形底边上任一点到两腰的距离之和为定值"推广:

例5. 正 n 边形内任一点到边的距离之和为定值.

探求: (如图8)选 $\dot{P}$ 为主点, 其动域为正 n 边形内部, n 边形的中心 O 为 $\dot{P}$ 的特殊位.

当 $\dot{P}\to O$, 则 P 到各边的距 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 都等于正 n 边的内切圆半径 r.

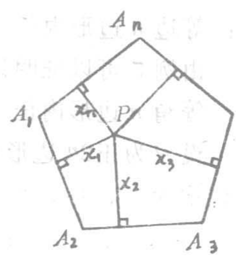

图8

故 $x_1+x_2+\cdots+x_n=nr$.

证明：设正 n 边形的边长为 a，面积为 s。

$\because \quad S_{\triangle PA_1A_2}+S_{\triangle PA_2A_3}+\cdots+S_{\triangle PA_nA_1}=S$，

$\therefore \quad \dfrac{1}{2}a(x_1+x_2+\cdots+x_3)=S$。

则 $\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=\dfrac{2S}{a}$。

$\because$ 正 n 边形的边长 a 与面积都是定值。

故 $\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=\dfrac{2S}{a}=$定值。　　(1)

但 $S=\dfrac{1}{2}nar$，所以

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{nar}{a}=nr=\text{定值}。\qquad (2)$$

注意，证题的“定值”形式可以不同，但实质是相同的，如例5中的(1)、(2)。如果以 $\dfrac{2S}{a}$ 为定值，则例5可改为：等边 n 边形内任一点到各边的距离之和为定值。

由例5可以证明以下两个结论：

等角 n 边形内任一点到各边的距离之和为定值。

设 P 为正 $2n$ 边形内任一点，由 P 到正 $2n$ 边形各边的距离依次为 x_1，x_2，x_3，x_4，…，x_{2n-1}，x_{2n}，则

$$(x_1+x_3+\cdots+x_{2n-1})-(x_2+x_4+\cdots+x_{2n})=\text{定值}$$

把定值问题转化为已经证明过的定值命题从而求出定值，这是探求定值的第二种基本方法，也是证明定值命题的一种途径。

（三）变值线段的积

例6. 两定圆A、B相交于C、D，已知A点在B圆周上，如果B圆之任意弦AF交CD于E。求证：$AE\times AF$=定值。

探求一：（如图9）选$\dot{E}$为主动点，其动域为线段CD。当$\dot{E}\to C$，则$\dot{F}\to C$。这时$AE\times AF=AC\times AC=AC^2$。

证明一：连AC、AD、CF。

∵　A圆的半径$AC=AD$，

∴　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\angle ACD=\angle F$。

又∵$\angle EAC=\angle CAF$，

∴$\triangle EAC\backsim\triangle CAF$，

则　$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AC}{AF}$。

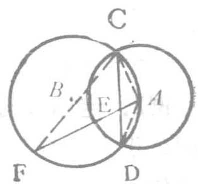

图9

于是$AE\times AF=AC^2$。

∵　AC是定圆A的半径为定值，∴AC^2也为定值。

故$AE\times AF$=定值。

探求二：（如图10）选$\dot{F}$为主动点，其动域为$\overset{\frown}{CMD}$。设$\overset{\frown}{CMD}$之中点为M，CD之中点为N。

当$\dot{F}\to M$，则$\dot{E}\to N$。

这时$AE\times AF=AN\times AM=AC^2$（射影定理）。

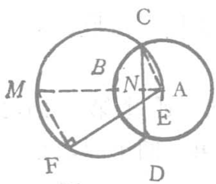

图10

证明二：作B圆的直径AM交CD于N，连MF、AC。

∵　$\angle CNM=90^\circ=\angle AFM$，

∴　M、N、E、F四点共圆。

由交割线定理得

$$AE \times AF = AN \times AM. \qquad (1)$$

又由射影定理得 $AN \times AM = AC^2 \qquad (2)$

故由(1)、(2)得 $AE \times AF = AC^2 =$ 定值。

注意：1．A、M、N都是定点，所以$AM \times AN =$定值．因此证明二证到(1)为止就可以下结论．

2．本类问题当定值找出后，就成为线段的等积形式：$ab = cd$（a、b、c、d为线段）．证明线段等积式的一般思考方法是：

① 把等积式化为线段的比例式 $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$，证明$a$、$c$与$d$、$b$为两个相似三角形的对应边．如果这两个三角形找不出来，就找出第三比作为桥梁；

② 应用由相似三角形推证出来的定理．

例7．定圆O与两平行直线l_1、l_2相切于A、B，直线l_3切圆O于P，且与l_1、l_2分别交于C、D。求证：$PC \times PD =$ 定值。

探求：（如图11）选$\dot{P}$为主动点，其动域为除A、B两点以外的圆O之圆周．取$\overset{\frown}{AB}$之中点M，过M作圆O的切线与l_1、l_2分别交于N、Q。

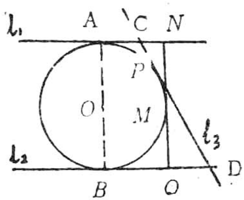

图11

当$\dot{P} \to M$，

则$\dot{C} \to N$，$\dot{D} \to Q$，

这时 $PC \times PD = MN \times MQ = AO^2$。

根据上述的证明思考方法，本例可用相似三角形、射影定理或勾股定理来证明．推证过程从略。

例8．两定圆相交于E、F，且第一圆周通过第二圆之圆心A，过第二圆周上任一点D作切线交第一圆于B、C。求证：$AB \times AC =$ 定值。

探求：（如图12）选$\dot{B}$为主动点，其动域为$\overset{\frown}{EKF}$.

当$\dot{B}\to K$（AK为第一圆之直径），

则$\dot{D}\to F$，$\dot{C}\to F$.

这时$AB\times AC=AK\times AF$（AF为第二圆之半径）.

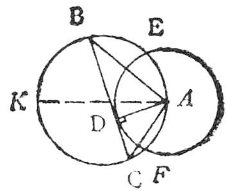

图12

证明：作第一圆的直径AK，由正弦定理得

$$AB=AK\cdot\sin C \qquad (1)$$

连AD，则$\angle ADC=90°$，$\therefore AC=\dfrac{AD}{\sin C}$　　(2)

(1)×(2)得$AB\times AC=AK\cdot AD=AK\cdot AF$.

$\because AK$、AF分别是第一圆的直径、第二圆的半径均为定值，其积也为定值.

故　$AB\times AC=$定值.

（四）变值线段的比

例9. 定圆O上有两定点A、B，C为$\overset{\frown}{AB}$之中点，P为圆周上任一点. 求证：$\dfrac{PA+PB}{PC}=$定值.

探求：（如图13）已知图形中只有一个动点$\dot{P}$，它的动域为除C以外的圆O之圆周.

当$\dot{P}\to B$时，$\dfrac{PA+PB}{PC}\to\dfrac{BA+BB}{BC}=\dfrac{BA}{BC}$

证明：延长AP到D使$PD=PB$，连BD、BA、BC，则$\angle D=\angle DBP$，$\angle C=\angle A$.