

混沌电路导论

An Introduction to Chaotic Circuits

包伯成 著



科学出版社

内 容 简 介

本书主要论述混沌电路的动力学建模、数值仿真、分岔分析与电路实验, 具体内容包括: 混沌与混沌系统概述、混沌系统数值方法、混沌系统电路实现、简单混沌产生电路、多涡卷混沌系统设计、电流控制开关变换器、斜坡补偿开关变换器和忆阻器与忆阻混沌电路, 涵盖了离散迭代映射、连续混沌系统、时变离散混沌系统和记忆连续混沌系统等相关内容。

本书是作者近年来部分研究成果的总结和提炼, 选择了一些浅显易懂的内容, 侧重于混沌电路的建模仿真与电路实验, 可读性较强, 可作为高等院校电路与系统等相关专业的研究生教材, 也可作为自然科学和工程技术领域中科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

混沌电路导论/包伯成著. —北京: 科学出版社, 2013.1
ISBN 978-7-03-035999-5

I. ①混… II. ①包… III. ①混沌理论—应用—电路理论
IV. ①TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 268188 号

责任编辑: 张 濮 陈 静 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 1 月第一次印刷 印张: 15 3/4

字数: 317 500

定价: 60.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

作为 20 世纪人类自然科学的重大发现,混沌、分形理论的研究在过去几十年中取得了巨大的进展。近年来,混沌、分形理论广泛应用于信息科学中,为复杂系统、密码学、信号处理、多媒体、通信系统、生物学、经济系统等领域的研究提供了全新的手段与方法。

混沌电路是混沌在信息科学中得以广泛应用的核心,混沌系统的综合设计、理论分析、数值仿真和电路实现,是为了产生满足各种应用需要的混沌信号,并进行混沌信号频谱设计、混沌信号特性优化,以及混沌同步控制、混沌镇定控制。混沌系统和混沌电路经历了几十年的发展,涵盖内容越来越丰富、理论基础日臻完善。然而,大多数研究人员和高等院校学生在进行混沌系统与混沌电路的研究和学习时,一直面临诸多困难。这是由于混沌系统与混沌电路所涉及的内容存在多学科交叉,即不仅要了解各种丰富且复杂的非线性物理现象,又要懂得如何利用相关的数学工具和 MATLAB 数值仿真软件进行形成机理分析,还要具备电子线路相关知识进行混沌系统的电路设计与制作。

基于以上原因,本书着眼于一些典型的混沌系统与混沌电路的生成模型,给出这些系统与电路动力学分析的数值仿真工具,并提供具体电路实现形式和实验观察结果,便于读者揭示和分析这些混沌系统所存在的丰富且复杂的非线性动力学现象。同时,针对电子信息工程专业和电力电子技术专业中的一类典型电路,如蔡氏(Chua)混沌电路、Colpitts 振荡器、开关 DC-DC 变换器和基于忆阻器的振荡电路等,通过各种动力学建模方法建立相应的数学模型,并利用常规的动力学分析手段,揭示其复杂的物理现象,并阐述其形成机理。全书共 8 章,除了第 1 章介绍混沌与混沌系统的基本概念外,其他章节内容具有一定的独立性,读者可以参照不同章节内容,将相关的分析方法应用到具体混沌电路的分析中。

全书按照内容可分为两部分:第一部分主要介绍混沌与混沌系统的一般概念,混沌系统的数值分析方法及其 MATLAB 源程序,混沌系统的模拟电路和数字电路具体实现;第二部分主要介绍简单混沌产生电路、多涡卷混沌系统设计、电流控制开关变换器、斜坡补偿开关变换器、忆阻器与忆阻混沌电路的动力学建模、数值仿真分析、电路实验等,是第一部分理论和方法在典型混沌电路中的具体应用。

第一部分包括 1~3 章。第 1 章简要介绍混沌研究的历史沿革,混沌的定义、特征和混沌的刻画方法;重点介绍离散迭代映射、连续混沌系统、连续超混沌系统和多涡卷混沌吸引子等典型混沌系统,以及蔡氏混沌电路和 Colpitts 振荡器电路

等经典混沌电路的数学模型和混沌特征；同时，也介绍由开关功率变换器构成的时变混沌电路和由忆阻器构成的记忆混沌电路这两类特殊混沌电路的研究方法和动力学特性。第 2 章分别介绍离散迭代映射和连续混沌系统常见的动力学分析方法，给出分析相应系统动力学特性的 MATLAB 数值计算的仿真程序。其中，离散迭代映射的 MATLAB 仿真源程序可分析分岔图、迭代曲线、迭代序列、相轨图、最大李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数和特征值轨迹等，连续混沌和超混沌系统的 MATLAB 仿真源程序可分析相轨图、时域波形、庞加莱 (Poincaré) 映射、分岔图和 Lyapunov 指数谱等。第 3 章先从线性运算、非线性运算、时滞与转换等功能运算单元电路的详细电路设计出发，介绍连续混沌系统按功能模块进行模拟电路实现的电路综合设计思路，给出一些混沌和超混沌系统的模拟电路实现示例；然后，基于微控制器 (MCU) 设计一个通用的混沌信号产生器的嵌入式数字集成平台，对连续混沌系统进行状态变量线性变换和离散化处理，通过 C++ 语言程序编程，可以同时在该数字集成平台上实现不同类型和不同数量涡卷 (翼) 的混沌吸引子。

第二部分包括 4~8 章。第 4 章进行蔡氏混沌电路、Colpitts 振荡电路和文氏桥超混沌电路等典型的简单混沌产生电路的动力学研究，包括状态微分方程建立、数值仿真、动力学分析、电路制作，以及观测实验结果，提出并设计频率混沌信号源的实现原理和具体电路。第 5 章从一个不稳定的三维线性系统出发，提出构造多涡卷混沌系统的一般思路；然后基于三阶单涡卷混沌 Colpitts 振荡器模型，采用分段线性三角波函数替换模型状态方程中的非线性指数项，构造出一类新的多涡卷混沌系统；并通过在不稳定线性系统中引入两个分布不均匀的锯齿波函数，实现多涡卷混沌吸引子的涡卷数量、涡卷位置的设计，揭示多涡卷混沌系统在不同的控制参数值和初始条件下存在吸引子共存现象。第 6 章以二阶电流控制 Buck-Boost 变换器为例，系统地研究电流控制开关变换器的动力学理论，包括动力学离散时间建模、分岔分析、稳定性分析、工作状态域估计，以及分段线性模型仿真验证和电路制作实验验证等。第 7 章建立斜坡补偿 Boost 变换器的分段光滑迭代映射方程，研究开关 DC-DC 变换器斜坡补偿的动力学机理，导出运行轨道状态发生转移时的两个分界线分类方程，由此确定其工作状态的区域分布；同时建立斜坡补偿开关 DC-DC 变换器统一的和归一化的迭代映射方程，进行斜坡补偿 Buck 和 Buck-Boost 变换器的动力学分析、工作状态域估计的研究和以 Buck 变换器为例的实验验证。第 8 章从忆阻器的基本定义出发，讨论分段线性函数、三次型非线性函数和二次型非线性函数描述的三个忆阻器模型和伏安关系 (VCR) 特性；以二次型非线性函数描述的有源磁控忆阻器模型为例，研究有源磁控忆阻器的等效电路实现，有源 WC 电路频率响应特性的电路仿真；研究基于三次型磁控忆阻器的光滑忆阻振荡器，并利用 Lyapunov 指数谱、分岔图、庞加莱映射、相轨

图等常规的动力学分析方法，详细地研究在电路参数和初始条件发生变化时光滑忆阻振荡器的动力学特性；研究基于二次型有源磁控忆阻器的忆阻混沌电路，并利用有源磁控忆阻器的等效电路，进行电路制作和实验观察，从物理电路中得到忆阻电路的混沌吸引子，并且开展忆阻混沌电路（即非线性记忆系统）的稳定性分析，对忆阻器初始状态的系统稳定性进行参数估计。

本书内容主要源自国家自然科学基金项目（51277017、51177140、50677056、60971090）、江苏省自然科学基金项目（BK2012583、BK2009105）、常州市应用基础研究计划项目（CJ20120004）和常州大学科技计划项目（ZMF11020005）的创新成果，是作者近四年来部分科研成果的积累与总结。作者在从事研究和本书的写作过程中得到许多同行的支持和帮助，特别是其中的许多结果是作者与合作者共同完成的，作者在此表示衷心的感谢。

由于作者水平及参阅资料有限，书中难免有不妥之处，恳请专家和读者批评指正！

作 者

2012年8月

目 录

前言

第 1 章 混沌与混沌系统概述	1
1.1 引言	1
1.2 混沌的一般概念	2
1.2.1 混沌研究的历史沿革	2
1.2.2 混沌的定义和特征	3
1.2.3 混沌的刻画方法	5
1.3 典型混沌系统	8
1.3.1 混沌系统分类	8
1.3.2 一维离散迭代映射	10
1.3.3 二维离散迭代映射	12
1.3.4 三维连续混沌系统	14
1.3.5 四维连续超混沌系统	16
1.3.6 多涡卷混沌吸引子	17
1.4 典型混沌电路	18
1.4.1 简单混沌产生电路	18
1.4.2 时变混沌电路: 开关功率变换器	20
1.4.3 记忆混沌电路: 忆阻电路	21
1.5 小结	23
第 2 章 混沌系统数值方法	24
2.1 一维离散迭代映射	24
2.1.1 一维广义平方映射	24
2.1.2 不动点演变与倍周期分岔	26
2.1.3 切分岔和周期窗	28
2.2 二维离散迭代映射	29
2.2.1 二维抛物线映射模型	30
2.2.2 分岔图	31
2.2.3 迭代序列	33
2.2.4 相轨图	35
2.2.5 最大 Lyapunov 指数	37
2.2.6 特征值轨迹	39

2.3	三维连续混沌系统	40
2.3.1	三维混沌 Bao 系统	41
2.3.2	相轨图与时域波形	42
2.3.3	Poincaré 映射	44
2.3.4	Lyapunov 指数谱	45
2.3.5	分岔图	49
2.4	四维连续超混沌系统	51
2.4.1	超混沌吸引子	52
2.4.2	Lyapunov 指数谱与分岔图	55
2.5	小结	58
第 3 章	混沌系统电路实现	59
3.1	引言	59
3.2	模拟单元电路	60
3.2.1	线性运算电路	60
3.2.2	非线性运算电路	62
3.2.3	时滞和转换电路	65
3.3	混沌系统模拟实现	67
3.3.1	状态变量线性变换	67
3.3.2	功能模块化设计	68
3.3.3	混沌和超混沌电路	68
3.4	混沌系统数字集成平台	71
3.4.1	数字集成平台硬件设计	71
3.4.2	混沌系统离散化	73
3.4.3	程序流程图	73
3.5	混沌系统数字实现	74
3.5.1	改进型广义 Lorenz 系统	74
3.5.2	混沌系统数字集成平台 C++ 编码	76
3.5.3	数字化实现实验结果	80
3.6	混沌系统数字集成平台应用	81
3.6.1	多涡卷 Colpitts 混沌系统	81
3.6.2	网格涡卷超混沌系统	82
3.6.3	多翼混沌 Lü 系统	84
3.7	小结	85
第 4 章	简单混沌产生电路	86
4.1	引言	86

4.2	蔡氏混沌电路	86
4.2.1	建模和仿真	87
4.2.2	电路制作和实验观察	90
4.2.3	无量纲蔡氏方程	93
4.2.4	蔡氏方程动力学分析	95
4.3	Colpitts 振荡电路	97
4.3.1	数学建模	97
4.3.2	动力学分析	99
4.3.3	电路实验观察	100
4.4	文氏桥超混沌电路	102
4.4.1	超混沌吸引子	102
4.4.2	离散化算法与离散模型	106
4.4.3	基于 LabVIEW 的仿真与实现	107
4.5	频率混沌信号	110
4.5.1	频率混沌信号产生	111
4.5.2	频率混沌信号分析	112
4.5.3	频率混沌信号实验输出	113
4.6	小结	114
第 5 章	多涡卷混沌系统设计	116
5.1	引言	116
5.2	线性系统到多涡卷混沌系统	117
5.2.1	多涡卷混沌系统构造	117
5.2.2	平衡点和动力学分析	120
5.2.3	电路实现和实验验证	122
5.3	多涡卷混沌 Colpitts 振荡器	124
5.3.1	Colpitts 振荡器模型	124
5.3.2	多涡卷 Colpitts 振荡器模型	125
5.3.3	多涡卷 Colpitts 振荡器动力学分析	128
5.3.4	电路实现和实验验证	130
5.4	多涡卷超混沌吸引子	131
5.4.1	多涡卷超混沌系统模型	131
5.4.2	多涡卷混沌和超混沌吸引子	132
5.4.3	平衡点和稳定性	134
5.4.4	多涡卷超混沌系统动力学分析	136
5.4.5	电路实现和实验验证	137

5.5	吸引子的涡卷分布设计	139
5.5.1	多涡卷系统和锯齿波函数	139
5.5.2	奇异的涡卷位置分布	140
5.5.3	共存多涡卷吸引子	143
5.6	小结	145
第 6 章	电流控制开关变换器	147
6.1	引言	147
6.2	开关变换器动力学建模	148
6.2.1	电流控制 Buck-Boost 变换器	148
6.2.2	开关状态描述	148
6.2.3	基于状态方程的时域分析	150
6.2.4	两个电感电流边界	151
6.2.5	精确离散时间模型	152
6.3	开关变换器动力学分析	153
6.3.1	倍周期分岔与边界碰撞分岔	153
6.3.2	典型时域波形与相轨图	156
6.3.3	工作状态域估计	161
6.4	开关变换器稳定性分析	162
6.4.1	不动点和 Jacobi 矩阵	162
6.4.2	最大 Lyapunov 指数	164
6.4.3	特征值轨迹	165
6.5	电路仿真与实验验证	167
6.5.1	电路仿真结果	167
6.5.2	电路实验结果	169
6.6	小结	171
第 7 章	斜坡补偿开关变换器	172
7.1	引言	172
7.2	斜坡补偿 Boost 变换器	173
7.2.1	斜坡补偿电流控制 Boost 变换器	173
7.2.2	分段光滑迭代映射方程	175
7.2.3	电流控制 Boost 变换器的分岔分析	178
7.2.4	斜坡补偿的镇定控制机理	180
7.2.5	DCM 时斜坡补偿的模式转移机理	182
7.3	斜坡补偿 Buck 和 Buck-Boost 变换器	184

7.3.1	斜坡补偿电流控制 Buck 和 Buck-Boost 变换器	184
7.3.2	开关变换器的统一迭代映射方程	185
7.3.3	开关变换器的归一化迭代映射方程	190
7.4	斜坡补偿开关变换器的工作状态域估计	191
7.4.1	两个统一的边界线分类方程	191
7.4.2	Buck 变换器工作状态域估计	193
7.4.3	电流控制 Buck 变换器的实验验证	195
7.5	小结	196
第 8 章	忆阻器与忆阻混沌电路	198
8.1	引言	198
8.2	忆阻器模型	200
8.2.1	忆阻器定义	200
8.2.2	分段线性模型	201
8.2.3	三次型非线性模型	201
8.2.4	二次型非线性模型	203
8.3	有源磁控忆阻器等效电路	205
8.3.1	电路等效实现实例	205
8.3.2	电路仿真结果	206
8.3.3	简单忆阻电路仿真分析	207
8.4	基于三次型忆阻器的混沌电路	208
8.4.1	忆阻电路与混沌吸引子	208
8.4.2	平衡点集与稳定性	212
8.4.3	依赖于初始状态的动力学行为	214
8.4.4	依赖于电路参数的动力学行为	218
8.5	基于二次型忆阻器的混沌电路	221
8.5.1	忆阻电路及其实验结果	221
8.5.2	平衡点及其稳定性	223
8.5.3	依赖于初始状态的动力学行为	224
8.5.4	依赖于电路参数的动力学行为	226
8.6	小结	227
参考文献		228
附录	Buck-Boost 变换器离散时间模型 Jacobi 矩阵元素推导	235

第 1 章 混沌与混沌系统概述

1.1 引 言

混沌理论是过去近五十年来蓬勃发展起来的一门科学。混沌现象无处不在，它几乎渗透到了人类社会中的每个角落。纵观混沌科学发展史，从时间上，以 20 世纪末为界，混沌科学可以分成两个研究阶段。早期的研究工作主要是混沌现象初步揭示、混沌系统生成模型和混沌系统理论的建立；近期的研究工作则转为混沌现象深入认知、混沌系统生成模型和混沌系统理论的延拓。

早期的混沌系统生成模型，如 Lorenz 大气湍流方程、Logistic 虫口模型、蔡氏 (Chua) 混沌电路等，一般是从物理系统中经过简化和抽象后获得的，并以此为基础建立了相应的混沌理论体系。近期的混沌系统生成模型则是以已有的混沌理论为基础，主要基于已有的模型作延伸构造出新的模型。例如，Chen 系统和 Lü 系统是从 Lorenz 系统生成的，并与 Lorenz 系统共同组成了广义 Lorenz 系统；而多涡卷（或多翼）系统则是基于混沌吸引子形成的动力学机理，通过增加系统指数为 2 的平衡点实现的。总体来说，混沌系统生成模型从简单的低维系统模型往复杂网络系统模型发展，进而从物理上进行相应的电路实现，产生不同性能的混沌信号，以满足信息工程领域应用的实际需要。

早期所阐述的通向混沌的道路主要有倍周期分岔、Hopf 分岔、切分岔和混沌危机分岔等，所揭示的混沌现象主要有混沌、阵发混沌、周期窗、Feigenbaum 树等非线性物理现象；近期还发现了由边界碰撞分岔和时间分岔等道路通向混沌，所揭示的混沌现象除了已存在的物理现象外还存在着共存吸引子、共存混沌轨道、瞬态混沌和不完全倍周期 Feigenbaum 树等新型的非线性物理现象。

此外，1971 年，美国加州大学著名的华裔学者蔡少棠教授根据电路理论基本变量组合完备性原理，在电阻、电感和电容三个基本元件之外，从理论上预测了第四种元件——忆阻器的存在性，并于 1976 年提出了忆阻器件和系统。三十七年后，惠普公司于 2008 年 5 月在 *Nature* 杂志上首次报道了忆阻器的实现性，这一事件轰动了整个电路与系统领域的学术界。由于忆阻器是具有记忆功能的非线性元件，也是构建非线性电路与系统的最简单的元件，所以必能实现一系列全新的混沌电路系统。在短短的几年时间内，该方向引起了诸多学者的研究兴趣。

混沌是确定的非线性系统产生的伪随机现象，具有初值敏感性和宽带特征。

由于简单的非线性动力系统就能产生复杂的动力学行为,因此混沌在信息加密、保密通信和混沌雷达等信息工程领域得到了广泛的应用。离散映射和连续混沌系统的生成模型作为信息工程领域中的混沌信号源,所产生的混沌信号具备的特征(即模型的动力学特性)及其相应模型的电路实现等是研究者所关注的重点,也是实际应用的基础。

基于以上原因,本书将着眼于一些典型的混沌信号产生电路和混沌系统的生成模型,给出这些混沌系统动力学分析的数值仿真手段,并提供具体电路实现形式和实验观察结果,以便于读者揭示和分析这些混沌系统所存在的丰富且复杂的非线性动力学现象。同时,针对电子信息工程专业和电力电子技术专业中的一类典型电路,如 Chua 混沌电路、Colpitts 振荡器、开关 DC-DC 变换器和基于忆阻器的振荡电路等,通过各种动力学建模方法建立相应的数学模型,并利用常规的动力学分析手段,揭示其复杂的物理现象,并阐述其形成机理。

1.2 混沌的一般概念

近几十年来,非线性科学获得了前所未有的蓬勃发展,非线性科学的研究不仅具有重大的科学意义,而且具有广泛的应用前景。大量的研究工作表明,混沌在生物工程、力学工程、电子工程、数据加密、保密通信、决策预测、电力电网动态分析和保护等领域存在着广阔的应用前景。

1.2.1 混沌研究的历史沿革

20 世纪 60 年代初,麻省理工学院著名的气象学家 Lorenz 在研究大气湍流现象中,发表了著名的关于“决定论非周期流”的论文^[1]。他指出由完全确定的三阶微分方程构成的确定性耗散系统具有十分不规则的解行为,并偶然地发现了确定性系统具有“混沌”现象,随后又提出了“蝴蝶效应”理论,由此真正拉开了科学家研究混沌现象的序幕。

20 世纪 70 年代是混沌研究发展史上光辉灿烂的阶段,一系列的混沌研究成果相继问世,混沌史上关键意义的论文也相继发表。例如,法国物理学家 Ruell 和荷兰数学家 Takens 提出了“奇怪吸引子”的概念^[2];美籍华人李天岩和美国数学家 Yorke 发表了著名的“周期三意味着混沌”的论文^[3];美国学者 May 给出了生态学中的虫口模型^[4],也就是非常有名的 Logistic 模型,这个模型具有极其复杂的动力学行为;Feigenbaum 等在 May 的基础上发现了倍周期分岔现象中的标度性、普适常数等^[5],所有这些概念都使得混沌在现代科学中具有了坚实的理论基础。

20 世纪 80 年代,混沌科学研究得到了进一步的发展,系统如何从有序进入新的混沌及其混沌的性质和特点成为当时的研究重点和热点。例如,数学家 Mandelbrot

于1980年用计算机绘出世界上第一张 Mandelbrot 集的混沌图像^[6-7]。Grassberger 等提出了重构动力系统的理论和方法^[8], 并通过从时间序列中计算分数维和 Lyapunov 指数等混沌特征量来揭示混沌的性质与特点, 使得混沌研究从理论研究阶段转向实际应用研究阶段。

20世纪90年代是混沌科学与其他学科相互渗透、相互促进、广泛应用的年代, 关于混沌的研究几乎跨越了自然科学和社会科学的所有领域。混沌同步、超混沌、混沌保密通信、混沌神经网络、混沌经济学等方向都取得了突破性的进展^[9-13], 由此激发起来的理论与实验应用研究蓬勃展开, 使得混沌理论不论在自然科学还是在社会科学都得到了广泛的应用。

进入21世纪, 随着混沌理论的深入研究、混沌生成模型的探究和混沌信号的处理与应用研究的展开, 混沌研究从过去单纯的揭示和刻画混沌现象本身转向理论和应用相结合^[14-17]。混沌在信息工程领域的应用已成为一个重要研究课题, 这里面既有属于混沌理论研究方面的内容, 例如, 如何对一个已有的非线性系统或电路进行动力学分析, 揭示其非线性物理现象, 对系统或电路进行参数域预测等研究; 也有根据混沌系统理论进行混沌动力系统的设计, 满足一些信息工程的特殊应用要求。这两方面的内容并不是孤立的, 而是密切联系的, 混沌理论的研究为混沌的应用提供了理论基础; 而混沌的应用研究又不断地为混沌理论的研究提出新的课题, 从而对混沌的应用研究起到了巨大的推动作用。

1.2.2 混沌的定义和特征

混沌是非线性动力学系统所具有的一类复杂动力学行为, 它是确定性非线性系统的内在随机性。所谓“确定性系统”是指描述该系统的数学模型表示为不包含任何随机因素的完全确定的方程。

由于混沌系统的复杂性至今尚未被人们完全了解, 因此混沌还没有一个统一的数学定义。几个常见的不同意义下的混沌定义有: Li-Yorke 意义下的混沌^[3], Wiggins 意义下的混沌^[18], Devaney 意义下的混沌^[19]等。这些定义都有严格的数学理论和实际的分析方法, 下面给出其中相对简单的定性描述混沌现象的 Devaney 定义^[19]。

定义 1.1 设 V 为一集合, 如果满足下列三个条件, 则称 $f: V \rightarrow V$ 在 V 上是混沌的。

- (1) f 有对初始条件的敏感依赖性;
- (2) f 是拓扑传递的;
- (3) 状态点在 V 中是稠密的。

Devaney 的定义说明混沌映射具有三个要素, 即不可预测性、不可分解性和规律性。其中, 对初始条件的敏感依赖性导致该系统是不可预测的; 拓扑传递性导

致该系统不能被分解为两个互不影响的子系统；在“混乱”的形态中，规律性的因素导致有稠密的周期点。

另外，被誉为“混沌之父”的美国科学家 Lorenz 曾经对混沌定义给出过一个通俗的说法：如果一个真实的物理系统，在排除了所有的随机性影响后，仍有貌似随机的表现，那么这个系统就是混沌的。

Lorenz 的定义说明混沌具有如下的基本特征。

(1) 混沌是系统固有的。系统所表现出来的复杂性是由系统自身的、内在的因素造成的，并不是在外界的干扰下所产生的，是系统内随机性的表现。

(2) 混沌是确定性行为。混沌的确定性分为两个方面：首先，混沌系统是确定的系统，是一个真实的物理系统；其次，混沌的表现是貌似随机，而并不是真正的随机。系统每一时刻的状态都受到前一时刻状态的影响，是确定出现的。混沌系统的状态是可以完全重现的，这与随机系统不同。

因此，混沌是确定性系统中出现的类似随机的现象，具有如下的主要特征。

(1) 对初始条件的极端敏感性。混沌系统对其初始条件具有极端的敏感性，这是混沌区别于其他运动形态的本质特征。这一特征意味着混沌的不可预测性。这里，不可预测是针对混沌系统的长期行为而言的，其短期行为是可预测和完全确定的。

(2) 有界性。混沌是有界的。它的运动轨迹始终局限于一个确定的区域，这个区域称为混沌吸引域。无论混沌系统内部状态多么不稳定，它的轨迹都不会走出混沌吸引域。所以，从整体上来说混沌系统是稳定的。

(3) 遍历性。混沌运动在其混沌吸引域内是各态遍历的，即混沌轨迹将经过混沌吸引域内每一个状态点。

(4) 内随机性。虽然混沌系统的动力学方程是确定的，但其运动形态却具有某些“随机”性。这种随机性是在系统自身演化的动力学过程中由于内在非线性机制作用而自发产生的。因此，混沌的随机性是确定性系统的内在随机性。混沌的随机性说明混沌系统是局部不稳定的。

(5) 分维性。混沌不等同于随机运动，它在局部区域和空间中具有丰富的内涵。表现为混沌运动轨迹在某个有限的区域内做无限次的折叠，其运动状态具有丰富的层次和自相似结构。混沌的这种行为特征用分维性来表示。

(6) 非周期定常态特性。非周期性是混沌运动的一个重要特征。可以说，混沌没有通常意义下的定常态，或者说混沌的定常态就是这一非周期性过程。但是，混沌不是任意一种非周期运动，而是确定性的非周期性运动。这里的“确定性”，一是指混沌是由确定性动力学方程产生的非周期运动，不是由外部扰动引起的；二是指混沌是一种定常态行为，不是系统在过渡过程中呈现的非周期性。

上述混沌的主要特征，不仅是混沌学研究的对象，而且也是判断实际系统是否处于混沌状态的依据。

1.2.3 混沌的刻画方法

混沌来自于系统的非线性性质，其非线性只是产生混沌的必要条件而非充分条件。通常根据是否具有上述混沌的基本特征来判断一个系统是否处于混沌状态。因此，如何用数学语言来描述混沌的特征，是混沌学研究的重要课题。下面归纳并阐述通常用于刻画混沌运动特征的一些方法。

1) 相轨图

相轨图是系统运动轨迹的记录，反映了系统状态的变化情况，它是观察系统中动力学行为的最直接的方法。为了方便，人们通常观察的是相轨图在平面上的投影，利用它可以直接判断系统中呈现出来的简单的动力学行为。对于复杂的动力学行为，可以初步认识动力学行为的复杂性，为进一步判断系统行为的状态奠定基础。例如，周期行为就可以直接由相轨图来判断，而拟周期行为、奇异行为的判别需要进一步分析。

2) 庞加莱映射

庞加莱映射是由 Poincaré 于 19 世纪末提出的，在分析复杂的动力学行为时有着非常重要的作用，是分析动力学系统的常用工具。

假设一个非线性方程的解 ψ_t 在 \mathbf{R}^n 空间中存在一个周期性的轨道 γ 。在 \mathbf{R}^n 空间中取一个 $n-1$ 维的横截面 Σ ，使对于所有的 $x \in \Sigma$ ，有 $f(x) \cdot n(x) \neq 0$ ，其中 $n(x)$ 为 x 点处在 Σ 的法线方向上的单位向量。令 γ 与 Σ 的交点为 p ，并令 $U \subseteq \Sigma$ 为点 p 的邻域，那么

$$P(q) = \psi_{\tau}(q) \quad (1.1)$$

称为庞加莱映射 $P: U \rightarrow \Sigma$ 。式中， $q \in U$ 。 $\tau = \tau(q)$ 是以 q 为起点的轨道 $\psi_t(q)$ 初次返回到横截面 Σ 所需要的时间。

庞加莱映射能起到降维的作用。例如，周期行为的庞加莱映射为一个点，拟周期行为的庞加莱映射为一条闭合曲线，而混沌行为的庞加莱映射则表现为分形的几何特征。

3) 分岔图

当系统参数变化时，其庞加莱映射在某一坐标轴上的投影可构成该参数变化时的分岔图。对于确定不变的系统参数，分岔图上一个信号点或者与系统周期数相等的几个信号点可以表示系统周期稳定的状态。而混沌图中画出的无数个点则表示出现混沌现象时存在无数个周期信号点从不落到相同的位置上。因此，在分岔图中，可以很清晰地描绘出系统性能随系统参数变化的特征。

当系统参数变化时，混沌状态突然向周期状态转变，这种现象称为切分岔。切分岔引发了阵发混沌现象，即在分岔图上出现大小不同和周期数不等的周期窗

口。在周期窗口内，系统运行轨道先以稳定的周期轨道为起始，每个周期轨道都经倍周期或 Hopf 分岔后产生激变形成各自的混沌带，其分岔结构具有自相似性。在窗口结束处，次级混沌带与不稳定的周期轨道相遇，从而引起混沌危机，此时次级混沌窄带变成了一个混沌宽带。切分岔之前的混沌称为阵发混沌，是一种近似规则状态和混沌态随机交替发生的非线性运行方式。系统在切分岔点之前处于混沌状态，但这时系统的混沌运动状态已经暗示了周期状态即将产生。

4) 李雅普诺夫指数

李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数可以表征系统运动的特征，它沿某一方向取值的正负和大小，表示长时间系统在吸引子中相邻轨道沿该方向平均发散或收敛的快慢程度^[20]。因此，最大 Lyapunov 指数决定轨道覆盖整个吸引子的快慢，最小 Lyapunov 指数则决定轨道收敛的快慢，而所有 Lyapunov 指数之和可以认为大体上表征轨道平均发散或收敛的快慢。对于吸引子，必定有一个 Lyapunov 指数是负的；而对于混沌，必定有一个 Lyapunov 指数是正的。因此，人们往往通过计算出一个正的 Lyapunov 指数 (必要条件)，作为混沌的判据，即使不知道奇异吸引子的具体大小。

对于混沌动力系统，Lyapunov 指数的大小与系统的混沌程度有关。假设系统从相空间中某半径足够小的超球开始演变，则第 i 个 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{r_i(t)}{r_i(0)} \right) \tag{1.2}$$

式中， $r_i(t)$ 为 t 时刻按长度排在第 i 位的椭圆轴的长度， $r_i(0)$ 为初始球半径。

根据式 (1.2)，对不同的系统，Lyapunov 指数的算法各有不同。下面具体介绍自治微分系统 Lyapunov 指数的计算方法。

设有自治系统

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{1.3}$$

式中， $x \in \mathbf{R}^n$ 是 n 维向量， $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是系统函数。式 (1.3) 的解从初始值 $x(0)$ 出发在相空间形成一个轨道 $x(t)$ 。以 $x(0)$ 的邻点 $x(0) + \Delta x(0)$ 出发形成另一轨道 $x(t) + \Delta x(t)$ ，如图 1.1 所示。

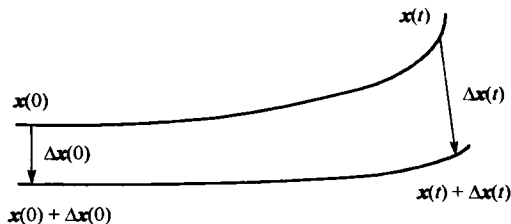


图 1.1 混沌轨道的指数分离

设 $\Delta \mathbf{x}(t) = \{\Delta x_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ ，将 $\{\Delta x_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ 所构成的空间称为切空间。只要 $\{\Delta x_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ 足够小，式 (1.3) 所描述系统是耗散系统，则 $\Delta \mathbf{x}(t)$ 应满足下列线性微分方程

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{J}\Delta \mathbf{x}(t) \quad (1.4)$$

式中， \mathbf{J} 是式 (1.3) 的雅可比 (Jacobi) 矩阵，可表示为

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

在切空间上，若初始时刻 $\Delta \mathbf{x}(0)$ 的长度为 $\|\Delta \mathbf{x}(0)\|$ ， t 时刻后的长度为 $\|\Delta \mathbf{x}(t)\|$ ，则 Jacobi 矩阵的特征值给出了某确定时刻其长度在该特征方向上的指数变化率，因此设

$$\|\Delta \mathbf{x}(t)\| = e^{LEt} \|\Delta \mathbf{x}(0)\| \quad (1.6)$$

式中， n 维系统的 Lyapunov 指数 LE 为

$$LE = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}(t)\|}{\|\Delta \mathbf{x}(0)\|} \quad (1.7)$$

在 n 维空间中， $\Delta \mathbf{x}(t)$ 在每个基底上都有分量，所以切空间每一个分量都有一个 Lyapunov 指数。类似式 (1.7) 求出 n 个 Lyapunov 指数，并将它们按大小顺序排列起来，即

$$LE_1 \geq LE_2 \geq \dots \geq LE_n \quad (1.8)$$

称这些数组成的集合为 Lyapunov 指数谱，其中 LE_1 为最大 Lyapunov 指数。

5) 功率谱

功率谱分析是研究振动和混沌的一个重要手段。根据傅里叶 (Fourier) 分析，任何周期为 T 的周期运动 $x(t)$ 都可以展开成 Fourier 级数，其系数与相应频率的关系为离散的分离谱，而非周期运动的频率则是连续谱。

功率谱有两种计算方法，一种为对样本函数 $x(t)$ 的傅里叶变换求平方的时间均值，即

$$S_x(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (1.9)$$

另一种是对时间相关函数进行傅里叶变换，即

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (1.10)$$

式中， $R_x(\tau)$ 为样本函数 $x(t)$ 的自相关函数，且