



中等專業學校教學用書

# 三角學教程

И. Я. 柯仁烏若夫著

商務印書館



中等專業學校教學用書



# 三 角 學 教 程

И. Я. 柯仁烏若夫著  
李 榮 凍 譯

商 務 印 書 館

---

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社(ГОСТЕХИЗДАТ)出版的柯仁烏若夫(П. Я. Кожеуров)新著“三角學教程”(Курс тригонометрии)1952年初版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲中等技術學校教科書。

## 三 角 學 教 程

李 榮 涑 譯

---

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通巷路一九〇號

(51273)

---

1953年7月初版

1956年1月4版

版面字數 237,000

印張 8 2/16

印數 305,001—311,000(1月第1次印) 定價(7) ¥0.73

## 序 言

本書適用於中等技術學校的一切專業。著者所持有的任務：在科學道理上給三角學以嚴密的、符合於中等技術學校數學教學大綱的敘述，以及選擇出不僅足供課堂作業而且還夠家庭作業之用的習題。

為了滿足系統敘述的要求，不得不引入少量超出教學大綱範圍的材料；這一切材料以及例題和習題都是用小號字排印的。

在中等技術學校的數學教學大綱中，規定了先學習平面上的坐標法，但極大部分的中等技術學校還要學習高等數學的初步知識。這種情況在某種程度上決定了本書編寫的體系；但是定義和術語完全符合於通用的；很多定義和術語是選自初等三角學教程和高等數學教程的。在本書中廣泛地利用着平面上的坐標法，來下定義及當作研究的工具。

著者認為將本書編寫成像普通中學用的那樣是不可能的；中等技術學校用的三角教科書，在數學科目的體系中應當成為整個教學計劃的一個有機組成部分。

在書末有三角學的發展簡史，B. A. 蘇洛德可夫同志曾參加這一部分的編寫工作。

C. II. 諾沃謝洛夫同志在我編寫本書時曾給與我許多珍貴的意見和指教，在此謹對他的幫助表示我衷心的感謝。同時對於提供了若干寶貴意見的 P. A. 卡爾寧同志與 B. II. 米諾耳斯基同志也表示衷心的感謝。本書曾經 II. C. 莫金諾夫同志仔細校訂，著者特向他致以謝忱。

II. Я. 柯仁烏諾夫

# 目 錄

## 序言

### 第一章 銳角的三角函數·直角三角形的解法.....1

§ 1. 定義 .....	1
§ 2. 根據已知三角函數作出銳角的方法 .....	3
§ 3. 同一銳角的各三角函數間的關係 .....	6
§ 4. 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法 .....	7
§ 5. 三角恆等式 .....	10
§ 6. $30^\circ$ , $45^\circ$ 和 $60^\circ$ 各角的三角函數 .....	11
§ 7. 餘角的三角函數 .....	13
§ 8. 銳角三角函數的增大和減小 .....	14
§ 9. 直角三角形中邊與角之間的關係和直角三角形解法的四種基本情形 .....	17
§ 10. 三角函數表 .....	18
§ 11. 解直角三角形的例 .....	23
§ 12. 等腰三角形的解法 .....	25
練習 .....	27

### 第二章 角的概念的推廣·角的測量法..... 37

§ 13. 角的概念的推廣 .....	37
§ 14. 角的弧度法 .....	38
§ 15. 某些角的度與徑表示式之間的關係表 .....	39
§ 16. 由角的度化為弧度和由弧度化為度的變換 .....	40
§ 17. 圓周的弧長 .....	42
§ 18. 問題 .....	42
§ 19. 線速度和角速度 .....	46
練習 .....	48

### 第三章 三角函數概念的推廣·三角函數的週期性..... 51

§ 20. 任意角的三角函數 .....	51
§ 21. 三角函數的週期性 .....	63
§ 22. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 諸角的三角函數 .....	65

§ 23. 三角函數的符號 .....	69
§ 24. 三角函數的增大和減小 .....	74
§ 25. 基本的恆等式 .....	76
§ 26. 根據一個三角函數計算其餘各三角函數 .....	78
練習 .....	82
<b>第四章 誘導公式. 三角函數的圖形 .....</b>	<b>87</b>
§ 27. 頁角的三角函數的誘導公式 .....	87
§ 28. 角的形狀為 $90^\circ + \alpha$ 的三角函數的誘導公式 .....	90
§ 29. 角的形狀為 $90^\circ - \alpha$ , $180^\circ - \alpha$ , $180^\circ + \alpha$ , $270^\circ - \alpha$ , $270^\circ + \alpha$ , $360^\circ - \alpha$ 的 三角函數的誘導公式 .....	93
§ 30. 三角函數的圖形 .....	101
練習 .....	108
<b>第五章 餘弦定理. 加法定理. 二倍角及半角的三角函數 .....</b>	<b>112</b>
§ 31. 餘弦定理 .....	112
§ 32. 加法定理 .....	113
§ 33. 二角的和及差的正切 .....	117
§ 34. 二倍角的正弦、餘弦和正切 .....	118
§ 35. 用半角的正切來表整角的各三角函數 .....	121
§ 36. 半角的正弦、餘弦和正切 .....	122
練習 .....	127
<b>第六章 變換三角函數的和與差為乘積 .....</b>	<b>132</b>
§ 37. 變換兩個正弦或餘弦的和與差為乘積 .....	132
§ 38. 變換兩個正切或餘切的和與差為乘積 .....	134
§ 39. 將表示式化為適於對數計算形式的例題 .....	135
練習 .....	138
<b>第七章 反三角函數 .....</b>	<b>142</b>
§ 40. 定義 .....	142
§ 41. 基本恆等式 .....	147
§ 42. 關於反三角函數的例題 .....	148
練習 .....	150
<b>第八章 三角方程式 .....</b>	<b>153</b>
§ 43. 最簡單的三角方程式 .....	153

§ 44. 含一未知數的三角方程式的一般解法	163
§ 45. 解三角方程式的例子	163
練習	174
<b>第九章 斜三角形各元素間的基本關係式及利用三角函數表</b>	
<b>求解斜三角形</b>	180
§ 46. 正弦定理	180
§ 47. 根據三角形的二邊及其夾角求三角形的其他二角的公式	184
§ 48. 根據三角形的三邊求三角形諸角的公式	185
§ 49. 三角形的面積	186
§ 50. 平行四邊形的面積	188
§ 51. 根據一邊與二角解斜三角形	189
§ 52. 根據二邊及其中一邊的對角解斜三角形	190
§ 53. 根據二邊及其夾角解斜三角形	192
§ 54. 根據三邊解斜三角形	194
練習	195
<b>第十章 三角函數對數表及其對解三角形的應用</b>	200
§ 55. 三角函數對數表	200
§ 56. 四位數字表的精確度	201
§ 57. 利用對數表進行計算的例子	202
§ 58. 利用對數表解直角三角形的例子	203
§ 59. 利用對數表解斜三角形的例子	205
練習	209
<b>第十一章 三角學在立體幾何學上的應用</b>	215
§ 60. 應用三角學解立體幾何學上問題的例子	215
練習	227
三角學的發展簡史	240
三角公式及其他幾種便覽表	249

# 第一章 銳角的三角函數. 直角三角形的解法

## § 1. 定義

取任意的銳角  $\alpha$  (圖 1)。作一直角三角形, 使它的一個銳角等於  $\alpha$ 。在角的一邊上, 取不與角的頂點  $A$  重合的任意一點  $B$ , 並從  $B$  點向另一邊作垂線  $BC$ 。引入記號:  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ 。

**定義 1.** 銳角  $\alpha$  所對的直角邊  $a$  與斜邊  $c$  這二者的比值稱為銳角  $\alpha$  的正弦:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}。$$

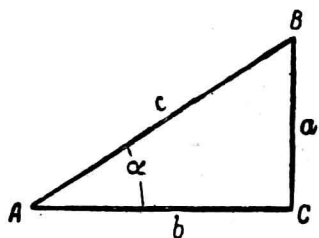


圖 1

**定義 2.** 和銳角  $\alpha$  相鄰的直角邊  $b$  與斜邊  $c$  這二者的比值稱為銳角  $\alpha$  的餘弦:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}。$$

**定義 3.** 銳角  $\alpha$  所對的直角邊  $a$  與此角相鄰的直角邊  $b$  這二者的比值稱為銳角  $\alpha$  的正切:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}。$$

**定義 4.** 銳角  $\alpha$  相鄰的直角邊  $b$  與此角所對的直角邊  $a$  這二者的比值稱為銳角  $\alpha$  的餘切:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}。$$

我們用例子來表明, 如何求任何一個角 (這裏係指任何銳角



——譯者), 例如角  $48^\circ$  的正弦、餘弦、正切和餘切的近似值。

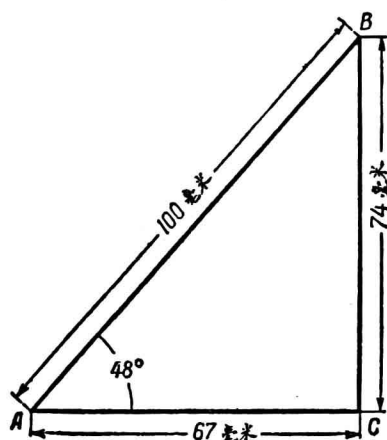


圖 2

利用直尺、圓規和量角器作出直角三角形  $ABC$ , 這三角形中  $\angle BAC = 48^\circ$ , 而斜邊  $AB = 100$  毫米(圖 2, 縮小 1.5 倍)。量直角邊  $BC$  和  $AC$  得:  $BC \approx 74$  毫米, 而  $AC \approx 67$  毫米。則有:

$$\sin 48^\circ \approx \frac{74}{100} = 0.74;$$

$$\cos 48^\circ \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ \approx \frac{74}{67} \approx 1.1;$$

$$\operatorname{ctg} 48^\circ \approx \frac{67}{74} \approx 0.90.$$

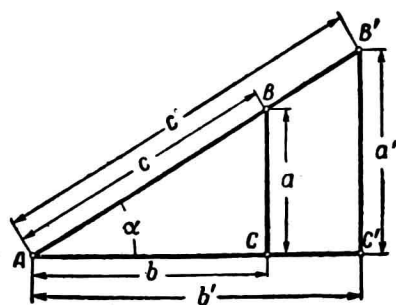


圖 3

用同樣的方法可求得任何銳角的正弦、餘弦、正切和餘切的值。

**定理 1.** 當已知  $\alpha$  角時, 它的正弦、餘弦、正切和餘切的值即完全確定, 也就

是說, 這幾個值與作輔助直角三角形時對  $B$  點的選擇無關。

**證明** 研究有銳角  $\alpha$  的任意兩個直角三角形  $ABC$  及  $AB'C'$  (圖 3)。這兩三角形相似, 所以

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \sin \alpha,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos \alpha,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

定理已被證明。

因此，對應於銳角  $\alpha$  有完全確定的值  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  和  $\operatorname{ctg} \alpha$ 。所以  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  和  $\operatorname{ctg} \alpha$  是角  $\alpha$  的函數。這些函數叫做三角函數。

## § 2. 根據已知三角函數作出銳角的方法

從  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的定義推得，銳角  $\alpha$  的正弦和餘弦是小於 1 的正數：

$$0 < \sin \alpha < 1,$$

$$0 < \cos \alpha < 1,$$

式中  $\alpha$  為銳角。

**定理 1.** 對於任何小於 1 的正數  $y$ ，只能找得到一個銳角  $\alpha$ ，它的正弦等於  $y$ 。

$$\sin \alpha = y.$$

**證明** 作出直角三角形  $ABC$  (圖 4)，使它的一直角邊等於  $y$ ，斜邊等於 1。於是

$$\sin \angle BAC = \sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{1} = y.$$

我們已經證明了，存在有這樣的一個銳角  $\angle BAC = \alpha$ ，它的正弦等於  $y$ 。

我們將證明，正弦等於  $y$  的任何銳角  $\beta$  必等於銳角  $\alpha$ 。

事實上：設  $\beta$  為銳角，它的正弦等

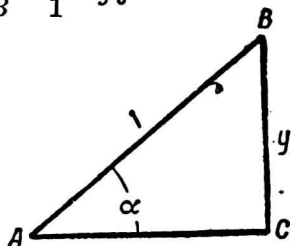


圖 4

於  $y$ ; 作出直角三角形  $A'B'C'$ , 它有銳角  $B'A'C' = \beta$  (圖 5)。於是

$$\frac{B'C'}{A'B'} = \sin \beta = y。$$

但  $\frac{BC}{AB} = y,$

所以  $\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}。$

因此, 直角三角形  $ABC$  相似於直角三角形  $A'B'C'$ , 即是說  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ , 也就是  $\alpha = \beta$ 。

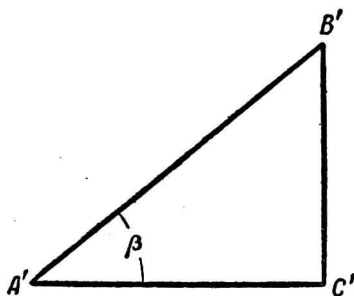


圖 5

我們已經證明了, 僅存在有一個銳角, 它的正弦等於  $y$ 。

同樣, 可證明下列定理。

**定理 2.** 對於任何小於 1 的正數  $x$ , 只能找得到一個銳角  $\alpha$ , 它的餘弦等於  $x$ :

$$\cos \alpha = x。$$

**定理 3.** 對於任何的正數  $p$ , 只能找得到一個銳角  $\alpha$ , 它的正切等於  $p$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = p。$$

**定理 4.** 對於任何的正數  $q$ , 只能找得到一個銳角  $\alpha$ , 它的餘切等於  $q$ :

$$\operatorname{ctg} \alpha = q。$$

我們用例子來說明, 怎樣根據銳角的已知三角函數去作出銳角  $\alpha$  的方法。

**例 1.**  $\sin \alpha = \frac{3}{4}。$

在任意直線上取線段  $DE = 3$  (圖 6)。

過  $E$  點引直線  $EF \perp DE$ 。作出中心在  $D$  點, 半徑為 4 的圓周。

令  $K$  爲此圓周與直線  $EF$  的交點。則角  $EKD$  爲所求的銳角  $\alpha$ , 因爲它的正弦等

於  $\frac{DE}{DK} = \frac{3}{4}。$

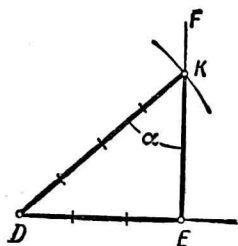


圖 6

例 2.  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ 。

在任意直線上取線段  $BC=2$  (圖 7)。過  $C$  點引直線  $CM \perp BC$ 。作出中心在  $B$  點，半徑  $r=5$  的圓周。令  $A$  爲此圓周與直線  $CM$  的交點。則角  $ABC$  的餘弦等於  $\frac{BC}{BA} = \frac{2}{5}$ ；因之， $\angle ABC$  是所求的銳角  $\alpha$ 。

例 3.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ 。

在直角  $MON$  (圖 8) 的一條邊上，例如在  $OM$  上，從頂點  $O$  取線段  $OA=3$ ，而在另一條邊上取線段  $OB=2$ 。連結  $A$  點和  $B$  點。角  $OAB$  的正切等於  $\frac{2}{3}$ ，因之， $\angle OAB = \alpha$ 。

例 4.  $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ 。

仿照前面的作圖法。在直角  $LKM$  (圖 9) 的兩邊上取線段  $KA$  和  $KC$ ，在這兩條

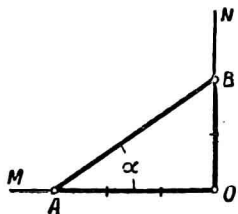


圖 8

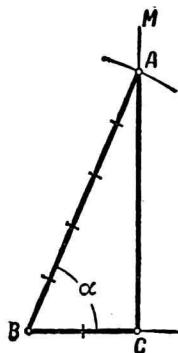


圖 7

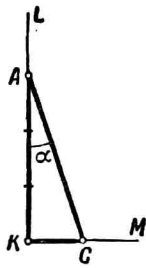


圖 9

線段之中，例如第一條 ( $KA$ ) 爲第二條 ( $KC$ ) 的三倍。連結  $A$  點和  $C$  點。角  $KAC$  的餘切等於 3，因之， $\angle KAC = \alpha$ 。

## § 3. 同一銳角的各三角函數間的關係

取任意的銳角  $\alpha$  並作出直角三角形  $ABC$ ，它的一個銳角等於  $\alpha$  (圖 10)。設  $BC=a$ ,  $CA=b$  和  $AB=c$ 。

根據畢達哥拉斯定理  $\ominus$ ，從直角三角形  $ABC$  得：

$$a^2 + b^2 = c^2。$$

用  $c^2$  去除這個等式的兩端，得：

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

因爲  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$  和  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ 。

我們再指出下列公式，這些公式也是從三角函數的定義推出：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1。 \quad (4)$$

事實上，因爲

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

則

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$\ominus$  譯者註：該定理爲我國人所最先發現，因此應改爲我國發現該定理之人的名字，有人主張改爲「商高定理」，也有人主張改爲「陳子定理」。(見中國數學雜誌 1 卷 1 期「商高定理呢？陳子定理呢？」及 1 卷 4 期「關於商高或陳子定理的討論」二文)。

其次：
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

#### § 4. 根據銳角的一個三角函數計算此角的其他三角函數的方法

由前節的公式，可從一個三角函數的值求出其餘一切三角函數的值，現在用例子來表明應當如何去作。

例 1. 已給： $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ 。計算銳角  $\alpha$  的其他各三角函數值。

從公式  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  有：

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha.$$

把  $\sin \alpha$  的已知值  $\frac{20}{29}$  代入，得：

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{29^2 - 20^2}{29^2} = \frac{49 \times 9}{29^2}.$$

於是  $\cos \alpha = \frac{21}{29}$ 。

要求  $\operatorname{tg} \alpha$  可用公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

得：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{29} : \frac{21}{29} = \frac{20}{21}.$$

由此得

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{21}{20},$$

因為  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ 。

例 2. 已給： $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$ 。計算銳角  $\alpha$  的其他各三角函數值。

把  $\operatorname{tg} \alpha$  的值作為  $\operatorname{ctg} \alpha$  的倒數記下來：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{28}{45}.$$

根據公式  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  有： $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{45}{28}$ 。將此等式的兩端平方，得：

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{45^2}{28^2}.$$

將上式的兩端各加 1：

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{45^2}{28^2} \quad \text{或} \quad \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{28^2 + 45^2}{28^2}.$$

考慮到  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  (§ 3)，得：

$$\sin^2 \alpha = \frac{28^2}{2025 + 784}, \text{ 由此得 } \sin \alpha = \frac{28}{53}.$$

從公式  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  有  $\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$ .

應用上面的結果得：

$$\cos \alpha = \frac{45 \times 28}{28 \times 53} = \frac{45}{53}.$$

例 3. 若  $\cos \alpha = \frac{2}{7}$ , 求銳角  $\alpha$  的其他各三角函數值。

解 從公式  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  有：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

例 4. 若  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$ , 求銳角  $\alpha$  的其他各三角函數值。

用下法解這個例子最簡便。研究以  $p$  和  $q$  為直角邊的直角三角形(圖 11)。它的斜邊等於  $\sqrt{p^2 + q^2}$ , 所以

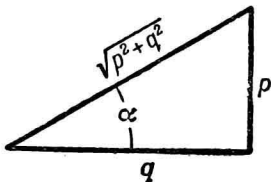


圖 11

根據值

$$\cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{q}{p}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$$

用幾何的方法推出以下兩個三角函數值

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

這個方法, 最好記住, 因為在應用中往往必須根據  $\operatorname{tg} \alpha$  的值來求  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值。

例 5.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$  (圖 12)。有：

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

也可根據  $\operatorname{ctg} \alpha$  的值, 幾何地求出  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$  的值, 這裏  $\alpha$  是銳角。

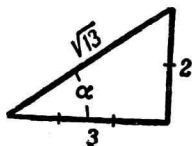


圖 12

例 6.  $\operatorname{ctg} \alpha = 3$  (圖 13)。於是

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

作出一切計算的普遍形式，即是說，不使已給函數具有確定的值，可推出普遍公式。

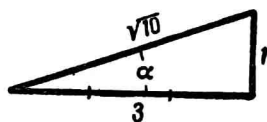


圖 13

例 7. 用  $\cos \alpha$  表示銳角  $\alpha$  的三角函數值。

從公式  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  求得：

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

隨之

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

例 8. 推出用  $\operatorname{tg} \alpha$  表示銳角  $\alpha$  的三角函數的式子。

從公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

有：

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

在這些等式的兩端各加 1，得：

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

因  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，則

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

由此得

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

因此

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$



最後

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

用  $\sin \alpha$  和  $\operatorname{ctg} \alpha$  表示銳角  $\alpha$  的三角函數公式的推論，留待讀者。

茲寫出用  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  和  $\operatorname{ctg} \alpha$  表示銳角三角函數的公式：

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

注意 這些公式不須要記得。根據銳角的一個三角函數，計算此角的其他各個三角函數時，每一次都必須如上面所示各例子那樣進行，且利用基本公式：

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

這些公式必須牢固地記熟。

### § 5. 三角恆等式

§ 3 中表示同一銳角的三角函數之間的關係式是三角恆等式的例子，無論角的大小如何它們都成立。要證明三角恆等式，可把恆等式的左端改變成右端，或把右端改變成左端，或把恆等式的每一端都改變成同一的式子。