

高中数学第三册

补充习题集

吉林省教育学院编

吉林人民出版社

目 录

第一章 线性方程组	(1)
习题一	(1)
习题二	(7)
复习题一	(12)
第二章 不等式的性质和证明	(20)
习题三	(20)
习题四	(23)
复习题二	(25)
第三章 复数	(38)
习题五	(38)
习题六	(39)
习题七	(45)
复习题三	(51)
第四章 排列、组合和二项式定理	(56)
习题八	(56)
习题九	(59)
习题十	(60)
复习题四	(62)
第五章 概率	(67)
习题十一	(67)
习题十二	(69)
复习题五	(71)
第六章 数的进位制和逻辑代数简介	(76)
习题十三	(76)
习题十四	(80)
复习题六	(86)

第一章 线性方程组

习 题 一

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & \operatorname{tg} 2 \\ 4 & \operatorname{tg} 4 \end{vmatrix},$$

$$(4) \begin{vmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{vmatrix}.$$

2. 用行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} 3x - 2y + 13 = 0 \\ 5x + 8y - 1 = 0 \end{cases},$$

$$(4) \begin{cases} 2x - 10y - 3 = 0 \\ 4x + 5y - 1 = 0 \end{cases},$$

$$(5) \begin{cases} x + ay = b \\ x + by = a \end{cases},$$

$$(6) \begin{cases} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha = a \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha = b \end{cases}.$$

3. 用对角线法则计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.$$

4. 解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2) \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 利用行列式性质, 计算:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}, \quad (4) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}.$$

6. 利用行列式性质, 将下列行列式化成具有 0 元素的行列式后, 再计算:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. 按行或列展开下列行列式并求值:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix},$$

$$(5) \begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix},$$

8. 展开下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}, \quad (4) \begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}.$$

9. 已知: 204, 527, 255这三个数都是17的倍数, 应用行

列式性质证明: 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ 的值也是17的倍数.

10. 利用行列式性质证明:

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

11. 求行列式的一切元素的余子式之和。

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

12. 求证: $\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 + la_3 & a_2 + ma_3 & a_3 \\ b_1 + kb_2 + lb_3 & b_2 + mb_3 & b_3 \\ c_1 + kc_2 + lc_3 & c_2 + mc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

13. 求证下列行列式之值为零。

$$(1) \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

14. 求下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix},$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$15. \text{ 求证: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$16. \text{ 求证: } \begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)$$

$$(p+q+r).$$

17. 求证:

$$(1) \begin{vmatrix} 1+\cos\theta & 1+\sin\theta & 1 \\ 1-\sin\theta & 1+\cos\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos(A-B) & \cos(B-C) & \cos(C-A) \\ \cos(A+B) & \cos(B+C) & \cos(C+A) \\ \sin(A+B) & \sin(B+C) & \sin(C+A) \end{vmatrix} \\ = -2\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A),$$

$$(3) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

习题一 答案或提示

1. (1) 13; (2) $a^2 + b^2$; (3) 0; (4) $-\sin \beta$.
2. (1) $x = 2, y = 1$; (2) $x = 3, y = -2$; (3) $x = -3, y = 2$;
(4) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{5}$; (5) $x = a + b, y = -1$;
(6)
$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ x_2 &= b \cos \alpha - a \sin \alpha \end{aligned}$$
3. (1) -4; (2) -48; (3) ab .
4. (1) $x = 2, 3$; (2) $x = 2, -\frac{11}{7}$.
5. (1) 8; (2) -22680; (3) 0; (4) $4abcdef$.
6. (1) 20; (2) -37.
7. (1) 20; (2) 32; (3) 18; (4) 74; (5) -30.
8. (1) $p^3 - p(q^2 + r^2 + s^2) + 2qrs$;
(2) $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z$;
(3) $p(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$; (4) 0.
9. 提示: 根据教材第9页《定理4》来证明.
11. $bcd + acd + abd + abc$.
13. 提示: 利用教材第10页《定理7》来证明.
14. (1) 1; (2) 0; (3) -126.
16. 提示: 利用行列式的性质, 将第1列化成1 0 0的形式, 再按第1列展开即得.
17. (1) 提示: 利用行列式的性质; (2) 利用三角函数和差角公式; (3) 利用行列式性质.

习 题 二

1. 用行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 5y - z = 7 \\ 3x - 4y + 3z = 1 \\ x + 14y + z = 2 \end{cases},$$

$$(4) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases},$$

$$(5) \begin{cases} bx - ay = -2ab \\ -2cy + 3bz = bc \quad (abc \neq 0) \\ cx + az = 0 \end{cases},$$

$$(6) \begin{cases} \frac{x+2}{y-2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+1}{z+3} = 4 \\ \frac{z+4}{x-1} = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$(7) \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 \quad (a \neq b \neq c), \\ bcx + cay + abz = 3abc \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 11 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} - \frac{5}{z} = -20, \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{3}{z} = 6 \end{cases}$$

2. 用行列式解方程组并讨论:

$$(1) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3, \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x - 5y + mz = 3 \\ 7x - 11y + nz = 3, \\ x + y + pz = 3 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases} \begin{pmatrix} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{pmatrix},$$

$$(5) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = (b - c)(c - a)(a - b), \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} ax + y + z = a - 3 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -2 \end{cases}.$$

3. 用行列式解齐次方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}.$$

4. k 取何值时方程组有非零解:

$$(1) \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} kx + 3y + z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \\ kx + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ kx + 7y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}.$$

5. 若方程组
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \end{cases}$$
 有非零解。求 a 。

6. 已知: $2x + 5y + 4z = 0$, $3x + y - 7z = 0$. 求证:
 $x + y - z = 0$.

习题二 答案或提示

1. (1)
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{8} \\ x_2 = -\frac{9}{8} \\ x_3 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

(3) 无解;

(4) 无穷多解;

(5)
$$\begin{cases} x = -a \\ y = b \\ z = c \end{cases}, \quad (6) \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}, \quad (8) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. (1) (i) 当 $a \neq 1$, $a \neq -2$ 时, 有唯一解

$$x = -\frac{1+a}{a+2}, \quad y = \frac{1}{a+2}, \quad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

(ii) 当 $a = 1$ 时, 有无穷多解。

(iii) 当 $a = -2$ 时, 无解。

(2) (i) 当 $b \neq 0$, $a \neq 1$ 时, 有唯一解

$$x = \frac{1-2b}{b(1-a)}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

(ii) 当 $b = 0$ 时, 无解.

(iii) 当 $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ 时, 有无穷多解.

(3) 当 $p+n-2m \neq 0$ 时, 有唯一解
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

当 $p+n-2m = 0$ 时, 有无穷多解.

(4) (i) 当 $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 时, 无解;

(ii) 当 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 时, 有唯一解
$$\begin{cases} x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

(5) (i) 当 $a = b = c$ 时, 有无穷多解;

(ii) 当 $a \neq b \neq c$ 时, 有唯一解
$$\begin{cases} x = c - b \\ y = a - c \\ z = b - a \end{cases}$$

(6) (i) 当 $a = 1$ 或 $a = -2$ 时, 无解;

(ii) 当 $a \neq 1$, $a \neq -2$ 时, 有唯一解
$$\begin{cases} x = \frac{(a+1)(a-3)}{(a+2)(a-1)} \\ y = \frac{a+4}{(a+2)(a-1)} \\ z = \frac{-(3a+4)}{(a+2)(a-1)} \end{cases}$$

3. (1) 有零解; (2)
$$\begin{cases} x = 3k \\ y = k \\ z = -4 \end{cases} \quad (k \neq 0 \text{ 时, 可得非零解});$$

(3) $y = x + z$, 有无穷多组非零解.

4. (1) $k = -1, k = 4$ 时, 有非零解;

(2) $k = 4$ 时, 有非零解
$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases},$$

(3) $k = 12\frac{2}{5}$ 时, 有非零解
$$\begin{cases} x = -5t \\ y = 11t \\ z = 7t. \end{cases}$$

5. $a = 1$.

6. 提示,
$$\begin{cases} 2x + 5y = -4z \\ 3x + y = 7z \end{cases},$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13, D_x = \begin{vmatrix} -4z & 5 \\ 7z & 1 \end{vmatrix} = -39z,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4z \\ 3 & 7z \end{vmatrix} = 26z.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 3z, \quad y = \frac{D_y}{D} = -2z.$$

复 习 题 一

1. 用行列式性质, 将下列行列式分解成因式:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix}.$$

2. 证明下面恒等式:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 计算:

$$(1) \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{t^2-1} & \frac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos(\alpha + \beta) \\ \cos \beta & \cos(\alpha + \beta) & 1 \end{vmatrix}.$$

4. 求证:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & yzu \\ 1 & y & y^2 & zux \\ 1 & z & z^2 & uxy \\ 1 & u & u^2 & xyz \end{vmatrix},$$

$$(2) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (a+c)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2abc(a+b+c)^3;$$

$$(3) \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & a^2 + c^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2,$$

$$(4) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4.$$

5. 证明平面中三条不同的直线: $ax + by + c = 0$
 $bx + cy + a = 0$
 $cx + ay + b = 0$

相交于一点的充要条件是: $a + b + c = 0$.

6. 若 a, b, c 互不等, 且 $D = \begin{vmatrix} a & a^3 & a^4 - 1 \\ b & b^3 & b^4 - 1 \\ c & c^3 & c^4 - 1 \end{vmatrix} = 0$,

求证: $abc(ab + bc + ca) = a + b + c$.

7. 利用行列式解方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 3 \\ 3x - 8y + 6z = 1 \\ 8x - 2y - 9z = 4 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$

8. 讨论 a 、 λ 为何值时下列方程组有唯一解并求出解,

$$(1) \begin{cases} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 3ax + (2a+1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)x + (2a+1)y + (a+1)z = a+1 \\ (4a-1)x + 3ay + 2az = 1 \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(1+\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3\lambda \end{cases}$$

9. 解下列齐次方程组: